Άσκηση 505 1

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - 4(\lambda+1)x + 8\lambda - 1 = 0$$

1. Αν η εξίσωση έχει λύση το $x_0 = \frac{1}{2}$ Να βρεθεί το λ.

Για $x = \frac{1}{2}$ έχω $\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot (\lambda+1)\frac{1}{2} + 8\lambda - 1 = 0$

$$\frac{1}{4} - 2(\lambda+1) + 8\lambda - 1 = 0$$

$$1 - 8(\lambda+1) + 32\lambda - 4 = 0$$

$$1 - 8\lambda - 8 + 32\lambda - 4 = 0$$

$$24\lambda - 11 = 0$$

$$\lambda = \frac{11}{24}$$

2. Νδο η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

$$\Delta = [-4(\lambda+1)]^2 - 4 \cdot 1 (8\lambda - 1) =$$

$$= 16(\lambda+1)^2 - 4(8\lambda-1) = 16(\lambda^2+2\lambda+1) - 32\lambda + 4$$

$$= 16\lambda^2 + 32\lambda + 16 - 32\lambda + 4$$

$$= 16\lambda^2 + 20 > 0 \quad \text{άρα έχει}$$

δύο ρίζες άνισες $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

3. Έστω ότι $\lambda = -1$. Να λυθεί η εξίσωση

Για $\lambda = -1$ έχω $x^2 - 4 \cdot (1+1)x + 8 \cdot 1 - 1 = 0$

$$x^2 - 4 \cdot 2x + 7 = 0$$

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$\Delta = 36$$

$x = 7$ $\quad$ $x = 1$

4. Έστω τώρα ότι $\lambda = 0$

και x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης.

Να υπολογίσετε τις παρακάτω

(α) $x_1 + x_2$ (β) $x_1 x_2$ (γ) $x_1^2 + x_2^2$ (δ) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$

(ε) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$ (ζ) $(x_1 - x_2)^2$ (θ) $(x_1 + x_2)^3$

Για $\lambda = 0$ έχω $x^2 - 4x - 1 = 0$

(α) $x_1 + x_2 = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{-4}{1} = 4$ $\quad x_1 + x_2 = 4$

(β) $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-1}{1} = -1$ $\quad x_1 \cdot x_2 = -1$

(γ) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4^2 - 2(-1)$

$= 18$

$x_1^2 + x_2^2 = 18$

(δ) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{4}{-1} = -4$.

(4) $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{18}{-1} = -18$

(5) $(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = 18 - 2(-1) =$

$= 20.$

(6) $(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + 3x_1^2x_2 + 3x_1x_2^2 + x_2^3 =$

$= x_1^3 + x_2^3 + 3x_1x_2(x_1^2 + x_2^2)$

$= x_1^3 + x_2^3 + 3 \cdot (-1) \cdot 18 = x_1^3 + x_2^3 - 54$

$= (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) - 54$

$= 4 \cdot (18 - (-1)) - 54$

$= 4 \cdot 19 - 54 = 76 - 54 = 22$

5. Νδο η παράσταση

$A = (x_1-2)(x_2-2)$ είναι σταθερή.

