Προετοιμασια

για

το διαγωνισμα

8/3/26

Z

Θεωρια

1. Εστω εξισωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$

Νδο $x_1+x_2=-\frac{\beta}{\alpha}$ και $x_1x_2=\frac{\gamma}{\alpha}$

Αποδειξη

$$x_1+x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}+\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{-2\beta}{2\alpha}=-\frac{\beta}{\alpha}$$

$$x_1x_2=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}\cdot\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{\beta^2-\sqrt{\Delta}^2}{4\alpha^2}=\frac{\beta^2-\Delta}{4\alpha^2}=$$

$$=\frac{\beta^2-(\beta^2-4\alpha\gamma)}{4\alpha^2}=\frac{4\alpha\gamma}{4\alpha^2}=\frac{\gamma}{\alpha}$$

2. Νδο η εξισωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0, \alpha\neq 0$ γραφεται στη μορφη $x^2-Sx+P=0$

Αποδειξη

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0 \Rightarrow x^2+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}=0$$

$$x^2-\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)x+\frac{\gamma}{\alpha}=0 \Rightarrow x^2-Sx+P=0.$$

Ασκηση 1

Να λυθει η εξισωση

$$\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{x-4}{x^2+2x}$$

$$\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{x-4}{x(x+2)}$$

- $x+2=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=-2}}$
- $\underline{\underline{x=0}}$
- $x(x+2)=0 \Rightarrow \underline{\underline{x=0}}$ η $x+2=0$, $\underline{\underline{x=-2}}$

Πρεπει $x \neq 0, -2$

$$x\cancel{(x+2)}\frac{3}{\cancel{x+2}} - \cancel{x}(x+2)\frac{2}{\cancel{x}} = \cancel{x(x+2)}\frac{x-4}{\cancel{x(x+2)}}$$

$$3x - 2(x+2) = x-4$$

$$x-4 = x-4$$

$$0=0$$

Αοριστη

$x \in \mathbb{R} - \{0,-2\}$

Ασκηση 2

Να λυθει η εξισωση

$$3(x+3) - \lambda^2(1-x) = -3x(\lambda-1)$$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\cancel{3x} + 9 - \lambda^2 + x\lambda^2 = -3x\lambda + \cancel{3x}$$

$$x\lambda^2 + 3x\lambda = \lambda^2 - 9$$

$$(\lambda^2 + 3\lambda)x = (\lambda-3)(\lambda+3)$$

$$\boxed{\lambda(\lambda+3)x = (\lambda-3)(\lambda+3)}$$

1. Αν $\lambda = 0$ τοτε $0x = -9$ Αδυνατη
2. Αν $\lambda = -3$ τοτε $0x = 0$ Αοριστη
3. Αν $\lambda \neq 0, -3$ τοτε $x = \dfrac{(\lambda-3)\cancel{(\lambda+3)}}{\lambda\cancel{(\lambda+3)}}$

Ασκηση 1

Να βρεί το $\lambda \in \mathbb{R}$ ωστε η εξισωση $x^2 + (\lambda - 3)x + 6 - \lambda = 0$ να εχει δυο πραγματικες και ανισες ριζες.

Απαιτω $\Delta > 0$

$$\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$$

$$(\lambda-3)^2 - 4(6-\lambda) > 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 - 24 + 4\lambda > 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 15 > 0$$

λ	$-\infty$	-3		5	$+\infty$
$\lambda^2 - 2\lambda - 15$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\lambda \in (-\infty, -3) \cup (5, +\infty).$$

Ασκηση 2

Να βρει το λ ωστε η εξισωση

$$-x^2+(\lambda+5)x-3\lambda-7=0$$

να ειναι αδυνατη.

$$\Delta<0$$

$$\beta^2-4\alpha\gamma<0$$

$$(\lambda+5)^2-4(-1)(-3\lambda-7)<0$$

$$\lambda^2+10\lambda+25+4(-3\lambda-7)<0$$

$$\lambda^2+10\lambda+25-12\lambda-28<0$$

$$\lambda^2-2\lambda-3<0$$

λ		-1		3	
$\lambda^2-2\lambda-3$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\lambda\in(-1,3)$$

