

$$7. \textcircled{E} \log_2 24 - \log_2 3$$

$$= \log_2 \frac{24}{3} = \log_2 8 =$$

$$= \log_2 2^3 = 3$$

EVOLUTA

24

$$\textcircled{G} \log_6 2 - \log_6 8 - \log_6 9 =$$

$$= \log_6 \frac{2}{8} - \log_6 9 =$$

$$= \log_6 \frac{\frac{2}{8}}{9} = \log_6 \frac{2}{72} = \log_6 \frac{1}{36}$$

$$= \log_6 6^{-2} = -2$$

$$8. \textcircled{V} \frac{1}{3} \log 8 + \frac{1}{2} \log 25 =$$

$$= \log 8^{1/3} + \log 25^{1/2} =$$

$$= \log (2^3)^{1/3} + \log (5^2)^{1/2} =$$

$$= \log 2 + \log 5 = \log 10 = 1,$$

$$8. \textcircled{E} \quad 3 \log \sqrt[3]{2} + \frac{1}{2} \log 25 =$$

$$= \log \sqrt[3]{2^3} + \log 25^{1/2} =$$

$$= \log 2 + \log (5^2)^{1/2} =$$

$$= \log 2 + \log 5 = \log 10 = 1.$$

$$11. \textcircled{a} \quad \frac{2 + \log_5 8 - 2 \log_5 10}{\log_5 4 + \log_5 \frac{1}{2}} = 1$$

$$\frac{\log_5 5^2 + \log_5 8 - \log_5 100}{\log_5 (4 \cdot \frac{1}{2})} = 1$$

$$\frac{\log_5 25 + \log_5 8 - \log_5 100}{\log_5 2} = 1$$

$$\log_5 200 - \log_5 100$$

$$\frac{\log_5 200 - \log_5 100}{\log_5 2} = 1$$

$$\log_5 \frac{200}{100}$$

$$\frac{\log_5 \frac{200}{100}}{\log_5 2} = 1$$

$$\frac{\cancel{\log_5 2}}{\cancel{\log_5 2}} = 1$$

$$\frac{1}{1} = 1$$

1. (a) $\ln x = 0$
 $e^{\ln x} = e^0$

$$\boxed{x = 1}$$

(b) $\ln x + 1 = 0$

$$\ln x = -1$$

$$e^{\ln x} = e^{-1}$$

$$\boxed{x = \frac{1}{e}}$$

(c) $2 \ln x + 3 = 0$

$$2 \ln x = -3$$

$$\ln x = -\frac{3}{2}$$

$$e^{\ln x} = e^{-3/2}$$

$$\boxed{x = e^{-3/2}}$$

2.

$$\textcircled{6} \ln(x-2) - 1 = 0$$

$$\ln(x-2) = 1$$

$$e^{\ln(x-2)} = e^1$$

$$x-2 = e$$

$$\boxed{x = e+2}$$

$$\textcircled{8} \ln(x^2+1) = 0$$

$$e^{\ln(x^2+1)} = e^0$$

$$x^2+1 = 1$$

$$x^2 = 0$$

$$\textcircled{x=0}$$

$$\textcircled{9} \ln(x^2-1) - 1 = 0$$

$$\ln(x^2-1) = 1$$

$$e^{\ln(x^2-1)} = e^1$$

$$x^2-1 = e$$

$$x^2 = e+1$$

$$\textcircled{x = \pm \sqrt{e+1}}$$

$$4. \textcircled{b} \ln(x^2 - 3x) - \ln(x+5) = 0$$
$$\ln|x^2 - 3x| = \ln(x+5)$$

$$x^2 - 3x = x + 5$$

$$x^2 - 3x - x - 5 = 0$$

$$x^2 - 4x - 5 = 0$$

$$\textcircled{x=5} \quad \textcircled{x=-1}$$

$$5. \textcircled{a} \ln(x+1) + \ln(x-2) = \ln 4$$

$$\ln(x+1)(x-2) = \ln 4$$

$$(x+1)(x-2) = 4$$

$$x^2 - 2x + x - 2 - 4 = 0$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$\textcircled{x=3} \quad \textcircled{\cancel{x=-2}}$$

