ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\sqrt{10^x-2}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A=(\log 2,+\infty)$.

(Μονάδες 07)

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\log\sqrt{\dfrac{10^x}{3}}, x\in\mathbb{R}$.

i. Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{\dfrac{10^x}{3}}=\sqrt{10^x-2}$ με $x\in(\log 2,+\infty)$.

(Μονάδες 09)

ii. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων, των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 09)

α) πρέπει $10^x-2>0 \Rightarrow 10^x>2 \Rightarrow \log 10^x > \log 2$

$\underline{x>\log 2}$

β) i) $\sqrt{\dfrac{10^x}{3}}=\sqrt{10^x-2} \Rightarrow \dfrac{10^x}{3}=10^x-2$

$\underline{10^x=t}$

$\dfrac{t}{3}=t-2 \Rightarrow t=3t-6 \Rightarrow 6=2t$ $\boxed{t=3}$

$10^x=3 \Rightarrow \underline{x=\log 3}$

ii). $f(x)=g(x)$

$\log\sqrt{10^x-2}=\log\sqrt{\dfrac{10^x}{3}}$

$A(\log 3, 0)$.

$\sqrt{10^x-2}=\sqrt{\dfrac{10^x}{3}} \Rightarrow \underline{x=\log 3}$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2x^2-x+2$. Να αποδείξετε ότι

α) το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$.

(Μονάδες 6)

β) $P(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(1,2)$.

(Μονάδες 7)

γ) $1<\log 20<2$.

(Μονάδες 6)

δ) $P(\log 20)<0$.

(Μονάδες 6)

(α) $P(1)=1^3-2\cdot 1^2-1+2=0$

1	−2	−1	2	1
↓	1	−1	−2	
1	−1	−2	0	

$\boxed{P(x)=(x-1)(x^2-x-2)}$

(β)

x		-1		1		2	
$x-1$	−		−	0	+		+
x^2-x-2	+	0	−		−	0	+
$P(x)$	−		+		−		+

$P(x)<0$

$x\in(-\infty,-1)\cup(1,2)$.

(γ) Ν.δ.ο. $1<\log 20<2$

$\log 10<\log 20<\log 10^2$

$10<20<100$

(δ) Αφού $\log 20\in(1,2) \Rightarrow P(\log 20)<0$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - \alpha x^2 + 7x - \beta,\ \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x - 3$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x+1)$ είναι $\upsilon = -16$, τότε:

α) Να υπολογισθούν οι τιμές των α, β.

(Μονάδες 06)

Αν είναι $\alpha = 5,\ \ \beta = 3$,

β) να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 07)

γ) να λυθεί η ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 06)

δ) Αν $P(ln\kappa) < 0$, τότε να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού κ.

(Μονάδες 06)

α) $\left.\begin{matrix} P(3) = 0 \\ P(-1) = -16 \end{matrix}\right\}\ \alpha = 5\ ,\ \beta = 3$

β) $P(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 3$

$P(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = 0$

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & -5 & 7 & -3 & 3 \\ \downarrow & 3 & -6 & 3 & \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \end{array}$$

$(x-3)(x^2 - 2x + 1) = 0$

$x = 3 \quad x = 1$.

(γ) $P(x) < 0$

x		1		3	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
x^2-2x+1	$+$	0	$+$		$+$
$P(x)$	$-$		$-$		$+$

$x \in (-\infty, 1) \cup (1, 3)$

(δ) Αν $P(\ln k) < 0$ Βρείτε το k.

$\ln k < 1$ ή $1 < \ln k < 3$

$e^{\ln k} < e^1$ $\quad$ $e^1 < e^{\ln k} < e^3$

$0 < k < e$ $\quad$ $e < k < e^3$

$k \in (0, e) \cup (e, e^3)$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (\frac{2-\lambda}{4})^x$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες η f είναι εκθετική συνάρτηση.

(Μονάδες 5)

β) Για ποιες τιμές του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα;

(Μονάδες 7)

γ) Για $\lambda = 0$

i. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Μονάδες 6)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x+1) = 6$.