Ασκηση 3

Να βρω το λ ωστε η εξισωση

$$-2x^2+3x+2\lambda^2-5\lambda-12=0$$

να εχει ετεροσημες ριζες,

Απαιτω $P<0$

$$\frac{\gamma}{\alpha}<0$$

$$\frac{2\lambda^2-5\lambda-12}{-2}<0$$

$$2\lambda^2-5\lambda-12>0$$

$\Delta=25+8\cdot 12$

$\Delta=25+96$

$\Delta=121$

$$\lambda=\frac{5\pm 11}{4}\begin{cases}4\\ -\frac{3}{2}\end{cases}$$

λ		$-\frac{3}{2}$		4	
$2\lambda^2-5\lambda-12$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\lambda\in(-\infty,-\tfrac{3}{2})\cup(4,+\infty).$$

Ασκηση 4

Να βρω το λ ωστε η εξισωση

$$x^2 - (\lambda-3)x + 3 - 2\lambda = 0$$

να εχει δυο αρνητικες και ανισες ριζες.

$\Delta > 0$

$\beta^2 - 4\alpha\gamma > 0$

$(\lambda-3)^2 - 4(3-2\lambda) > 0$

$\lambda^2 - 6\lambda + 9 - 12 + 8\lambda > 0$

$\lambda^2 + 2\lambda - 3 > 0$

λ		-3		1	
$\lambda^2+2\lambda-3$	$+$	0	$-$	0	$+$

$\lambda \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$

$P > 0$

$\frac{\gamma}{\alpha} > 0$

$\frac{3-2\lambda}{1} > 0$

$3 - 2\lambda > 0$

$3 > 2\lambda$

$\frac{3}{2} > \lambda$

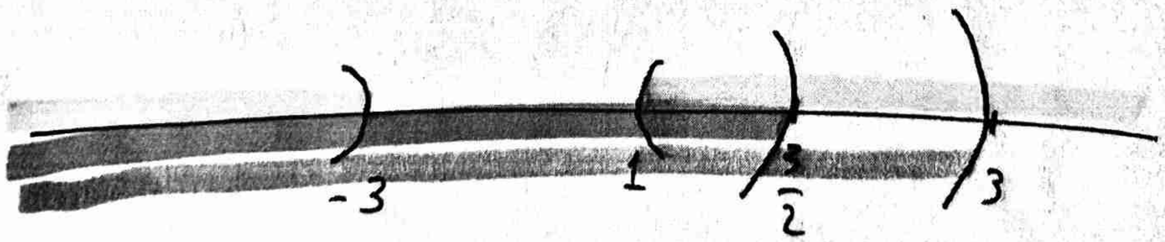
$S < 0$

$-\frac{\beta}{\alpha} < 0$

$-\frac{-(\lambda-3)}{1} < 0$

$\lambda - 3 < 0$

$\lambda < 3$



$x \in (-\infty, -3) \cup (1, \frac{3}{2})$.

Ασκηση 5

Να βρω το λ ώστε το τριώνυμο

$$(\lambda-7)x^2 + (\lambda-4)x - 1$$

να διατηρεί σταθερό πρόσημο.

$\Delta < 0$ και $\alpha \neq 0$

$\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$

$\lambda - 7 \neq 0$

$\lambda \neq 7$

$(\lambda-4)^2 - 4(\lambda-7)(-1) < 0$

$\lambda^2 - 8\lambda + 16 + 4(\lambda-7) < 0$

$\lambda^2 - 8\lambda + 16 + 4\lambda - 28 < 0$

$\lambda^2 - 4\lambda - 12 < 0$

λ		-2		6	
$\lambda^2-4\lambda-12$	$+$		$-$		$+$

$\lambda \in (-2, 6)$

Ασκηση 6

Να βρω το λ ωστε το τριωνυμο $\lambda x^2 + (\lambda - 3)x + \lambda$ να ειναι αρνητικο

$\Delta < 0$ και $\lambda < 0$

$\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$

$(\lambda-3)^2 - 4\cdot\lambda\cdot\lambda < 0$

$(\lambda-3)^2 - 4\lambda^2 < 0$

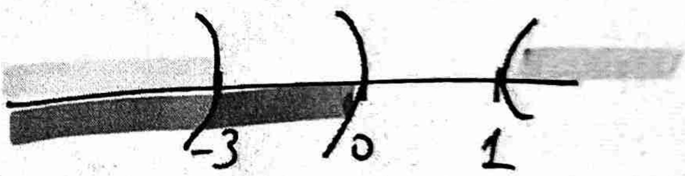
$\lambda^2 - 6\lambda + 9 - 4\lambda^2 < 0$

$-3\lambda^2 - 6\lambda + 9 < 0$

$-\lambda^2 - 2\lambda + 3 < 0$

λ		-3		1	
$-\lambda^2-2\lambda+3$	$-$		$+$		$-$

$\lambda \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$



$\lambda \in (-\infty, -3)$.