$$x^2 - 4(\lambda+1)x + 8\lambda - 1 = 0$$

$$S = x_1 + x_2 = 4(\lambda+1) \qquad P = x_1 x_2 = 8\lambda - 1$$

$$A = x_1x_2 - 2x_1 - 2x_2 + 4$$

$$A = 8\lambda - 1 - 2(x_1 + x_2) + 4$$

$$A = 8\lambda - 1 - 2(4(\lambda+1)) + 4$$

$$A = 8\lambda - 1 - 8(\lambda+1) + 4$$

$$A = 8\lambda - 1 - 8\lambda - 8 + 4$$

$$A = -5$$

6. Να βρεθεί το λ ώστε

$$x_1^2 x_2 + x_1 + x_1 x_2^2 + x_2 = 64$$

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 + x_1 + x_2 = 64$$

$$x_1 x_2 (x_1 + x_2) + x_1 + x_2 = 64$$

$$(8\lambda - 1)(4(\lambda+1)) + 4(\lambda+1) = 64$$

$$4(8\lambda - 1)(\lambda+1) + 4\lambda + 4 = 64$$

$$4(8\lambda^2 + 8\lambda - \lambda - 1) + 4\lambda + 4 = 64$$

$$4(8\lambda^2 + 7\lambda - 1) + 4\lambda + 4 = 64$$

$$32\lambda^2 + 28\lambda - 4 + 4\lambda + 4 = 64$$

$$32\lambda^2 + 32\lambda - 64 = 0$$

$\lambda = -2$

$\lambda = 1$

7. Έστω $\lambda=0$ και x_1, x_2 ρίζες

Να κατασκευαστεί εξίσωση 2ου

βαθμού με ρίζες $2x_1-3$ και $2x_2-3$

Για $\lambda=0$ $\quad x^2-4x-1$

$x_1+x_2=4$

$x_1 \cdot x_2=-1$

Η εξίσωση που ψάχνω είναι

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$S = 2x_1-3+2x_2-3 = 2(x_1+x_2)-6$

$= 2 \cdot 4 - 6 = 2$

$P = (2x_1-3)(2x_2-3) = 4x_1x_2 - 6x_1 - 6x_2 + 9$

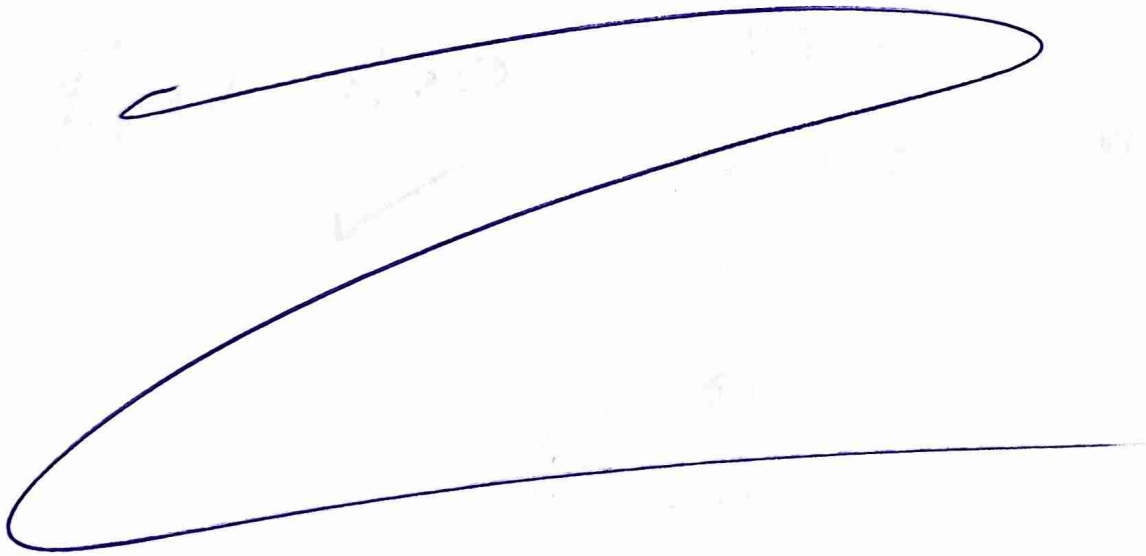
$= 4 \cdot (-1) - 6(x_1+x_2) + 9 =$

$= -4 - 6 \cdot 4 + 9 = -19$

Δρα η εξίσωση που

ψάχνω

$$x^2 - 2x - 19 = 0$$



8. Να βρεθούν τα λ ώστε η εξίσωση να έχει 2 ρίζες

(α) ομόσημες.

