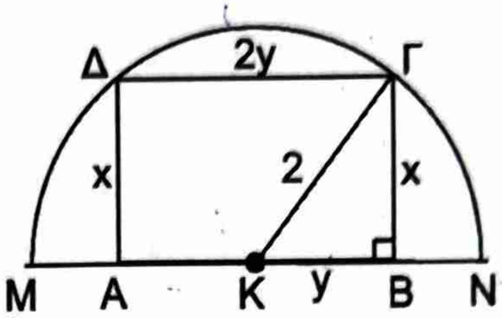
Προβλημα 1ο

ΘΕΜΑ Γ

Στο διπλανό σχήμα δίνεται ημικύκλιο με κέντρο Κ και διάμετρο ΜΝ = 4 cm. Ορθογώνιο ΑΒΓΔ με διαστάσεις x cm και $2y$ cm είναι εγγεγραμμένο στο ημικύκλιο.



ΠΑΛΑΙΟ

Γ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ως συνάρτηση του x, είναι $E(x)=2\sqrt{4x^2-x^4}$, $x\in(0,\ 2)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ώστε το εμβαδόν του να γίνεται μέγιστο.

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε τις τιμές του x ώστε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ να είναι ίσο με $2\sqrt{3}\ cm^2$.

Μονάδες 5

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x)=\left(E(x)-2\sqrt{3}\right)e^x,\ x\in(0,\ 2)$$

έχει ένα τουλάχιστον κρίσιμο σημείο στο διάστημα $(\sqrt{2},\ \sqrt{3})$.

Μονάδες 7

Γ1. $E_{ορθ} = B \cdot υ$

$x^2+y^2=2^2$

$y^2=4-x^2$

$y=\sqrt{4-x^2}$

$E_{ορθ} = 2y \cdot x$

$E_{ορθ} = 2\sqrt{4-x^2} \cdot x$

$E_{ορθ} = 2\sqrt{4-x^2}\sqrt{x^2}$

$$\boxed{E_{ορθ} = 2\sqrt{4x^2-x^4}}$$

Γ2. $E(x) = 2\sqrt{4x^2-x^4}$, $x \in (0,2)$

$$E'(x) = \cancel{2}\frac{8x-4x^3}{\cancel{2}\sqrt{4x^2-x^4}} = \frac{4x(2-x^2)}{\sqrt{4x-x^4}}$$

x	0		$\sqrt{2}$		2
E'		$+$	0	$-$	
E		$\nearrow$		$\searrow$	

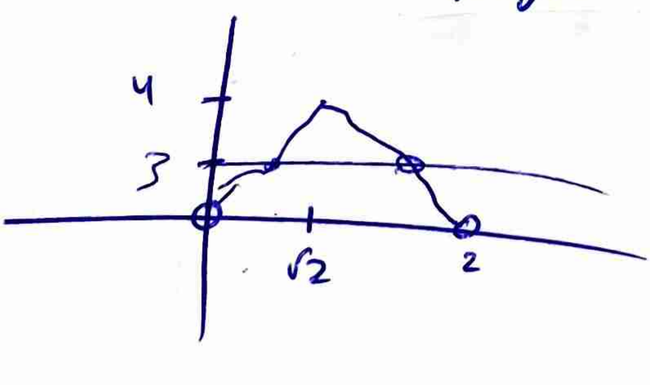
Για $x=\sqrt{2}$ έχω το μέγιστο εμβαδόν

$(\sqrt{2}) = 2\sqrt{8-4} = 4$

Μέγιστο εμβαδόν 4.

$\lim_{x\to 0^+} E(x) = 0$

$\lim_{x\to 2^-} E(x) = 0$



Γ3. $E(x) = 2\sqrt{3}$

$\cancel{2}\sqrt{4x^2 - x^4} = \cancel{2}\sqrt{3}$

$4x^2 - x^4 = 3$

$x^4 - 4x^2 = -3$

$x^2 = t$

$t^2 - 4t + 3 = 0$

$t = 3 \quad t = 1$

$x^2 = 3 \quad x^2 = 1$

$x = \sqrt{3} \quad x = 1$

$E(\sqrt{3}) = 2\sqrt{3}$

$E(1) = 2\sqrt{3}$

extra

Νδο $\exists$ ακριβώς 2 $x_1, x_2 \in (0,2)$ τ.ω

το εμβαδόν να κάνει 3.

