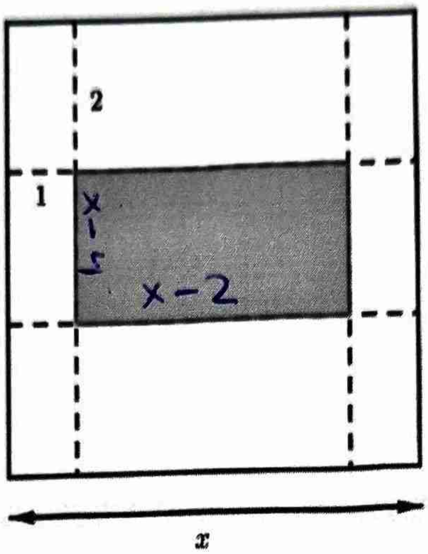
ΘΕΜΑ 4

Για μια επαγγελματική κάρτα επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς $x\ cm$ $(5 \le x \le 10)$ στο οποίο η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων (με κίτρινο χρώμα στο παρακάτω σχήμα) περιβάλλεται από περιθώρια $2\ cm$ στο πάνω και στο κάτω μέρος της και $1\ cm$ δεξιά και αριστερά.



α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:

$$E(x)=(x-2)(x-4),\ 5 \le x \le 10 .$$

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή του x, ώστε το εμβαδόν Ε της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι $35\ cm^2$.

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον $24\ cm^2$.

(Μονάδες 10)

(α) $E = (x-2)(x-4)$

(β) $E = 35 \Leftrightarrow (x-2)(x-4) = 35$

$x^2 - 4x - 2x + 8 = 35$

$x^2 - 6x - 27 = 0$

$x = 9$ $\quad \cancel{x = -3}$

(b) $E \geq 24$

$(x-2)(x-4) \geq 24$

$x^2 - 4x - 2x + 8 \geq 24$

$x^2 - 6x - 16 \geq 0$

x	-2 8
$x^2-6x-16$	$+$ $-$ $+$

$x \leq -2$ ou $x \geq 8$

Logo : $x \in [8, 10]$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος (α_ν), $\nu \in \mathbb{N}^*$ της οποίας οι τρεις πρώτοι όροι είναι:

$$\alpha_1 = x,\ \alpha_2 = 2x^2 - 3x - 4,\ \alpha_3 = x^2 - 2,\ \text{με } x \text{ ακέραιο.}$$

α) Να αποδείξετε ότι $x = 3$

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τον ν-οστό όρο της προόδου και να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να είναι ίσος με 2014 .

(Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots + \alpha_{15}$.

(Μονάδες 7)

α

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= x \\ \alpha_2 &= 2x^2-3x-4 \\ \alpha_3 &= x^2-2 \end{aligned}\right\} \text{Είναι διαδοχικοί όροι}$$

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1+\alpha_3}{2}$$

$$2x^2-3x-4 = \frac{x+x^2-2}{2}$$

$$4x^2-6x-8 = x+x^2-2$$

$$3x^2-7x-6=0$$

$$\Delta = 49+12\cdot 6$$

$$\Delta = 121$$

$$x = \frac{7\pm 11}{6} \begin{cases} 3 \\ \cancel{-\frac{2}{3}} \end{cases}$$

1. $S = \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \dots + \alpha_{15}$

$S_\nu = \frac{\nu}{2}(2\alpha_1 + \omega(\nu-1))$

$S_{15} = \frac{15}{2}(2 \cdot 3 + 2(15-1))$

$S_{15} = \frac{15}{2}(6 + 28) = \frac{15}{2} 34 = 15 \cdot 17$

$S_{15} = 255$

$\left.\begin{array}{l} \alpha_2 = 5 \\ \alpha_4 = 9 \end{array}\right\}$ Νέα πρόοδος

$B_1 = 5$

$B_2 = 9$ $\quad \omega = 4$

$B_\nu = B_1 + \omega(\nu-1)$

$B_\nu = 5 + 4(\nu-1)$

$\boxed{B_\nu = 4\nu + 1}$

$B_\nu = \alpha_{14} = 29$

$4\nu + 1 = 29$

$4\nu = 28$

$\nu = 7$

(B) $a_1 = 3$

$a_2 = 5$ $\Big\}$ $\omega = 2$.