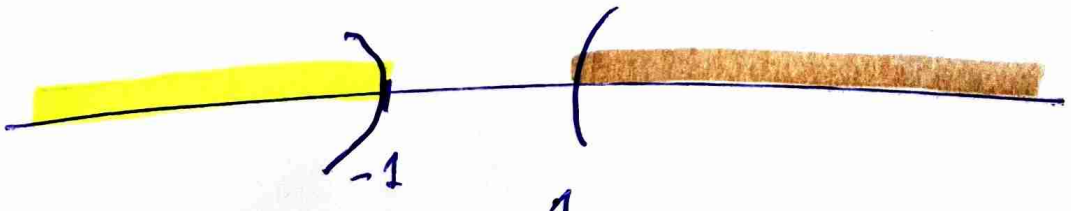
$$x^2 - 4(\lambda+1)x + 8\lambda - 1 = 0$$

$$S = 4(\lambda+1)$$

$$P = 8\lambda - 1$$

Πρέπει $\Delta > 0$ ✓

$P > 0$	$S < 0$
$8\lambda - 1 > 0$	$4(\lambda+1) < 0$
$8\lambda > 1$	$\lambda + 1 < 0$
$\lambda > \frac{1}{8}$	$\lambda < -1$



Δεν υπάρχουν κοινά λύσεις.

(B) Αντίστροφη.

$$P = 1$$

$$8\lambda - 1 = 1$$

$$8\lambda = 2$$

$$\lambda = \frac{1}{4}$$

Κοινές λύσεις ανισώσεων

$$\begin{cases} x^2 \le 4 \\ x^2 > x \end{cases}$$

$x^2 \le 4$

$x^2 - 4 \le 0$

x	-2		2	
x^2-4	$+$	0	$-$	0 $+$

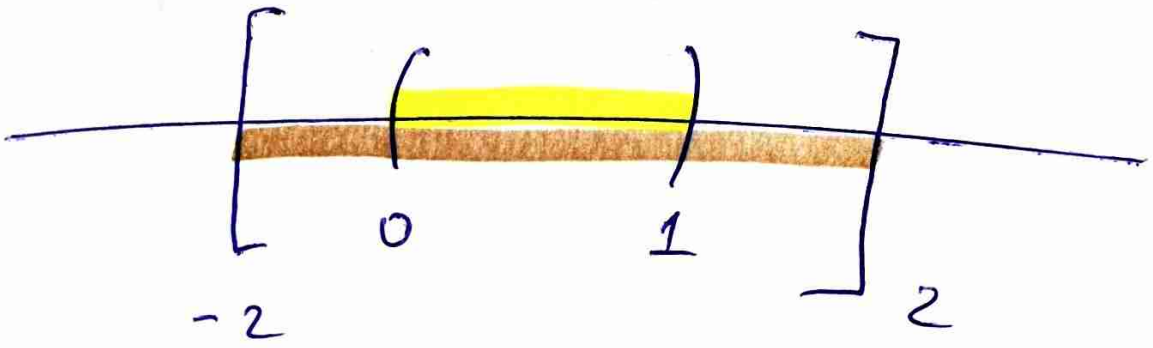
$x \in [-2, 2]$

$x^2 > x$

$x^2 - x > 0$

x		0		1	
x^2-x	$+$		$-$		$+$

$x \in (0, 1)$



Κοινό σύνολο: $(0, 1)$.

Ενότητα 19

1. (α)

x	$-\frac{2}{5}$		1
$5x^2-3x-2$	$+$ 0	$-$ 0	$+$

(ε)

x	0	3
x^2-3x	$+$ 0 $-$	0 $+$

2. (α)

x	$\frac{1}{2}$	
$4x^2-4x+1$	$+$	$+$

(γ)

x	
x^2+x+2	$+$

(ε) x^2+3

x	
x^2+3	$+$

4. (a)

x	
x^2-x+1	$+$

$x \in \mathbb{R}$.

(b) $3x^2 > 2x - 1$

$3x^2 - 2x + 1 > 0$

x	
$3x^2-2x+1$	$+$

$x \in \mathbb{R}$.