$x < \sqrt{2}$

- f συνεχής
- $f \nearrow$
- $\Sigma T f = (0,4)$

Το $3 \in \Sigma Tf$

άρα $\exists!\, x_1$ τ.ω

$f(x_1) = 3$

$x > \sqrt{2}$

- f συνεχής
- $f \searrow$
- $\Sigma Tf = (0,4)$
- Το $3 \in \Sigma Tf$

άρα $\exists!\, x_2$ τ.ω

$f(x_2) = 3$

Γ4. $f(x) = \left(E(x) - 2\sqrt{3}\right)e^{x} \qquad x \in (0,2)$

$$f'(x) = E'(x)\, e^{x} + \left(E(x) - 2\sqrt{3}\right)e^{x}$$

$$f'(x) = e^{x}\left(E'(x) + E(x) - 2\sqrt{3}\right)$$

$$f'(\sqrt{2}) = e^{\sqrt{2}}\left(E'(\sqrt{2}) + E(\sqrt{2}) - 2\sqrt{3}\right).$$

$$= e^{\sqrt{2}}\left(0 + 4 - 2\sqrt{3}\right) > 0$$

$$f'(\sqrt{3}) = e^{\sqrt{3}}\left(E'(\sqrt{3}) + E(\sqrt{3}) - 2\sqrt{3}\right)$$

$$= e^{\sqrt{3}}\left(\underset{(-)}{E'(\sqrt{3})} + \cancel{2\sqrt{3}} - \cancel{2\sqrt{3}}\right) < 0$$

$f'(\sqrt{2})\, f'(\sqrt{3}) < 0$ Bolzano

$\exists\, \xi \in (\sqrt{2}, \sqrt{3})$ τ.ω $f'(\xi) = 0$

δηλαδη υπαρχει τουλαχιστον ενα κρισιμο σημειο.

Συνθεση Συναρτησεων

1. Δινεται $f(x) = \ln x$, $x>0$ και $g(x) = \dfrac{x}{1-x}$, $x \neq 1$

Βρειτε την $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, $(g \circ g)(x)$, $(f \circ f)(x)$

2. Δινεται $f(x) = x^2+1$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \sqrt{x-2}$, $x \geq 2$

Βρειτε $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, $(g \circ g)(x)$

3. $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$

$g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = \sqrt{x}$

Βρειτε την $g \circ f$

4. $f : (-\infty, 0) \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x}\right)^2$

$g(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$

Βρειτε την $(g \circ f)(x)$

5. $f : (-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

$g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ $\quad g(x) = \sqrt{x}$

Βρειτε $f \circ g$

1. $f(x) = \ln x,\ x > 0$

$g(x) = \dfrac{x}{1-x},\ x \neq 1$

$\longrightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln \dfrac{x}{1-x}$

$x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$

$x \neq 1$ $\quad \dfrac{x}{1-x} > 0$

x		0		
x	−		+	+
1 − x	+		+	−
P(x)	−		+	−

$x \in (0,1)$.

$$\boxed{\begin{aligned} &(f \circ g)(x) = \ln \frac{x}{1-x} \\ &D_{f\circ g} = (0,1) \end{aligned}}$$

$\longrightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \dfrac{\ln x}{1 - \ln x}$

$x \in D_f$ και $f(x) \in D_g$

$x \in (0,+\infty)$. $\quad \ln x \neq 1$

$x \neq e$

$$\boxed{\begin{aligned} &(g \circ f)(x) = \frac{\ln x}{1-\ln x} \\ &D_{g\circ f} = (0,e) \cup (e,+\infty) \end{aligned}}$$

$\longrightarrow (g \circ g)(x) = g(g(x)) = \dfrac{\frac{x}{1-x}}{1 - \frac{x}{1-x}} = \dfrac{x}{1-x-x} = \dfrac{x}{1-2x}$

