Τετραγωνική ρίζα

1. Τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού a είναι ο μη αρνητικός αριθμός x τέτοιος

$$x^2 = a \iff x = \sqrt{a}$$

2. $\sqrt{x}^2 = x$

3. $\sqrt{x^2} = |x|$

4. $\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}$

5. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$

2. (δ) $\sqrt{8\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{49}}}}$ = Ответ: 9

$= \sqrt{8 \cdot \sqrt{1+\sqrt{2+7}}} =$

$= \sqrt{8\sqrt{1+\sqrt{9}}} =$

$= \sqrt{8\sqrt{1+3}} = \sqrt{8 \cdot \sqrt{4}}$

$= \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4$

3. (В) $\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2} + \sqrt{(\sqrt{2}-2)^2}$

$= |\sqrt{2}-1| + |\sqrt{2}-2|$
(+) (−)

$= \sqrt{2} - 1 - \sqrt{2} + 2 = 1.$

3. ① $\sqrt{\frac{x^2}{25}} + \sqrt{x^2-4x+4}$

$= \sqrt{\left(\frac{x}{5}\right)^2} + \sqrt{(x-2)^2}$

$= \left|\frac{x}{5}\right| + |x-2|$

7. No $\left(\sqrt{x^2+3} - \sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+3} + \sqrt{x^2+1}\right) = 2$

$\sqrt{x^2+3}^2 - \sqrt{x^2+1}^2 = 2$

$x^2+3 - (x^2+1) = 2$

$x^2+3-x^2-1 = 2$

$2 = 2$.

$(a-\beta)(a+\beta) = a^2-\beta^2$

8. (α) $\dfrac{\sqrt{72}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{72}{2}} = \sqrt{36} = 6$

(σ2) $\dfrac{\sqrt{8}\,\sqrt{75}}{\sqrt{150}} = \dfrac{\sqrt{2}\sqrt{4}\,\sqrt{75}}{\sqrt{2}\sqrt{75}} =$

$= \dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 2$

10. $$\frac{\sqrt{20} - 2\sqrt{8} + 3\sqrt{12}}{\sqrt{45} - 2\sqrt{18} + 3\sqrt{27}}$$

$$= \frac{\sqrt{5}\sqrt{4} - 2\sqrt{2}\sqrt{4} + 3\sqrt{3}\sqrt{4}}{\sqrt{5}\sqrt{9} - 2\sqrt{2}\sqrt{9} + 3\sqrt{9}\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{5} - 4\sqrt{2} + 6\sqrt{3}}{3\sqrt{5} - 6\sqrt{2} + 9\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{5} - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{1})}{3(\sqrt{5} - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{1})}$$

$$= \frac{2}{3}$$

11. B) $\frac{\sqrt{2^{20}+4^{12}}}{\sqrt{4^{11}+8^{6}}} =$

$= \frac{\sqrt{2^{20}+(2^2)^{12}}}{\sqrt{(2^2)^{11}+(2^3)^{6}}} = \frac{\sqrt{2^{20}+2^{24}}}{\sqrt{2^{22}+2^{18}}}$

$= \frac{\sqrt{2^{20}(1+2^4)}}{\sqrt{2^{18}(2^4+1)}} =$

$= \sqrt{\frac{2^{20}(1+2^4)}{2^{18}(2^4+1)}} = \sqrt{2^2}$

$= 2$

12. ⑧ $\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}=1$

$$\sqrt{(2+\sqrt{3})\left(2+\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)\left(2-\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)}=1$$

$$\sqrt{(2+\sqrt{3})\left(2^2-\sqrt{2+\sqrt{3}}^2\right)}=1$$

$$\sqrt{(2+\sqrt{3})(4-(2+\sqrt{3}))}=1$$

$$\sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}=1$$

$$\sqrt{2^2-\sqrt{3}^2}=1 \Rightarrow \sqrt{4-3}=1$$

$$1=1.$$

Ενότητα 8

18.