3. (α)

x		2		3	
x^2-5x+6	+	0	−	0	+

$x \in (-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$

(β) $x - 5x^2 \geq -4$

$-5x^2 + x + 4 \geq 0$

x		$-4/5$		1	
$-5x^2+1x+4$	−	0	+	0	−

$x \in [-\frac{4}{5}, 1]$

(γ) $x(1-2x) > -1$

$x - 2x^2 + 1 > 0$

$-2x^2 + x + 1 > 0$

x		$-\frac{1}{2}$		1	
$-2x^2+x+1$	−	0	+	0	−

$x \in (-\frac{1}{2}, 1)$.

(δ) $\frac{x-1}{5} < \frac{x^2-1}{2}$

$2(x-1) < 5x^2 - 5$

$-5x^2 + 2x + 3 < 0$

x		$-\frac{3}{5}$		1	
$-5x^2+2x+3$	−	0	+	0	−

$x \in (-\infty, -\frac{3}{5}) \cup (1, +\infty)$

6. ⓐ $x^2-6x+9 \geq 0$

x		3	
x^2-6x+9	$+$	0	$+$

$x \in R$

ⓑ $6x-1 \geq 9x^2$

$-9x^2+6x-1 \geq 0$

$9x^2-6x+1 \leq 0$

x		$1/3$	
$9x^2-6x+1$	$+$	0	$+$

$x = \frac{1}{3}$

5. (a) $x^2-3x+2<0$

x		1		2	
x^2-3x+2	$+$		$-$		$+$

$x \in (1,2)$

(B) $x^2-x-2>0$

x		-1		2	
x^2-x-2	$+$		$-$		$+$

$x \in (-\infty,-1) \cup (2,+\infty)$

(γ) $-x^2 < x-6$

$-x^2-x+6<0$

$x^2+x-6>0$

x		-3		2	
x^2+x-6	$+$		$-$		$+$

$x \in (-\infty,-3) \cup (2,+\infty)$.

4. (a) $x^2 < x$

$x^2 - x < 0$

$x(x-1) < 0$

0 1

x		0		1	
x^2-x	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$

$x \in (0,1)$

(B) $\frac{3x}{2} \leq x^2$

$3x \leq 2x^2$

$-2x^2 + 3x \leq 0$

$x(-2x+3) \leq 0$

x		0		$\frac{3}{2}$	
$-2x^2+3x$	$-$	0	$+$	0	$-$

$x \in (-\infty, 0] \cup [\frac{3}{2}, +\infty)$.

(δ) $x^2 < 1$

$x^2 - 1 < 0$

$(x-1)(x+1) < 0$

x		-1		1	
x^2-1	$+$	$\|$	$-$	$\|$	$+$

$x \in (-1,1)$.

Άσκηση 2

Να λυθούν οι παρακάτω εξισώσεις.

1. $\lambda(2x+1) - 4(1+\lambda x) = \lambda^2(x-1) + \lambda$

$2\lambda x + \lambda - 4 - 4\lambda x = \lambda^2 x - \lambda^2 + \lambda$

$2\lambda x - 4\lambda x - \lambda^2 x = -\lambda + 4 - \lambda^2 + \lambda$

$(2\lambda - 4\lambda - \lambda^2)\, x = 4 - \lambda^2$

$(-2\lambda - \lambda^2)\, x = 4 - \lambda^2$

$$\lambda(-2-\lambda)\, x = (2-\lambda)(2+\lambda)$$

1. Αν $\lambda = 0$ τότε $0x = 4$ Αδύνατη
2. Αν $\lambda = -2$ τότε $0x = 0$ Αόριστη
3. Αν $\lambda \neq 0, -2$ τότε $x = \dfrac{(2-\lambda)(2+\lambda)}{\lambda(-2-\lambda)} = \dfrac{(2-\lambda)(2+\lambda)}{-\lambda(\lambda+2)}$

