Εργασία 10

**9.** ⓐ $x = 3\eta\mu\theta$

$y = 2\sigma\upsilon\nu\theta$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

$$\frac{[3\eta\mu\theta]^2}{9} + \frac{(2\sigma\upsilon\nu\theta)^2}{4} = 1$$

$$\frac{9\eta\mu^2\theta}{9} + \frac{4\sigma\upsilon\nu^2\theta}{4} = 1$$

$$\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$$

$$1 = 1$$

(B) $x = 2 \sin\vartheta \cos\varphi$

$y = 2 \sin\vartheta \sin\varphi$

$z = 2 \cos\vartheta$

$x^2 + y^2 + z^2 = 4$

$[2 \sin\vartheta \cos\varphi]^2 + [2 \sin\vartheta \sin\varphi]^2 + (2\cos\vartheta)^2 = 4$

$4 \sin^2\vartheta \cos^2\varphi + 4 \sin^2\vartheta \sin^2\varphi + 4 \cos^2\vartheta = 4$

$4 \sin^2\vartheta (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + 4 \cos^2\vartheta = 4$

$1$

$4 \sin^2\vartheta + 4 \cos^2\vartheta = 4$

$4 (\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta) = 4$

$4 \cdot 1 = 4$ ✓

**12.** ⓐ $\dfrac{\cos^3 x - \cos x}{\sin^3 x - \sin x} = \operatorname{ctg} x$

$$\frac{\cos x\,(\cos^2 x - 1)}{\sin x\,(\sin^2 x - 1)} = \operatorname{ctg} x$$

$$\frac{-\cos x\,(1 - \cos^2 x)}{-\sin x\,(1 - \sin^2 x)} = \operatorname{ctg} x$$

$$\frac{\cos x \cdot \sin^2 x}{\sin x \cdot \cos^2 x} = \operatorname{ctg} x$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{ctg} x$$

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x.$$

12. (B) $\dfrac{n\mu^4 x - n\mu^2 x}{\sigma w^4 x - \sigma w^2 x} = 1$

$$\frac{n\mu^2 x(n\mu^2 x - 1)}{\sigma w^2 x(\sigma w^2 x - 1)} = 1$$

$$\frac{-n\mu^2 x(1 - n\mu^2 x)}{-\sigma w^2 x(1 - \sigma w^2 x)} = 1$$

$$\frac{n\mu^2 x \cdot \sigma w^2 x}{\sigma w^2 x \; n\mu^2 x} = 1$$

$$1 = 1$$

12. (8) $\dfrac{\sigma w^2\alpha - \sigma w^2\beta}{\mu\nu^2\alpha - \mu\nu^2\beta} = -1$

$$\sigma w^2\alpha - \sigma w^2\beta = -(\mu\nu^2\alpha - \mu\nu^2\beta)$$

$$\sigma w^2\alpha - \sigma w^2\beta = -\mu\nu^2\alpha + \mu\nu^2\beta$$

$$\sigma w^2\alpha + \mu\nu^2\alpha = \mu\nu^2\beta + \sigma w^2\beta$$

$$1 = 1.$$

**15.** $\dfrac{\sin^3 x - \sin x + \cos x}{\sin x} = \operatorname{ctg} x - \cos^2 x$

$$\frac{\sin^3 x - \sin x + \cos x}{\sin x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \cos^2 x$$

$$\sin^3 x - \sin x + \cancel{\cos x} = \cancel{\cos x} - \cos^2 x \sin x$$

$$\sin x(\sin^2 x - 1) = -\cos^2 x \sin x$$

$$-\sin x(1 - \sin^2 x) = -\cos^2 x \sin x$$

$$-\cancel{\sin x}\cos^2 x = -\cos^2 x \cancel{\sin x}$$

$$0 = 0.$$

21. (a) $\sigma w^2 a\left(1+\epsilon y^2 a\right)+\eta \mu^2 a\left(1+\sigma y^2 a\right)=2$

$$\sigma w^2 a\left(1+\frac{\eta \mu^2 a}{\sigma w^2 a}\right)+\eta \mu^2 a\left(1+\frac{\sigma w^2 a}{\eta \mu^2 a}\right)=2$$