Β) $|2a-6| - 6\left|1-\frac{a}{3}\right| = 0$

$2|a-3| - 2\cdot|3-a| = 0$

$2|a-3| - 2|a-3| = 0$

$0 = 0.$

19. Β) $4\left|\frac{x}{2}-1\right| + 8\left|\frac{x}{4}-\frac{1}{2}\right|$ $x<2$

$|2x-4| + |2x-4| =$

$= 2|2x-4| = 4|x-2|$ (−)

• $x<2 \Rightarrow x-2<0$

$4(-x+2)$

$-4x+8.$

22. ⑦ $3|x-2|-2|2-x|-5=0$

$3|x-2|-2|x-2|-5=0$

$|x-2|=5$

$x-2=5$ $\qquad$ $x-2=-5$

$x=7$ $\qquad$ $x=-3$

⑧ $|3x-6|-|4-2x|=1$

$|3(x-2)|-|2(2-x)|=1$

$3|x-2|-2|2-x|=1$

$3|x-2|-2|x-2|=1$

$|x-2|=1$ $\qquad$ $x-2=-1$

$x-2=1$ $\qquad$ $x=3$ $\qquad$ $x=1$

26. (α) $d(x,-5) \geq 2$

$$|x+5| \geq 2$$

$x+5 \geq 2$ ή $x+5 \leq -2$

$x \geq -3$ $x \leq -7$

$x \in (-\infty,-7] \cup [-3,+\infty)$

$d(\alpha,\beta) = |\alpha-\beta|$

(β) $|x-1| < |x-3|$

$|x-1|^2 < |x-3|^2$

$x^2-2x+1 < x^2-6x+9$

$4x < 8$

$x < 2$

26. (1) $d(2x,1) > d(2x,3)$

$$|2x-1| > |2x-3|$$

$$|2x-1|^2 > |2x-3|^2$$

$$4x^2 - 4x + 1 > 4x^2 - 12x + 9$$

$$8x > 8$$

$$x > 1$$

---

(8) $x^2 < 9$

$$x^2 < 3^2$$

$$|x| < |3| \quad (+)$$

$$|x| < 3$$

$$-3 < x < 3$$

(02) $4x^2 < 25$

$$(2x)^2 < 5^2$$

$$|2x| < |5|$$

$$2|x| < 5$$

$$|x| < \frac{5}{2}$$

$$-\frac{5}{2} < x < \frac{5}{2}$$

32. $|2x-1|<1$

(a) Nδο $0<x<1$

$|2x-1|<1 \rightarrow -1<2x-1<1$

$0<2x<2$

$0<x<1$

(β) i) $\left|\frac{x}{x-1}\right| = \frac{\overset{\oplus}{|x|}}{\underset{\ominus}{|x-1|}} = \frac{x}{-(x-1)} = \frac{x}{1-x}$

• $0<x<1 \Rightarrow -1<x-1<0$

ii) $\left|\,|x^2-x|\right| = |x(x-1)| = \overset{\oplus}{|x|}\,\overset{\ominus}{|x-1|}$

$= x(1-x)$

(δ) $0<x<1$

$0<x^2<x<1$

20. ⓐ $|\alpha+\beta+\gamma| \le |\alpha|+|\beta|+|\gamma|$

$|\alpha+\beta+\gamma| \le 2+3+4$

$|\alpha+\beta+\gamma| \le 9$

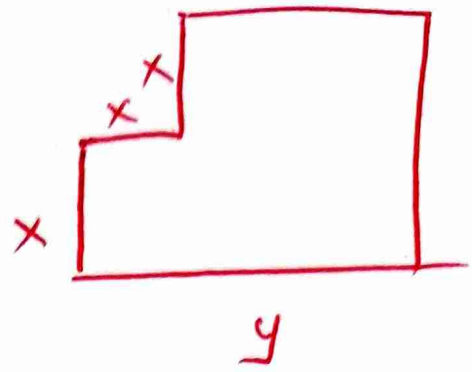
ⓑ $|\alpha-\beta+3\gamma| \le |\alpha|+|-\beta|+|3\gamma|$

$|\alpha-\beta+3\gamma| \le 2+|\beta|+3|\gamma|$

$|\alpha-\beta+3\gamma| \le 2+3+3\cdot 4$

$|\alpha-\beta+3\gamma| \le 17$.