$a_3 = 7$

$a_\nu = a_1 + \omega(\nu - 1)$

$a_\nu = 3 + 2(\nu - 1)$

$a_\nu = 2\nu + 1$

$a_\nu = 2014$

$2\nu + 1 = 2014$

$2\nu = 2013$

$\nu = \frac{2013}{2} \notin \mathbb{N}$. άρα δεν είναι το 2014 όρος της προόδου.

$$S_7 = \frac{7}{2}\left(2 \cdot 5 + 4(7-1)\right)$$

$$S_7 = \frac{7}{2}(10 + 24) = 7 \cdot 17$$

$$S_7 = 119.$$

Άρα $S = 255 - 119$

$$S = 136.$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ανισώσεις: $2 \leq |x| \leq 3$ και $x^2 - 4x < 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2,3]$.

(Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση.

(Μονάδες 10)

α) $2 \leq |x| \leq 3$

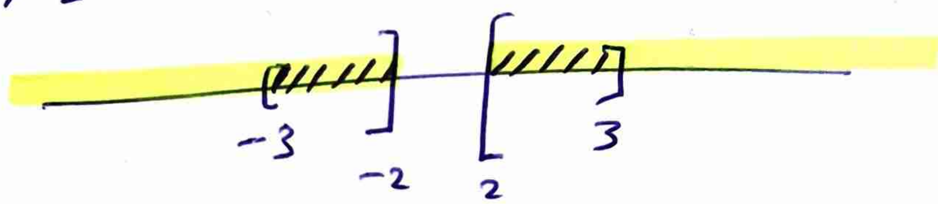
$|x| \geq 2$ και $|x| \leq 3$

$x \geq 2$ ή $x \leq -2$

$-3 \leq x \leq 3$

$x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$

$x \in [-3, 3]$



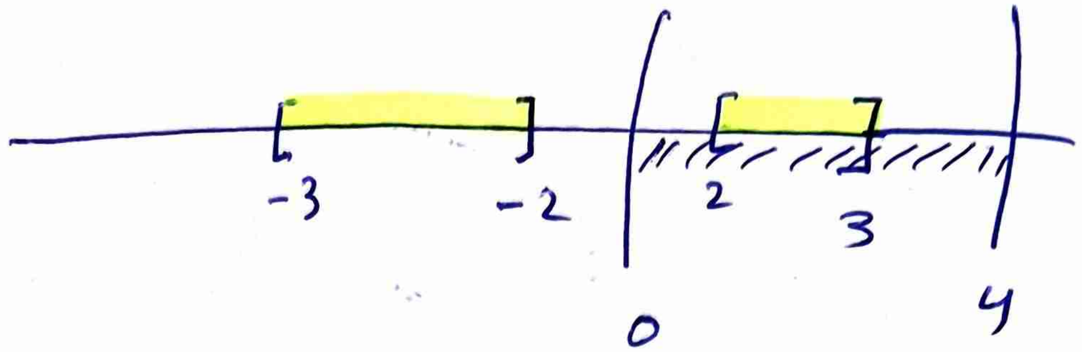
$x \in [-3, -2] \cup [2, 3]$

$x^2 - 4x < 0$

x		0		4	
x^2-4x	+		−		+

$x \in (0, 4)$

(B)



κοινά $x \in [2,3]$.

(γ) $\left.\begin{array}{l} 2 \le p_1 \le 3 \\ 2 \le p_2 \le 3 \end{array}\right\}$ (+) $4 \le p_1 + p_2 \le 6$

$$2 \le \frac{p_1+p_2}{2} \le 3$$

(

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f, με

$$f(x)=\begin{cases}-x+2, & \alpha\nu\ \ x<0\\ x+2, & \alpha\nu\ \ x\geq 0\end{cases}$$

α) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 3)

β)

i) Να χαράξετε τη C_f και την ευθεία $y=3$, και στη συνέχεια να εκτιμήσετε τις συντεταγμένες των σημείων τομής τους.