✓

$$6. \text{ (a) } \log(x+1) = 1 + \log(1-x)$$

$$\log(x+1) - \log(1-x) = 1$$

$$\log\left(\frac{x+1}{1-x}\right) = 1$$

$$\frac{x+1}{1-x} = 10 \quad \Rightarrow x+1 = 10(1-x)$$

$$x+1 = 10 - 10x \quad \Rightarrow 11x = 9 \quad \left(x = \frac{9}{11} \right)$$

$$\text{(13) } \log(x-6) + \log(x-7) = 1 - \log 5$$

$$\log(x-6)(x-7) = \log 10 - \log 5$$

$$\log(x^2 - 13x + 42) = \log 2$$

$$x^2 - 13x + 42 = 2$$

$$x^2 - 13x + 40 = 0$$

$$x = 8 \quad \checkmark \quad \cancel{x = 5}$$

$$7. \quad \textcircled{a} \quad 2 \log^2 x - 3 \log x = 0$$

$$\log x = t$$

$$2t^2 - 3t = 0$$

$$t(2t-3) = 0$$

$$t = 0$$

$$\text{or } 2t-3=0$$

$$t = \frac{3}{2}$$

$$\log x = 0$$

$$\log x = \frac{3}{2}$$

$$\underline{\underline{x = 1}}$$

$$x = 10^{3/2}$$

$$\textcircled{b} \quad (2 \ln x - 1) \ln x = 1$$

$$\ln x = 1$$

$$(2r-1) r = 1$$

$$2r^2 - r - 1 = 0$$

$$r = 1 \quad r = \frac{1}{2}$$

$$\ln x = 1$$
$$x = e$$

$$\ln x = \frac{1}{2}$$

$$x = \sqrt{e}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12}$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\frac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0$ είναι το $(-6, 2) \cup (2, +\infty)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} - \{\ln 2\}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και του άξονα xx' .

(Μονάδες 9)

$$\textcircled{a} \quad \frac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0 \Rightarrow \frac{(\omega - 2)(\omega^2 + 2\omega + 4)}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0$$

$\Delta < 0$

ω	-6	2
$\omega - 2$	-	+
$\omega^2 + 2\omega + 4$	+	+
$\omega^2 + 4\omega - 12$	+	-
$P(\omega)$	-	+

$$\omega \in (-6, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$\textcircled{b} \quad \text{πρηνά} \quad \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12} > 0 \quad \text{και} \quad e^{2x} + 4e^x - 12 \neq 0$$

$$\text{Θετω} \quad e^x = \omega$$

$$\frac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0$$

$$-6 < \omega < 2 \quad \text{ή} \quad \omega > 2$$

$$\underbrace{-6 < e^x < 2}_{\substack{e^x < 2 \\ x < \ln 2}} \quad \text{ή} \quad e^x > 2 \quad \underline{x > \ln 2}$$

$$\underline{x < \ln 2} \quad D_f = \mathbb{R} - \{\ln 2\}$$

$$\rightarrow e^{2x} + 4e^x - 12 = 0$$

$$e^x = w$$

$$w^2 + 4w - 12 = 0$$

$$w = -6$$

$$w = 2$$

$$e^x = -6$$

$$e^x = 2$$

Answer

$$\underline{\underline{x = \ln 2}}$$

(8)

$$f(x) = 0$$

$$\ln \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12} = 0$$

$$\frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12} = 1$$

$$e^x = t$$

$$\frac{t^3 - 8}{t^2 + 4t - 12} = 1$$

$$\Rightarrow t^3 - 8 = t^2 + 4t - 12$$

$$t^3 - t^2 - 4t + 4 = 0$$

$$t^2(t-1) - 4(t-1) = 0$$

$$(t-1)(t^2-4) = 0$$

(t=0)

$$t = 1$$

$$e^x = 1$$

$$t = 2$$

$$e^x = 2$$

$$x = \ln 2$$

$$t = -2$$

$$e^x = -2$$

Answer

B2.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = 4^x$ και $g(x) = 2^x - \frac{1}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο A , του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g , με εξαίρεση το σημείο A .

(Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις f και g στο ίδιο σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 7)

$$\textcircled{\alpha} \quad f(x) = g(x) \Rightarrow 4^x = 2^x - \frac{1}{4} \Rightarrow (2^x)^2 = 2^x - \frac{1}{4}$$

$$t^2 = t - \frac{1}{4} \Rightarrow 4t^2 = 4t - 1$$

$$\textcircled{2^x = t}$$

$$4t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$t = \frac{1}{2} \quad \wedge \quad 2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x = 2^{-1} \quad \textcircled{x = -1}$$

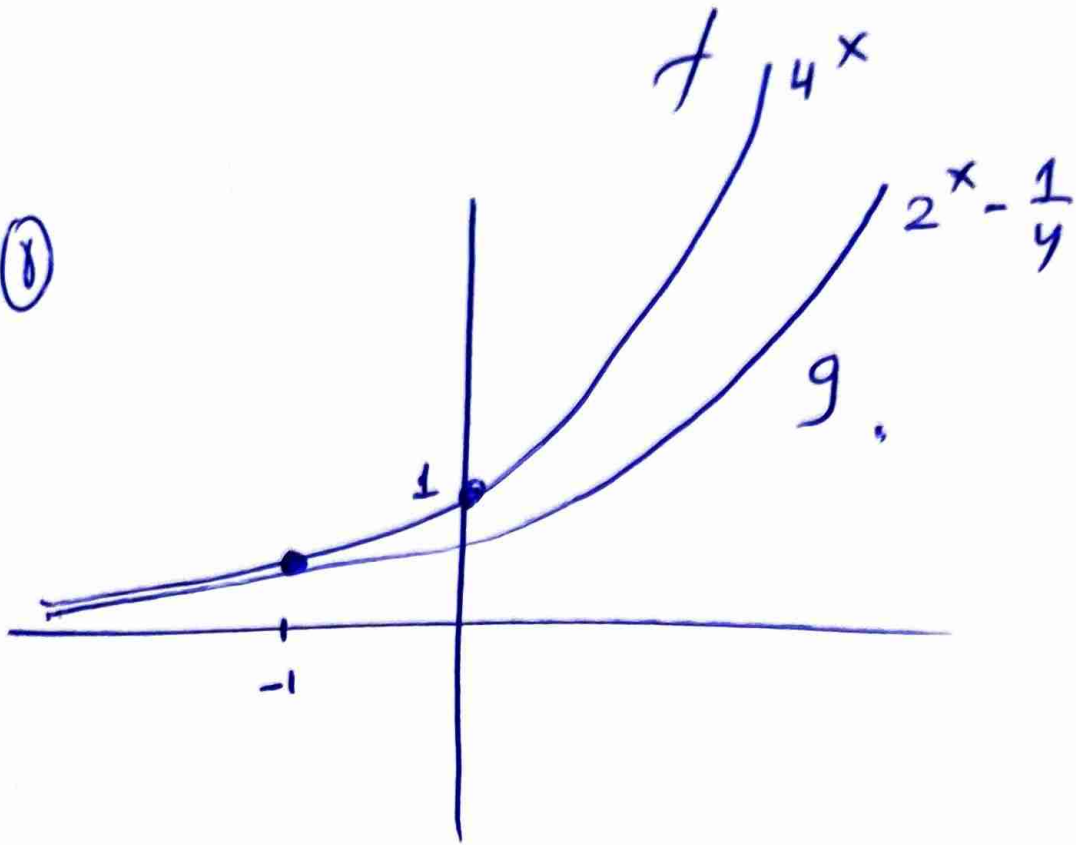
$$A\left(-1, \frac{1}{4}\right)$$

$$\textcircled{\beta} \quad f(x) > g(x) \Rightarrow 4^x > 2^x - \frac{1}{4} \Rightarrow (2^x)^2 - 2^x + \frac{1}{4} > 0$$

$$4 \cdot (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 1 > 0 \Rightarrow (2 \cdot 2^x - 1)^2 > 0$$



(8)



$f(x) = 4^x$ and $g(x) = 2^x - \frac{1}{4}$

Intersection at $(0, 1)$

Graph of $f(x) = 4^x$ and $g(x) = 2^x - \frac{1}{4}$

Graph of $f(x) = 4^x$ and $g(x) = 2^x - \frac{1}{4}$

Επορας Μαθημα

Τεταρτη 1/4

Σελ 353

43

48

44

49

45

50

46

51

47

52