34.



$$П = 3x + y + 2x + y - x$$

$$\boxed{П = 4x + 2y}$$

$|x-1| < 0,1$

$-0,1 < x-1 < 0,1$

$\boxed{0,9 < x < 1,1}$

$3,6 < 4x < 4,4$

$|y-4| < 0,2$

$-0,2 < y-4 < 0,2$

$\boxed{3,8 < y < 4,2}$

$7,6 < 2y < 8,4$

$11,2 < 4x + 2y < 12,8$

$11,2 < П < 12,8$

35. $|x-3|<3$

$|y-3|<1$

(a) $-3<x-3<3$ $\qquad -1<y-3<1$

$\boxed{0<x<6}$ $\qquad 2<y<4$

(B) i) $A=\overset{(-)}{|x-6|}+\overset{(+)}{|y-2|}=-x+6+y-2=y-x+4$

• $0<x<6 \Rightarrow 0-6<x-6<6-6$

$-6<x-6<0$

• $2<y<4 \Rightarrow 0<y-2<2$

ii) $\left|\dfrac{x}{y-4}\right|=\dfrac{\overset{(+)}{|x|}}{\overset{(-)}{|y-4|}}=\dfrac{x}{-y+4}$

• $2<y<4 \Rightarrow -2<y-4<0$

iii) $|xy-4x|=|x(y-4)|=\overset{(+)}{|x|}\overset{(-)}{|y-4|}$

$=x(-y+4)$.

iv) $|x-y-4| = -x+y+4$ (−)

- $0<x<6 \Rightarrow 6>x>0$ } (+)

$2<y<4 \Rightarrow -2>-y>-4$

$4>x-y>-4$

$0>x-y-4>-8$

v) $\left|\frac{x}{y}-3\right| = 3-\frac{x}{y}$ (−)

- $0<x<6 \Rightarrow 6>x>0$ } (+)
- $2<y<4 \Rightarrow \frac{1}{2}>\frac{1}{y}>\frac{1}{4}$

$3>\frac{x}{y}>0$

$0>\frac{x}{y}-3>-3$

μαθητών
ΕΡΕΙΣΜΑ
φροντιστήριο μέσης εκπαίδευσης

ΑΛΓΕΒΡΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1 Να αποδειχθεί ότι $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (10 μ.)

Α2 Να χαρακτηριστούν οι παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος.

Α) Εαν ισχύει ότι $x^2 + y^2 = 0$ $\tau\acute{o}\tau\varepsilon$ $x = 0$ ή $y = 0$ για κάθε $x.y \in \mathbb{R}$

Β) Δύο πραγματικοί αριθμοί x $\kappa\alpha\iota$ y είναι αντίθετοι αν ισχύει ότι $x + y = 0$.

Γ) Εαν $\alpha < \beta$ $\tau\acute{o}\tau\varepsilon$ $\alpha\gamma < \beta\gamma$ $\gamma\iota\alpha$ $\kappa\alpha\theta\varepsilon$ $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Δ) Ισχύει ότι $a < \beta \Leftrightarrow a^{\nu} < \beta^{\nu}$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\kappa\alpha\iota$ $\nu \in \mathbb{N}$.

Ε) Εαν $\alpha \leq 0$ $\tau\acute{o}\tau\varepsilon$ $|\alpha| = -\alpha$. (15 μ.)

ΘΕΜΑ Β

Β1 Να παραγοντοποιηθούν οι αλγεβρικές παραστάσεις

Α) $9x^2 - 16$ Β) $4x^2 - 4x + 1$ Γ) $3x^2 - 6x$ (6 μον.)

Β2 Να αποδειχθεί ότι $(x^2 - 2)^2 - x^2(x - 2)(x + 2) = 4$ και στην συνέχεια να υπολογιστεί η παράσταση $A = 9998^2 - 100^2 \cdot 98 \cdot 102$ (9 μον.)

Β3 Να βρεθεί το x ώστε : Α) $|x - 1| < 1$ Β) $|2x - 3| \geq 1$ Γ) $|3x + 1| = 1$

Δ) $|2x| = |3x - 2|$ (10 μον.)