(Μονάδες 5)

ii) Να εξετάσετε αν τα σημεία αυτά είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $y'y$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)

γ)

i) Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η ευθεία $y=\alpha$ τέμνει τη C_f σε δυο σημεία; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ii) Για τις τιμές του α που βρήκατε στο ερώτημα (γi), να προσδιορίσετε αλγεβρικά τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y=\alpha$ και να εξετάσετε αν ισχύουν τα συμπεράσματα του ερωτήματος (βii), αιτιολογώντας τον ισχυρισμό σας.

(Μονάδες 8)

(α) y'y

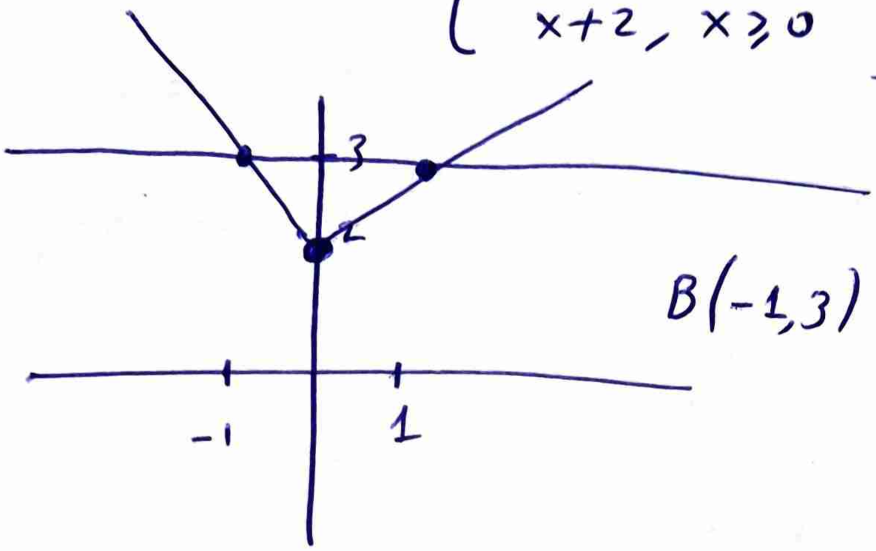
$f(0) = 0+2 = 2$

$A(0,2)$

(β) i) $f(x) = \begin{cases} -x+2, & x<0 \\ x+2, & x\geq 0 \end{cases}$

x	0	-1
y	2	3

x	0	1
y	2	3



$B(-1,3)$ $\Gamma(1,3)$

ii) Ειναι συμμετρικα ως προς τον y'y γιατι εχουν ιδια τεταγμενη και αντιθετη τετμημενη.

(γ) i) $f(x) = \alpha$

Αν $\alpha > 2$ τοτε η $f(x)$ τεμνει την $y=\alpha$ ακριβως δυο φορες.

ii).

$f(x) = \alpha$, $\alpha > 2$

$x < 0$

$-x + 2 = \alpha$

$-x = \alpha - 2$

$x = 2 - \alpha$

$M(2-\alpha, \alpha)$

$x \geq 0$

$x + 2 = \alpha$

$x = \alpha - 2$

$\Lambda(\alpha - 2, \alpha)$

Έχουν ίδια τεταγμένη και αντίθετη τετμημένη.

Άρα είναι συμμετρικά ως προς τον $y'y$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + \beta$, $g(x) = x + \beta$, όπου $x \in R$ και β σταθερός πραγματικός αριθμός. Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της $g(x)$ διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{3\beta}{2}, -3-\frac{\beta}{2}\right)$.

α) Να αποδείξτε ότι $\beta = -1$.

(Μονάδες 6)

β) Για $\beta = -1$

(i) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ με τους άξονες $x'x$, $y'y$.

(Μονάδες 5)

(ii) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της $f(x)$ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)$.