$$\sigma w^2 a+\sigma w^2 a \frac{\eta \mu^2 a}{\sigma w^2 a}+\eta \mu^2 a+\eta \mu^2 a \frac{\sigma w^2 a}{\eta \mu^2 a}=2$$

$$\sigma w^2 a+\eta \mu^2 a+\eta \mu^2 a+\sigma w^2 a=2$$

$$1+1=2$$

$$2=2 \quad \checkmark$$

21. (B) $\frac{\sin^3 x}{\cos x} + \frac{\tan x}{1+\tan^2 x} = \tan x$

$$\frac{\sin^3 x}{\cos x} + \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{1+\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{\sin^3 y}{\cos x} + \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\frac{\sin^3 y}{\cancel{\cos x}} + \frac{\cos x\left(\sin y/x\right)}{\cancel{\cos x}} = \frac{\sin y}{\cancel{\cos x}}$$

$$\sin^3 x + \cos^2 x \sin x = \sin y$$

$$\sin x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) = \sin x$$

$$\sin x = \sin x.$$

**22.** (a) $4\sin x - 3\cos x = 5$ $\Rightarrow 4\sin x = 5 + 3\cos x$

$$\sin x = \frac{5+3\cos x}{4}$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\left[\frac{5+3\cos x}{4}\right]^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\frac{[5+3\cos x]^2}{16} + \cos^2 x = 1$$

$$25 + 30\cos x + 9\cos^2 x + 16\cos^2 x = 16$$

$$25\cos^2 x + 30\cos x + 9 = 0$$

$$(5\cos x + 3)^2 = 0$$

$$5\cos x + 3 = 0$$

$$\cos x = -\frac{3}{5}$$

Γνωρίζω ότι $\boxed{\sigma\upsilon\nu x = -\frac{3}{5}}$

όμως ισχύει ότι $\eta\mu x = \frac{5+3\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)}{4}$

$$\eta\mu x = \frac{5-\frac{9}{5}}{4} = \frac{25-9}{20} = \frac{16}{20}$$

$$\boxed{\eta\mu x = \frac{4}{5}}$$

$$\varepsilon\varphi x = \frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}$$

$$\sigma\varphi x = -\frac{3}{4}$$

23. (B) $\varepsilon\varphi\omega = \frac{2k}{k+5}$

$\sigma\varphi\omega = \frac{4k}{5-k}$

$\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1$

$\frac{2k}{k+5} \cdot \frac{4k}{5-k} = 1$

$\frac{8k^2}{(k+5)(5-k)} = 1$

$8k^2 = (k+5)(5-k)$

$8k^2 = 5^2 - k^2$

$9k^2 = 25$

$(3k)^2 = 5^2$

$3k = 5$ ή $3k = -5$

$k = \frac{5}{3}$ $k = -\frac{5}{3}$

**23.** (a) $\cos w = \frac{k-3}{k+3}$ $\sin w = \frac{3k}{k+3}$.

$\cos^2 w + \sin^2 w = 1$

$\left(\frac{k-3}{k+3}\right)^2 + \left(\frac{3k}{k+3}\right)^2 = 1$

$\frac{(k-3)^2}{(k+3)^2} + \frac{(3k)^2}{(k+3)^2} = 1$

$(k-3)^2 + (3k)^2 = (k+3)^2$

$k^2 - 6k + 9 + 9k^2 = k^2 + 6k + 9$

$9k^2 - 12k = 0$

$3k(3k-4) = 0$

$k = 0$ $\quad k = \frac{4}{3}$.

# ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

## ΓΙΑ ΤΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ 8/11

ΑΛΓΕΒΡΑ · Β΄ ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

**Ονοματεπώνυμο:** _____ **Ημερομηνία:**

_____ **ΕΝΟΤΗΤΑ Α Αλγεβρικές παραστάσεις - Συστήματα - Συναρτήσεις**

**Άσκηση 1.** Να λύσετε τα παρακάτω συστήματα:

**α)** $\begin{cases} \frac{x}{2} - 1 = \frac{y}{3} \\ \frac{x-1}{3} - \frac{x-2y}{4} = \frac{3}{2} \end{cases}$

**β)** $\begin{cases} \frac{2x-y}{3} + \frac{y-1}{2} = 3 \\ \frac{x+2}{4} - \frac{y-2}{3} = \frac{1}{2} \end{cases}$

**Άσκηση 2.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού καθεμιάς από τις συναρτήσεις:

α) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-9}$ β) $g(x) = \sqrt{2x+6}$ γ) $h(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$.

