27. Ενότητα 24

$f(x) = \ln x - x$, $x > 0$

(α) $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$

x	0	1	
f'	+	0	−
f	↗		↘

$f(x) \le f(1)$

$f(x) \le -1$

(β) Αρκεί να $e^{\eta\mu x} < e^{\eta x}$ $(0, \pi)$

$\ln e^{\eta\mu x} < \ln e^{\eta x}$

$\ln e + \ln \eta\mu x < \eta x$

$1 + \ln \eta\mu x < \eta x$

$\ln \eta\mu x - \eta x < -1$

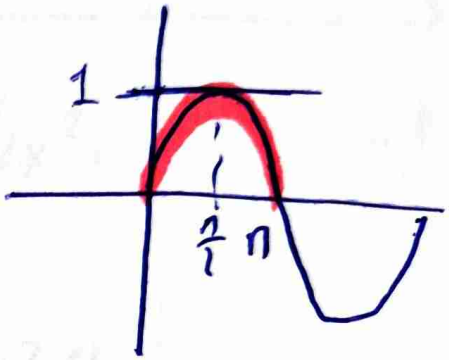
$f(\eta x) < -1$.

$f(\sin x) < f(1)$

- $\sin x \in [-1, 1] \Rightarrow \sin x \leq 1$
- $1 \leq 1$

$\forall x \leq 1 \quad \sin x \neq \emptyset$

$\sin x < 1$



$x \in (0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

$x \in (0, \pi)$

① $\ln \frac{x^2+3}{2x^2+1} = 2 - x^2$

$\ln(x^2+3) - \ln(2x^2+1) = 2 - x^2$

$f(x) = \ln x - x$

$\ln(x^2+3) - (x^2+3) = \ln(2x^2+1) - (2x^2+1)$

$f(x^2+3) = f(2x^2+1)$

- $x^2+3 > 1$
- $2x^2+1 > 1$

$\Big\} \forall x > 1$ in cui $f \downarrow \Rightarrow$ 1-1

$x^2+3 = 2x^2+1$

$2 = x^2$

$x = \pm\sqrt{2}$

Ενότητα 20

2. (α) $f(x) = x^2 + 2x + 1$.

$\Delta = [-2, 0]$

Η $f(x)$ συνεχής στο $[-2, 0]$ ως π.σ.σ.

Η $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $(-2, 0)$ ως π.π.σ.

$f(-2) = 1$

$f(0) = 1$

$\Big\} f(-2) = f(0)$ Rolle

$\exists\, \xi \in (-2, 0)$ τ.ω

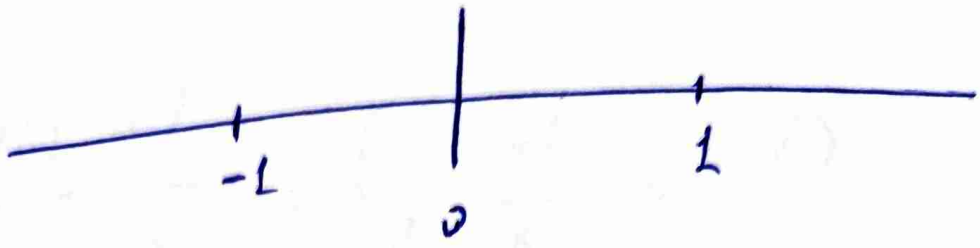
$f'(\xi) = 0$.

$f'(x) = 2x + 2$

$f'(\xi) = 2\xi + 2 = 0$

$\xi = -1$

3. ⓐ $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x^3, & x \geq 0 \end{cases}$ $\Delta = [-1, 1]$



$\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} x^2 = 0$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^3 = 0$

$\Big\}$ $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$

$f(0) = 0$

f непрерывна в 0.

И f непрерывна $[-1, 0)$ и $(0, 1]$ и п.о.о.

Да, непрерывна $[-1, 1]$.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{H(x)-H(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2-0}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{H(x)-H(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{x} = 0$$

$f'(0)=0$

H f пар/нч $(-1,0)$ и $(0,1)$
и п.п.б.

H f пар/нч $(-1,1)$.

$f(-1)=1$
$f(1)=1$
$\Big\} f(-1)=H(1)$ Rolle

$\exists \xi \in (-1,1)$ т.ч $f'(\xi)=0$

$x < 0$

$f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

$\rightarrow 2x = 0$

$x = 0$

$x \geq 0$

$f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

$\rightarrow 3x^2 = 0$

$x = 0$

$\therefore x = 0$

7. $f:[0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχ.