2. $\frac{4}{x+2} - \frac{3x}{2-x} = \frac{3x^2-8}{x^2-4}$

$$\frac{4}{x+2} + \frac{3x}{x-2} = \frac{3x^2-8}{(x-2)(x+2)}$$

- $x+2=0 \Rightarrow \underline{x=-2}$
- $x-2=0 \rightarrow \underline{x=2}$
- $(x-2)(x+2)=0 \rightarrow x-2=0$ ή $x+2=0$

$\underline{x=2}$ $\underline{x=-2}$

Άρα $x \neq 2$ $x \neq -2$

Ελπίς $(x-2)(x+2)$

$$(x-2)(x+2)\frac{4}{x+2} + (x-2)(x+2)\frac{3x}{x-2} = (x-2)(x+2)\frac{3x^2-8}{(x-2)(x+2)}$$

$$4(x-2) + 3x(x+2) = 3x^2-8$$

$$4x-8+3x^2+6x = 3x^2-8$$

$$10x = 0$$

$$\boxed{x=0}$$

3. $||x+1|-2|=3$

$|x+1|-2=3$ и $|x+1|-2=-3$

$|x+1|=5$ $|x+1|=-1$

Ответ.

$x+1=5$ и $x+1=-5$

$x=4$ $x=-6$

4. $||x+1|-2x|=4$

$|x+1|-2x=4$ и $|x+1|-2x=-4$

$|x+1|=2x+4$ $|x+1|=2x-4$

$2x+4\geq 0$ $2x-4\geq 0$

$x+1=2x+4$ и $x+1=-2x-4$ $x+1=2x-4$ и $x+1=-2x+4$

$-3=x$ $3x=-5$ $5=x$ $3x=3$

$x=-\frac{5}{3}$ ✓ $x=1$

5. $\left| |x+1| - 2x \right| = |1-2x|$

$|x+1| - 2x = 1-2x$ ili $|x+1| - 2x = -1+2x$

$|x+1| = 1$

$x+1=1$ ili $x+1=-1$

$x=0$ $x=-2$

$|x+1| = 4x-1$

$4x-1 \geq 0$

$x+1 = 4x-1$ ili $x+1 = -4x+1$

$-3x = -2$ $5x = 0$

$x = \frac{2}{3}$ ✓ $x=0$

6. $x^2(x-4)^2 + 2(4x - x^2) - 15 = 0$

$x^2(x-4)^2 + 2x(4-x) - 15 = 0$

$x^2(x-4)^2 - 2x(x-4) - 15 = 0$

$[x(x-4)]^2 - 2x(x-4) - 15 = 0$

Θέτω $x(x-4) = \omega$

$\omega^2 - 2 \cdot \omega - 15 = 0$

$\omega = 5$

$x(x-4) = 5$

$x^2 - 4x - 5 = 0$

$x = 5$ $x = -1$

$\omega = -3$

$x(x-4) = -3$

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$x = 1$ $x = 3$

7. $\left(x-\frac{2}{x}\right)^2-\frac{5x^2-10}{x}+4=0.$

$$\left(x-\frac{2}{x}\right)^2-5\,\frac{x^2-2}{x}+4=0$$

$$\left(x-\frac{2}{x}\right)^2-5\left(\frac{x^2}{x}-\frac{2}{x}\right)+4=0$$

$$\left(x-\frac{2}{x}\right)^2-5\left(x-\frac{2}{x}\right)+4=0$$

$$x-\frac{2}{x}=t$$

$$t^2-5t+4=0$$

$t=4$ $\qquad$ $t=1$

$x-\frac{2}{x}=4$ $\qquad$ $x-\frac{2}{x}=1$

$x^2-2=4x$ $\qquad$ $x^2-x-2=0$

$x^2-4x-2=0$ $\qquad$ $\Delta=20$ $\qquad$ $x=2$ $\qquad$ $x=-1$

$x=\frac{4\pm\sqrt{20}}{2}$

Εποραο Μαθημα

19	15
9	17
10.	18
	19
	10
	22 α