**Άσκηση 3.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-4}{x+3}$.

**α)** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f$.

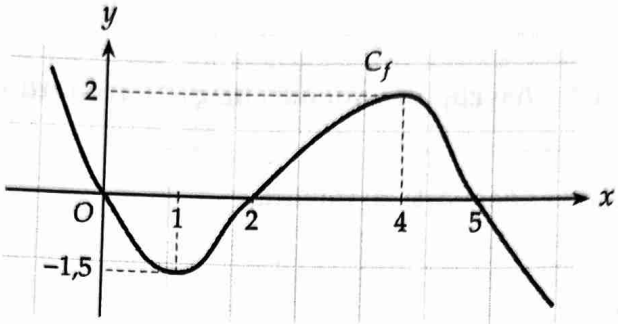
**β)** Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$ και $f(2)$.

**γ)** Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

**δ)** Να εξετάσετε αν το σημείο $A(1, -\frac{3}{4})$ ανήκει στη γραφική παράσταση της $f$.

## ΕΝΟΤΗΤΑ Β Μονοτονία – Μελέτη γραφικής παράστασης

**Άσκηση 4.** Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.




**α)** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η $f$ είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

**β)** Να προσδιορίσετε τις θέσεις των τοπικών ακροτάτων που φαίνονται στο σχήμα.

**γ)** Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

**δ)** Να συγκρίνετε τις τιμές $f(\frac{1}{2})$ και $f(\frac{3}{4})$, καθώς και τις $f(3)$ και $f(4)$.

**Άσκηση 5.** Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως μονότονη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 4)$ και $B(3, -2)$.

**α)** Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της $f$.

**β)** Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(7)$ και $f(10)$.

**γ)** Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(\alpha)$ και $f(\alpha + 2)$.

**δ)** Να λύσετε τις ανισώσεις $f(2x - 3) < 4$ και $f(5 - 2x) \geqslant -2$.

## ΕΝΟΤΗΤΑ Β Μονοτονία - Ακρότατα (συνέχεια)

**Άσκηση 6.** Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία $f(2) = -1$.

**α)** Να δείξετε ότι για κάθε $x < 2$ ισχύει $f(x) < -1$.

**β)** Να συγκρίνετε τις τιμές $f(\sqrt{2})$ και $f(2)$.

**γ)** Να λύσετε τις ανισώσεις $f(4x-1) > -1$ και $f(3x+5) \leqslant -1$.

**Άσκηση 7.** Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις παρουσιάζουν ολικό ακρότατο και να προσδιορίσετε την τιμή και τη θέση του:

α) $f(x) = (x-2)^2 - 3$ β) $g(x) = 4 - (x+1)^2$ γ) $h(x) = |x-3| + 2$.

**Άσκηση 8.** Η συνάρτηση $f(x) = 4\sqrt{x} - \dfrac{\alpha}{x} - 5$, με $x > 0$, έχει γραφική παράσταση που διέρχεται από το σημείο $A(1, -13)$.

**α)** Να υπολογίσετε την τιμή της παραμέτρου $\alpha$.

**β)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία, χωρίς χρήση παραγώγων.

**γ)** Να δείξετε ότι ο αριθμός 4 είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

**δ)** Να λύσετε την ανίσωση $4\sqrt{x} > \dfrac{12}{x} + 5$.

## ΕΝΟΤΗΤΑ Γ Άρτιες - Περιττές συναρτήσεις

**Άσκηση 9.** Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες, ποιες περιττές και ποιες ούτε άρτιες ούτε περιττές, αιτιολογώντας την απάντησή σας.

α) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ β) $g(x) = x^3 - 4x$

γ) $h(x) = \dfrac{2x}{x^2+9}$ δ) $k(x) = \sqrt{x^2+4}$

ε) $p(x) = x^2 + x$ στ) $q(x) = \dfrac{x^2+1}{x^3-x}$.

## ΕΝΟΤΗΤΑ Γ Άρτιες – Περιττές συναρτήσεις (συνέχεια)

**Άσκηση 10.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x$.

**α)** Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι περιττή.

**β)** Να υπολογίσετε τις τιμές $f(2)$ και $f(-2)$.

**γ)** Αν $f(\alpha) = 5$, να βρείτε την τιμή $f(-\alpha)$.

**Άσκηση 11.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 - 4)^2 + 1$.

**α)** Να αποδείξετε ότι η $f$ είναι άρτια.

**β)** Να βρείτε το ολικό ελάχιστο της $f$ και τις θέσεις όπου παρουσιάζεται.

**γ)** Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$.

## ΕΝΟΤΗΤΑ Δ Υπολογισμός τριγωνομετρικών αριθμών

**Άσκηση 12.** Να υπολογίσετε τους άλλους τρεις τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:

**α)** $\eta\mu\omega = -\frac{5}{13}$ και $\frac{3\pi}{2} < \omega < 2\pi$.

**β)** $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{8}{17}$ και $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$.

**γ)** $\varepsilon\varphi x = -\frac{3}{4}$ και $\frac{\pi}{2} < x < \pi$.

**δ)** $\sigma\varphi x = \frac{2}{3}$ και $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

**Άσκηση 13.** Να βρείτε την τιμή της $\varepsilon\varphi x$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

**α)** $4\eta\mu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 = 0$, με $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

**β)** $2\sigma\upsilon\nu^2 x + 5\eta\mu x - 4 = 0$, με $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$.

## ΕΝΟΤΗΤΑ Ε Βασικές τριγωνομετρικές ταυτότητες

*Σε κάθε ερώτημα θεωρούμε τις τιμές της μεταβλητής για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις.*

**Άσκηση 14.** Να αποδείξετε τις παρακάτω ταυτότητες:

**α)** $\eta\mu^4 x - \sigma\upsilon\nu^4 x = 2\eta\mu^2 x - 1.$

**β)** $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1-\eta\mu x} - \dfrac{1-\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = 2\varepsilon\varphi x.$

**γ)** $\dfrac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} + \dfrac{\eta\mu x}{1-\sigma\upsilon\nu x} = \dfrac{2}{\eta\mu x}.$

**δ)** $\varepsilon\varphi x + \sigma\varphi x = \dfrac{1}{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x}.$

**Άσκηση 15.** Να αποδείξετε ότι:

**α)** $\varepsilon\varphi^2 x + \sigma\varphi^2 x + 2 = \dfrac{1}{\eta\mu^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x}.$

**β)** $\dfrac{\sigma\upsilon\nu^3 x - \sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \varepsilon\varphi x - \eta\mu^2 x.$

**γ)** $\sigma\varphi^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x = \sigma\varphi^2 x \cdot \sigma\upsilon\nu^2 x.$

**δ)** $\dfrac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x} = \dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}.$

**Άσκηση 16.** Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$\frac{1}{1-\eta\mu x} + \frac{1}{1+\eta\mu x} = 2 + 2\varepsilon\varphi^2 x.$$

## ΕΝΟΤΗΤΑ ΣΤ Συνδυαστική επανάληψη

**Άσκηση 17.** Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, με $f(2) = -1$ και $f(5) = 4$.

**α)** Να συγκρίνετε τις τιμές $f(\frac{7}{3})$ και $f(\frac{8}{3})$.

**β)** Να λύσετε την ανίσωση $f(3x-1) \leqslant 4$.

**γ)** Να λύσετε την ανίσωση $f(2x+1) > -1$.

**δ)** Να βρείτε τις τιμές του $x$ για τις οποίες ισχύουν ταυτόχρονα οι δύο προηγούμενες ανισώσεις.

# Εποχιο Μαθημα

Ασκηση 1 α.

Ασκηση 4

Ασκηση 5.

Ασκηση 8.

Ασκηση 9.

Ασκηση 13

Ασκηση 15