παρ/μη $(0,\pi)$

ⓐ Νδο $g(x) = f(x)\eta\mu x$ ικανοποιεί τα Rolle

στο $[0,\pi]$

Η $g(x)$ συνεχ $[0,\pi]$ ως π.σ.σ

Η $g(x)$ παρ/μη $(0,\pi)$ ως π.π.σ.

$$\left.\begin{array}{l} g(0) = f(0)\cdot\eta\mu 0 = 0 \\ g(\pi) = f(\pi)\,\eta\mu\pi = 0 \end{array}\right\} g(0) = g(\pi)$$

Rolle $\exists\, \xi \in (0,\pi)$

τ.ω $g'(\xi) = 0$

(B) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = -f(x)\varepsilon\varphi x$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα $(0, \eta)$.

$g(x) = f(x)\eta\mu x$

$g'(x) = f'(x)\eta\mu x + f(x)\sigma\upsilon\nu x$

$g'(\xi) = f'(\xi)\eta\mu\xi + f(\xi)\sigma\upsilon\nu\xi = 0.$

$\eta\mu\xi\, f'(\xi) = -f(\xi)\sigma\upsilon\nu\xi.$

$f'(\xi) = -f(\xi)\dfrac{\sigma\upsilon\nu\xi}{\eta\mu\xi}$

$f'(\xi) = -f(\xi)\sigma\varphi\xi.$

23. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη.

Η $f(x)$ τέμνει τον $x'x$ στα 2 και 3

$f(2)=0$
$f(3)=0$

(α) $G(x) = \dfrac{f(x)}{x-4}$ $[2,3]$

Η $G(x)$ συνεχής $[2,3]$ με π.σ.σ.

Η $G(x)$ παραγωγίσιμη $(2,3)$ με π.π.σ.

$$G(2) = \frac{f(2)}{-2} = 0$$

$$G(3) = \frac{f(3)}{-1} = 0$$

$\Big\}$ $G(2)=G(3)$

Rolle

$\exists\, \xi \in (2,3)$

τ.ω. $G'(\xi)=0$.

(B) Νδο $\exists \xi \in (2,3)$ τ.ω η εφαπτομένη

στο $B(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται

από το $A(4,0)$

$y - f(\xi) = f'(\xi)(x-\xi) \longrightarrow A(4,0)$

$0 - f(\xi) = f'(\xi)(4-\xi)$

Αρκεί νδο $\exists \xi \in (2,3)$ τ.ω

$-f(\xi) = f'(\xi)(4-\xi)$

$$g'(x) = \frac{f'(x)(x-4) - f(x)}{(x-4)^2}$$

$$G'(5) = \frac{f'(5)(5-4) - f(5)}{(5-4)^2} = 0$$

$$f'(5)(5-4) - f(5) = 0$$

$$-f(5) = -f'(5)(5-4)$$

$$\boxed{-f(5) = f'(5)(4-5)}$$

15. Δίνεται $f(x) = 3^x + x^2 - 3x - 1$

(α) $f(0) = 0$

$f(2) = 3 + 1 - 3 - 1 = 0$ } Rolle $f'(\xi) = 0$

(β) Νδο η $f(x)$ έχει το πολύ δύο ρίζες

Έστω ότι η f έχει 3 ρίζες.

$f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$

Rolle Rolle

$f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$

Rolle

$f''(\xi) = 0.$

$f'(x) = 3^x \ln 3 + 2x - 3$ Άρα έχω το πολύ 2 ρίζες

$f''(x) = 3^x \ln^2 3 + 2$

$f''(\xi) = 3^\xi \ln^2 3 + 2 = 0$ Άτοπο!

(1) $g(x) = 3^x$

$h(x) = -x^2 + 3x + 1$

$g(x) = h(x)$

$3^x = -x^2 + 3x + 1$

$3^x + x^2 - 3x - 1 = 0$

$f(x) = 0$.

$f(0) = 0$ εκω βαλ

$f(1) = 0$ ου εκω

ω αλλ

2 αρα μκο 2.

Επόμενο μάθημα

Ημερομηνία μαθήματος : Δευτέρα 2/11/26

Ώρα μαθήματος : 19:30

Ασκήσεις

Παλιά

Ενότητα 24

25

26

28

Νέα

Ενότητα 20

4

5

6

12

13

14.

παρατηρήσεις