(Μονάδες 7)

(iii) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{g(x)}{f(x)} = 3$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται τα σημεία $A(\lambda, 1)$ και $B(2-\lambda^2, \mu)$, με $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

α) Αν τα σημεία A, B είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα $x'x$, να βρείτε τις τιμές των λ, μ.

(Μονάδες 7)

β) Αν επιπλέον το σημείο A βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο του ορθοκανονικού συστήματος, να βρείτε την τιμή του λ.

(Μονάδες 6)

γ) Για $\lambda = -2$ και $\mu = -1$

i. Να βρείτε την απόσταση των σημείων A ,B.

(Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου OAB, όπου O η αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=4x+2$ και $g(x)=x^2-9$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

α) βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες σε κάποιο από τα σημεία $(3, 0)$ και $(-3, 0)$.

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν κοινό σημείο πάνω σε κάποιον από τους άξονες.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε συνάρτηση h της οποίας η γραφική παράσταση είναι ευθεία, διέρχεται από το σημείο $A(0, 3)$ και τέμνει τη γραφική παράσταση της g σε ένα σημείο του ημιάξονα Ox.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{9-x^2}}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τους άξονες.

(Μονάδες 7)

γ) Αν Α και Β είναι τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες x'x και y'y αντίστοιχα, να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που ορίζεται από τα Α και Β.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2$ και $g(x)=\lambda x+(1-\lambda)$, $x\in\mathbb{R}$ και $\lambda\neq 0$, παράμετρος.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους C_f, C_g έχουν για κάθε τιμή της παραμέτρου λ ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε για ποια τιμή της παραμέτρου λ οι C_f, C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο; Ποιο είναι το σημείο αυτό;

(Μονάδες 8)

γ) Αν $\lambda\neq 2$ και x_1, x_2 είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f, C_g, να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ ώστε να ισχύει $(x_1+x_2)^2=|x_1+x_2|+2$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η εξίσωση $(\lambda^2-\lambda)x^2-(\lambda^2-1)x+\lambda-1=0$, (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ που βρήκατε στο ερώτημα (α) η (1) παίρνει τη μορφή: $\lambda x^2-(\lambda+1)x+1=0$.

(Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα (α) η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες.

(Μονάδες 7)

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2ου βαθμού.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι ανισώσεις $|x+1|\leq 2$ και $x^2-x-2>0$.

α) Να λύσετε τις ανισώσεις.

(Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x\in[-3,-1)$.

(Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι: $\rho_1-\rho_2\in(-2,2)$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Για δεδομένο $\lambda \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση f, με

$$f(x)=(\lambda+1)x^2-(\lambda+1)x+2,\ x\in\mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του λ, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$.

(Μονάδες 3)

β) Για $\lambda=-1$, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f.

(Μονάδες 4)

γ) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(2,0)$, να βρείτε την τιμή του λ και να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ και σε άλλο σημείο.

(Μονάδες 8)

δ) Για $\lambda=1$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται ολόκληρη πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται η συνάρτηση $f(x)=x^2+x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f δεν τέμνει τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

(Μονάδες 10)

γ) Έστω $M(x,y)$ σημείο της C_f. Αν για την τετμημένη x του σημείου Μ ισχύει: $|2x-1|<3$, τότε να δείξετε ότι το σημείο αυτό βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=2x+3$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Σε έναν άξονα τα σημεία Α , Β και Μ αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα.

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$ και $|x-9|$.

(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $|x-5|=|x-9|$, τότε:

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου Μ αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο Μ. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x)=x^2-4x+\alpha \text{ και } g(x)=\alpha x-5, \text{ με } \alpha\in\mathbb{R}.$$

α) Αν ισχύει $f(2)=g(2)$, να βρείτε την τιμή του α.

(Μονάδες 7)

β) Για $\alpha=1$,

i) να λύσετε την εξίσωση: $f(x)=g(x)$.

(Μονάδες 8)

ii) να λύσετε την ανίσωση: $f(x)\geq g(x)$ και, με τη βοήθεια αυτής, να λύσετε την εξίσωση: $|f(x)-g(x)|=f(x)-g(x)$.

(Μονάδες 5 + 5 = 10)