(Μονάδες 7)

(α) $f(x) = \alpha^x$ εκθετική $\alpha \in (0,1) \cup (1,+\infty)$

$0 < \frac{2-\lambda}{4}$ και $\frac{2-\lambda}{4} \neq 1$

$2-\lambda \neq 4$

$2-\lambda > 0$ $\quad \underline{\lambda \neq -2}$

$\underline{2 > \lambda}$

$\lambda \in (-\infty,-2) \cup (-2,2)$

(β) Η $f(x) = \alpha^x$ ↓ αν $0 < \alpha < 1$

$0 < \frac{2-\lambda}{4} < 1$

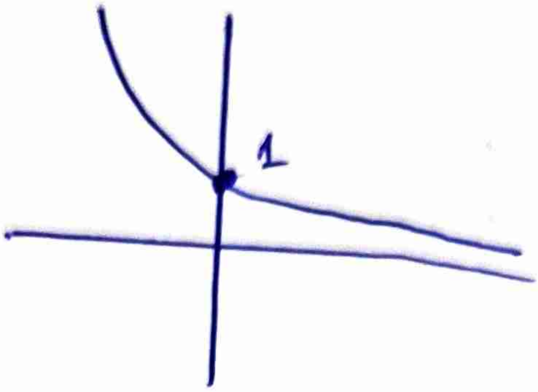
$0 < 2-\lambda < 4$

$0 < 2-\lambda$ και $2-\lambda < 4$

$\lambda < 2$ $\quad -2 < \lambda$

$\lambda \in (-2,2)$

(i) i) Για $\lambda=0$ $\quad f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



ii) $f(x) + f(x+1) = 6$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 6$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \frac{1}{2} = 6$ $\qquad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \lambda$

$\lambda + \frac{1}{2}\lambda = 6$

$2\lambda + \lambda = 12$

$3\lambda = 12$

$\lambda = 4$

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 4$

$2^{-x} = 2^2$ $\qquad \cancel{-x=2}$

$x = -2$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^x-1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Α και το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τον άξονα x'x.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=x-1$.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι αν α>0, τότε η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία $y=x+\alpha$.

(Μονάδες 8)

(α) Πρέπει $e^x-1>0 \Rightarrow e^x>1 \Rightarrow x>0$

$D_f=(0,+\infty)$

$f(x)=0 \Rightarrow \ln(e^x-1)=0 \Rightarrow e^x-1=1$

$e^x=2$

$x=\ln 2$.

$B(\ln 2, 0)$.

(β) $f(x)=x-1$

$\ln(e^x-1)=x-1$.

$e^{\ln(e^x-1)}=e^{x-1}$

$e^x-1=e^x\cdot e^{-1}$

$e^x=t$

$t-1=t\frac{1}{e}$

$et-e=t$

$et-t=e$

$t(e-1)=e$

$t=\frac{e}{e-1} \Rightarrow e^x=\frac{e}{e-1}$

$x = \ln \frac{e}{e-1} = \ln e - \ln(e-1) = 1 - \ln(e-1)$

$\boxed{x = 1 - \ln(e-1)}$

(γ) ΝΔΟ $f(x) = x + a$, $a > 0$

$\ln(e^x - 1) = x + a$

$e^x - 1 = e^{x+a}$

$e^x - 1 = e^x \cdot e^a$ $\qquad e^x = t$

$t - 1 = t \cdot e^a$

$t - t e^a = 1$

$t(1 - e^a) = 1$

$t = \frac{1}{1-e^a}$ $\qquad a > 0$, $e^a > e^0$, $e^a > 1$

$e^x = \frac{1}{1-e^a}$ Αδυνατη $\qquad 0 > 1 - e^a$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\ln x, x>0$ και η ευθεία $\varepsilon: y=2x-2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(2)+f(4)=\frac{1}{3}f(8)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι από τον άξονα x'x και πάνω.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε:

i. Τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία.

(Μονάδες 4)

ii. Για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από την ευθεία.

(Μονάδες 5)

(α) $f(x) = (x-1)\ln x \ , \ x>0$

$\varepsilon: y = 2x-2$

$f(2) = \ln 2$

$f(4) = 3\ln 4 = 3\ln 2^2 = 3\cdot 2\ln 2 = 6\ln 2$

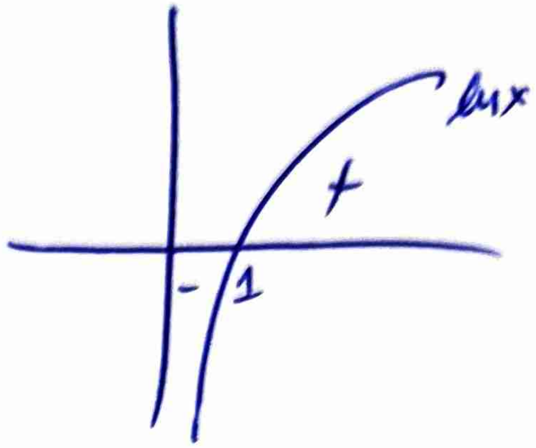
$f(8) = 7\ln 8 = 7\cdot \ln 2^3 = 7\cdot 3\ln 2 = 21\ln 2$