ΘΕΜΑ Γ

Γ1 Να αποδειχθούν οι παρακάτω ανισότητες

Α) $3(\alpha^2-\beta^2)+2\alpha\beta \geq -2(\alpha+2\beta)^2$

Β) $4\alpha^2-4\alpha\beta+2\beta^2 \geq 0$

Γ) Αν $\alpha \leq 2 \leq \beta$ να δειξετε ότι $\alpha^2+2\beta \geq \alpha\beta+2\alpha$

Δ) Αν $0<\alpha<\beta$ να δειξετε ότι $\alpha^9-\frac{1}{\alpha^2}<\beta^9-\frac{1}{\beta^2}$ (20 μον.)

Γ2 Να βρεθούν τα $x, y \in \mathbb{R}$ ωστε $2x^2-6xy+1=2x-9y^2$ (5 μον.)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται ότι $1<x<2$ και $1<y<3$.

Δ1 Να βρεθεί μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις :

Α) $2x-5$ Β) $1-xy$ Γ) $(x+1)^2-\frac{x}{y}$ (6 μον.)

Δ2 Να λυθεί η εξίσωση $(x-3)^3+x^3+(3-2x)^3=0$. (5 μον.)

Δ3 Έστω $0,3,\frac{3}{2}$ οι λύσεις της εξίσωσης του **Δ2.**

Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού x για τις οποίες ορίζεται η παράσταση $A=\frac{|2x-5|-|1-xy|+xy}{(x-3)^3+x^3+(3-2x)^3}$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι $A=\frac{2}{3x(2x-3)}$. (8 μον.)

Δ4 Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση $A\cdot\frac{2x^3-3x^2-2x+3}{x^2-x}$ όπου Α η αλγεβρική παράσταση του **Δ3.** (6 μον.)

Καλή επιτυχία!!!

Θεμα Α

Α1: Νδο $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$

Αποδειξη

$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$

$|\alpha\beta|^2 = [|\alpha||\beta|]^2$

$(\alpha\beta)^2 = |\alpha|^2|\beta|^2$

$\alpha^2\beta^2 = \alpha^2\beta^2$ που ισχυει.

Α2: Α) Λαθος Β) Σωστο Γ) Λαθος

Δ) Λαθος

Β: Α) $9x^2-16 = (3x-4)(3x+4)$

Β) $4x^2-4x+1 = (2x-1)^2$

Γ) $3x^2-6x = 3x(x-2)$

B2: $(x^2-2)^2 - x^2(x-2)(x+2) = 4$

$x^4 - 4x^2 + 4 - x^2(x^2-4) = 4$

$x^4 - 4x^2 + 4 - x^4 + 4x^2 = 4$

$4 = 4$ ✓

$A = 9998^2 - 100^2 \cdot 98 \cdot 102$

$A = [100^2 - 2] - 100^2 \cdot (100-2)(100+2) = 4$ ✓

B3: A) $|x-1| < 1$

$-1 < x-1 < 1$

$0 < x < 1$

B) $|2x-3| \geq 1$

$2x-3 \geq 1$ ili $2x-3 \leq -1$

$2x \geq 4$ $2x \leq 2$

$x \geq 2$ $x \leq 1$

$x \in (-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

γ) $|3x+1| = 1$

$3x+1=1$ ή $3x+1=-1$

$3x=0$ $3x=-2$

$x=0$ $x=-\frac{2}{3}$

δ) $|2x| = |3x-2|$

$2x = 3x-2$ ή $2x=-3x+2$

$2=x$ $5x=2$

$x=\frac{2}{5}$.

Άσκηση Γ

Γ1: Α) $3(a^2-\beta^2)+2a\beta \geq -2(a+2\beta)^2$

$3a^2-3\beta^2+2a\beta \geq -2(a^2+4a\beta+4\beta^2)$

$3a^2-3\beta^2+2a\beta \geq -2a^2-8a\beta-8\beta^2$

$5a^2+10a\beta+5\beta^2 \geq 0$

$a^2+2a\beta+\beta^2 \geq 0$

$(a+\beta)^2 \geq 0$ ✓

Β) $4a^2-4a\beta+2\beta^2 \geq 0$

$4a^2-4a\beta+\beta^2+\beta^2 \geq 0$

$(2a-\beta)^2+\beta^2 \geq 0$

✓

r) $a \le 2 \le B$ vδo $a^2+2B \ge aB+2a$

$$a^2+2B-aB-2a \ge 0$$

$$a(a-B)-2(a-B) \ge 0$$

$$(a-B)(a-2) \ge 0$$

- $a \le B \Rightarrow a-B \le 0$
- $a \le 2 \Rightarrow a-2 \le 0$

✓

Δ). Αν $0<a<B$ vδo $a^9-\frac{1}{a^2} < B^9-\frac{1}{B^2}$

- $a<B \Rightarrow a^9 < B^9$
- $a<B \Rightarrow a^2 < B^2 \Rightarrow \frac{1}{a^2} > \frac{1}{B^2}$ (+)