$x \in D_g$ και $g(x) \in D_g$

$x \neq 1$ $\quad \dfrac{x}{1-x} \neq 1 \Rightarrow x \neq 1 - x$

$2x \neq 1$

$x \neq \frac{1}{2}$

$$\boxed{\begin{aligned} &(g \circ g)(x) = \frac{x}{1-2x} \\ &D_{g\circ g} = \mathbb{R} - \{1, \tfrac{1}{2}\} \end{aligned}}$$

$\longrightarrow (f \circ f)(x) = \ln(\ln x)$

$x \in D_f$ και $f(x) \in D_f$

$x > 0$ $\quad \ln x > 0$

$x > 1$

$$\boxed{\begin{array}{l} (f \circ f)(x) = \ln(\ln x) \\ D_{f \circ f} = (1, +\infty) \end{array}}$$

2. $f(x) = x^2 + 1,\ x \in \mathbb{R}$ $\qquad g(x) = \sqrt{x-2},\ x \geq 2$

$\longrightarrow (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x-2}^{\,2} + 1 =$

$= x - 2 + 1 = x - 1$

$x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$

$x \geq 2$ $\quad \sqrt{x-2} \in \mathbb{R}$

$$\boxed{\begin{array}{l} (f \circ g)(x) = x - 1 \\ D_{f \circ g} = [2, +\infty) \end{array}}$$

$\longrightarrow (g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^2 + 1 - 2} = \sqrt{x^2 - 1}$

$x \in D_f$ και $f(x) \in D_g$

$x \in \mathbb{R}$ $\quad x^2 + 1 \geq 2$

$x^2 - 1 \geq 0$

x	-1		1	
$x^2 - 1$	$+$	$-$	$+$	

$x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

$$\boxed{\begin{array}{l} D_{g \circ f} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) \\ (g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1} \end{array}}$$

$\longrightarrow (g \circ g)(x) = g(g(x)) = \sqrt{\sqrt{x-2}-2}$

$x \in D_g$ και $g(x) \in D_g$

$\underline{\underline{x \geq 2}}$

$\sqrt{x-2} \geq 2$

$x-2 \geq 4$

$\underline{\underline{x \geq 6}}$

$(g \circ g)(x) = \sqrt{\sqrt{x-2}-2}$

$D_{g \circ g} = [6, +\infty)$

3. $f(x) = \dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$, $x > 1$ $\quad g(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}}$

$x \in D_f$ και $f(x) \in D_g$

$x > 1$ $\quad \dfrac{1}{1-\sqrt{x}} \geq 0$ $\Rightarrow 1-\sqrt{x} > 0 \Rightarrow 1 > \sqrt{x}$

$x < 1$

Δεν ορίζεται η $g \circ f$!

4. $f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 \quad , x < 0$

$g(x) = \sqrt{x} \quad , x \geq 0$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{\left(\frac{x-1}{x}\right)^2} = \left|\frac{x-1}{x}\right| = \frac{\overset{\ominus}{|x-1|}}{\underset{\ominus}{|x|}} = \frac{x-1}{x}$

$x \in D_f \qquad f(x) \in D_g$

$x < 0 \qquad \left(\frac{x-1}{x}\right)^2 \geq 0 \quad x \in \mathbb{R}.$

$$\boxed{\begin{array}{l} (g \circ f)(x) = \frac{x-1}{x} \\ D_{g \circ f} = (-\infty, 0) \end{array}}$$

5. $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 \quad , x \leq 1$

$g(x) = \sqrt{x} \quad , x \geq 0$

$(f \circ g)(x) = \sqrt{x}^4 - 2\sqrt{x}^2 + 1 = x^2 - 2x + 1$

$x \in D_g \qquad g(x) \in D_f$

$x \geq 0 \qquad \sqrt{x} \leq 1$

$x \leq 1$

$$\boxed{\begin{array}{l} (f \circ g)(x) = x^2 - 2x + 1 \\ D_{f \circ g} = [0, 1]. \end{array}}$$