Ασκηση 7

Να βρει τα λ ωστε η ανισωση $4x^2+4(2\lambda-1)x+4-3\lambda \geq 0$ να αληθευει.

Δηλαδη να ειναι θετικο

$\Delta \leq 0$ και $\alpha > 0$, $4 > 0$ ✓

$\beta^2 - 4\alpha\gamma \leq 0$

$[4(2\lambda-1)]^2 - 4 \cdot 4 \cdot (4-3\lambda) \leq 0$

$16(2\lambda-1)^2 - 16(4-3\lambda) \leq 0$

$4\lambda^2 - 4\lambda + 1 - 4 + 3\lambda \leq 0$

$4\lambda^2 - \lambda - 3 \leq 0$

$\Delta = 1 + 48 = 49$

$\lambda = \frac{1 \pm 7}{8}$ → 1, $-\frac{3}{4}$

λ		$-\frac{3}{4}$		1	
$4\lambda^2-\lambda-3$	$+$		$-$		$+$

$\lambda \in [-\frac{3}{4}, 1]$.

Ασκηση 8

Νδο η εξισωση $x^2-(3\lambda-1)x+\lambda^2-1=0$

εχει πραγματικες ριζες.

$$\Delta = B^2-4a\gamma = (3\lambda-1)^2-4(\lambda^2-1)$$

$$\Delta = 9\lambda^2-6\lambda+1 \;-4\lambda^2+4$$

$$\Delta = 5\lambda^2-6\lambda+5.$$

$$\Delta^* = (-6)^2-4\cdot5\cdot5$$

$$\Delta^* = 36-100$$

$$\Delta^* = -64<0$$

Αφου η $\Delta^*<0$ το τριωνυμο $5\lambda^2-6\lambda+5$ διατηρει σταθερο προσημο ομοσημο του α δηλαδη θετικο αρα $\Delta>0$ ✓

Ασκηση 9

Νδο η εξισωση $x^2+(\lambda-1)x+\lambda^2-\lambda+1=0$

ειναι αδυνατη.

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (\lambda-1)^2 - 4(\lambda^2-\lambda+1)$$

$$\Delta = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 4$$

$$\Delta = -3\lambda^2 + 2\lambda - 3$$

$$\Delta^* = 2^2 - 4(-3)(-3)$$

$$\Delta^* = 4 - 36 = -32$$

$$\Delta^* = -32$$

Αρα $\Delta^* < 0$ το τριωνυμο $-3\lambda^2+2\lambda-3$ διατηρει σταθερο προσημο ομοσημο του α αρα αρνητικο δηλαδη $\Delta<0$ αρα η εξισωση αδυνατη

Άσκηση 10

Δίνεται η εξίσωση $x^2+(\lambda+3)x+\lambda+6=0$

(α) Να βρεις τα λ ώστε η εξίσωση να έχει πραγματικές ρίζες.

(β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες βρες λ ώστε $x_1^2+x_2^2<42$

Λύση

(α) $\Delta \geq 0 \Rightarrow \beta^2-4\alpha\gamma \geq 0 \Rightarrow (\lambda+3)^2-4(\lambda+6)\geq 0$

$\lambda^2+6\lambda+9-4\lambda-24\geq 0 \Rightarrow \lambda^2+2\lambda-15\geq 0$

λ		-5		3	
$\lambda^2+2\lambda-15$	+		−		+

$\lambda \in (-\infty,-5]\cup[3,+\infty)$

(β) $x_1^2+x_2^2<42$

$x_1+x_2=-(\lambda+3)$

$x_1x_2=\lambda+6$

$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2<42$

$(-(\lambda+3))^2-2(\lambda+6)<42$

$\lambda^2+6\lambda+9-2\lambda-12-42<0$

$\lambda^2+4\lambda-3-42<0$

$\lambda^2+4\lambda-45<0$

λ		-9		5	
$\lambda^2+4\lambda-45$	+		−		+

$\lambda\in(-9,5)$.