$$-\frac{1}{a^2} < -\frac{1}{B^2}$$

$$a^9-\frac{1}{a^2} < B^9-\frac{1}{B^2}$$ ✓

Câu 2: $2x^2 - 6xy + 1 = 2x - 9y^2$

$2x^2 - 6xy + 1 - 2x + 9y^2 = 0$

$x^2 - 6xy + 9y^2 + x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x-3y)^2 + (x-1)^2 = 0$

$x - 3y = 0$ hoặc $x - 1 = 0$

$1 - 3y = 0$

$x = 1$

$y = \frac{1}{3}$

Δ₁: $1 < x < 2$

$1 < y < 3$

A) $2 < 2x < 4$

$\boxed{-3 < 2x - 5 < -1}$

B) $\left.\begin{matrix} 1 < x < 2 \\ 1 < y < 3 \end{matrix}\right\} \odot \; 1 < xy < 6$

$-1 > -xy > -6$

$\boxed{0 > 1 - xy > -5}$

C) $(x+1)^2 - \frac{x}{y}$

- $1 < x < 2 \Rightarrow 2 < x+1 < 3 \Rightarrow 4 < (x+1)^2 < 9$

$+$

- $1 < x < 2 \Rightarrow 2 > x > 1$
- $1 < y < 3 \Rightarrow 1 > \frac{1}{y} > \frac{1}{3}$

$\left.\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}\right\} \odot \; 2 > \frac{x}{y} > \frac{1}{3}$

$-2 < -\frac{x}{y} < -\frac{1}{3}$

$\boxed{2 < (x+1)^2 - \frac{x}{y} < \frac{26}{3}}$

Δ2: $(x-3)^3 + x^3 + (3-2x)^3 = 0$

$$3(x-3)\times(3-2x) = 0$$

$x=3$ $x=0$ $x=\frac{3}{2}$

$\longrightarrow$ $x-3+x+3-2x = 2x-2x = 0$ ✓

Euler $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = 3\alpha\beta\gamma$

αν $\alpha+\beta+\gamma=0$

Δ3: $A = \dfrac{|2x-5| - |1-xy| + xy}{(x-3)^3 + x^3 + (3-2x)^3}$

(−) (−)

Για να ορίζεται η A πρέπει

$x \neq 3$, $x \neq 0$, $x \neq \frac{3}{2}$.

$$A = \frac{5-2x-(-1+xy)+xy}{3x(x-3)(3-2x)} =$$

$$A = \frac{5-2x+1-\cancel{xy}+\cancel{xy}}{3x(x-3)(3-2x)}$$

$$A = \frac{6-2x}{3x(x-3)(3-2x)} = \frac{2(3-x)}{-3x(3-x)(3-2x)}$$

$$A = \frac{2}{-3x(3-2x)} = \frac{2}{3x(2x-3)}$$ ✓

Δα: $A \cdot \frac{2x^3-3x^2-2x+3}{x^2-x} =$

$$= \frac{2}{3x(2x-3)} \cdot \frac{x^2(2x-3)-(2x-3)}{x(x-1)}$$

$$= \frac{2}{3x(2x-3)} \cdot \frac{(2x-3)(x-1)(x+1)}{x(x-1)} = \frac{2(x+1)}{3x^2}$$

Επόμενο μάθημα

Ημερομηνία μαθήματος : Παρασκευή 30/10/26

Ώρα μαθήματος : 17:30

Ασκήσεις

Ενότητα 9

(1)

(2) α β γ

(3) α

(4)

(5)

(6)

(8) α β δ ε

(9)

(11) α

(12) α β γ.

παρατηρήσεις