Παραγοντοποίηση τριωνύμου

1. $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$

$\Delta>0$

$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

$$x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

2. $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)^2$

$\Delta=0$

$$x_1=\frac{-\beta}{2\alpha}$$

3. $\alpha x^2+\beta x+\gamma=$ $-$

$\Delta<0$ δεν παραγοντοποιείται

Άσκηση 11

Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις

$$\frac{2x^2+x-6}{4x^2-12x+9} = \frac{2(x-\frac{3}{2})(x+2)}{4\cdot(x-\frac{3}{2})^2} = \frac{(\cancel{2x-3})(x+2)}{(2x-3)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{x+2}{2x-3}$$

$\Delta = 144 - 4\cdot 4\cdot 9$

$\Delta = 144 - 144$

$\Delta = 0$

$\Delta = 1^2 - 4\cdot 2\cdot(-6)$

$\Delta = 1+48$

$\Delta = 49$

$x_{1,2} = \frac{-1\pm 7}{4}$ $\frac{3}{2}$, -2

$x_1 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$

Επεξήγηση

$$4(x-\frac{3}{2})^2 = 4(x-\frac{3}{2})(x-\frac{3}{2}) = (2x-3)(2x-3) = (2x-3)^2$$

Ασκηση 12

Να λυθει η ανισωση

$$x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0$$

$\boxed{\text{Θετω } x^2 = t}$

$$t^2 - 5t + 4 \leq 0$$

t		1		4	
t^2-5t+4	+		−		+

$$t \in [1,4]$$

$$1 \leq t \leq 4$$

$$1 \leq x^2 \leq 4$$

$x^2 \geq 1$ και $x^2 \leq 4$

$x^2 - 1 \geq 0$

x		−1		1	
x^2-1	+		−		+

$x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

$x^2 - 4 \leq 0$

x		−2		2	
x^2-4	+		−		+

$x \in [-2, 2]$

$x \in [-2,-1] \cup [1,2]$

Ασκηση 13

Να λυθει η ανισωση

$(x^2+2x)^2+24 \geq 11x^2+22x$

$(x^2+2x)^2+24 \geq 11(x^2+2x)$

$x^2+2x=\omega$

$\omega^2+24 \geq 11\omega$

$\omega^2-11\omega+24 \geq 0$

ω		3		8	
$\omega^2-11\omega+24$	+		−		+

$\omega \in (-\infty,3] \cup [8,+\infty)$

$\omega \leq 3$ ή $\omega \geq 8$

$x^2+2x \leq 3$

$x^2+2x-3 \leq 0$

x		−3			
x^2+2x-3	+		−		+

$x \in [-3,1]$

$x^2+2x \geq 8$

$x^2+2x-8 \geq 0$

x		−4		2	
x^2+2x-8	+		−		+

$x \in (-\infty,-4] \cup [2,+\infty)$

1. Βρει τα λ ωστε η εξισωση $(\lambda-1)x^2-2\lambda x+3\lambda-2=0$ να εχει δυο ριζες πραγματικες και ανισες.

2. Να βρειτε το λ ωστε η εξισωση $-4x^2+(\lambda+3)x-\lambda=0$ να ειναι αδυνατη.

3. Να βρειτε το λ ωστε η εξισωση $x^2+(\lambda+5)x-\lambda^2+2\lambda+8=0$ να εχει δυο διαφορετικες ριζες ομοσημες.

4. Να βρειτε το λ ωστε η εξισωση $x^2+(\lambda-3)x+\lambda=0$ να εχει δυο ριζες ανισες.

5. Να βρειτε το λ ωστε το τριωνυμο $(\lambda+5)x^2+(\lambda+2)x+1$, να διατηρει σταθερο προσημο.

6. Να βρειτε το λ ωστε το τριωνυμο $(\lambda-1)x^2+4x+\lambda+2$ να ειναι θετικο.

7. Να βρειτε το λ ωστε η ανισωση $-x^2+(\lambda-5)x+\lambda-8 \leq 0$ να αληθευει.

8. Ναδο η εξισωση $x^2-\lambda x+\lambda-3=0$ εχει δυο πραγματικες και ανισες ρίζες

9. Ναδο $27-(x+2)^2 > -2(x-3)(x+3)$

10. Να παραγοντοποιηθουν τα τριωνυμα

ⓐ $2x^2-x-1$ Ⓑ $4x^2-4x+1$

ⓖ x^2-x+7