Άρα $f(2)+f(4) = \frac{1}{3}f(8) \Leftrightarrow \ln 2 + 6\ln 2 = \frac{1}{3}21\ln 2$

$7\ln 2 = 7\ln 2$ ✓

(B) $f(x) = (x-1)\ln x,\ x>0$

x		1	
$x-1$	$-$	0	$+$
$\ln x$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$		$+$



$f(x) > 0$

(γ) i) $f(x) = 2x-2$

$(x-1)\ln x = 2x-2$

$(x-1)\ln x = 2(x-1)$

$(x-1)(\ln x - 2) = 0$

$x-1=0$ ή $\ln x - 2 = 0$

$x=1$ $\qquad$ $\ln x = 2$

$x = e^2$

ii) $f(x) < 2x-2$

$(x-1)(\ln x - 2) < 0$ $\qquad$ $x \in (1, e^2)$

x		1		e^2	
$x-1$	$-$		$+$		$+$
$\ln x - 2$	$-$		$-$		$+$
$P(x)$	$+$		$-$		$+$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.

(Μονάδες 05)

β) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$ και να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της.

(Μονάδες 05)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f.

(Μονάδες 10)

δ) Αν $g(x) = συνx$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, τότε να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.

(Μονάδες 05)

α $f(x) = e^{|x|}$, $x \in R$

$f(-x) = e^{|-x|} = e^{|x|} = f(x)$ Αρτια

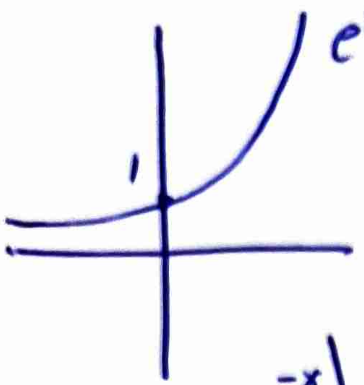
$x \in R$, $-x \in R$

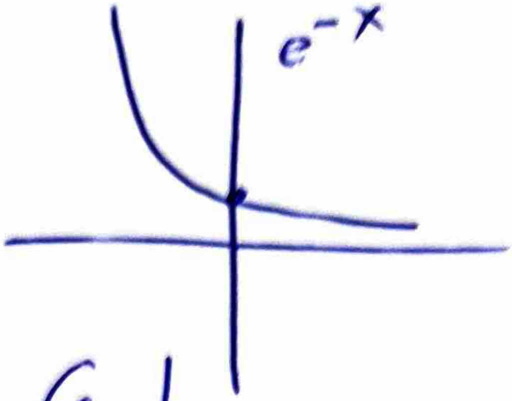
β Αρκει νδο $f(x) \geq f(0)$

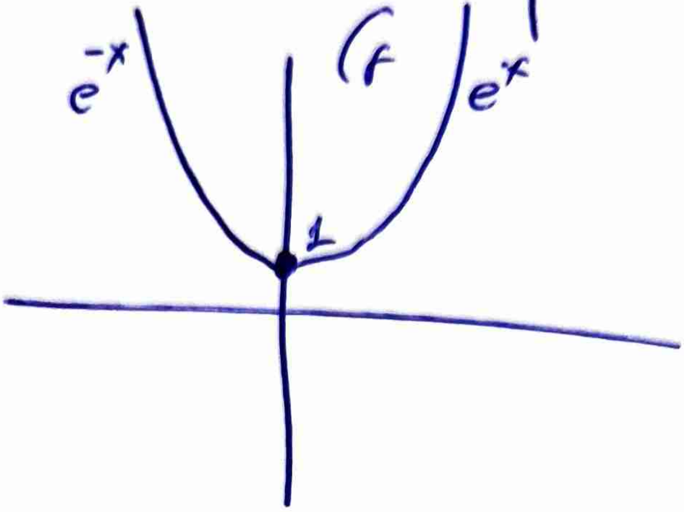
$e^{|x|} \geq 1 \Rightarrow \ln e^{|x|} \geq \ln 1 \Rightarrow |x| \geq 0$ ✓

$\rightarrow f(0) = e^0 = 1$ min f

γ $f(x) = e^{|x|} = \begin{cases} e^{-x}, & x < 0 \\ e^{x}, & x \geq 0 \end{cases}$



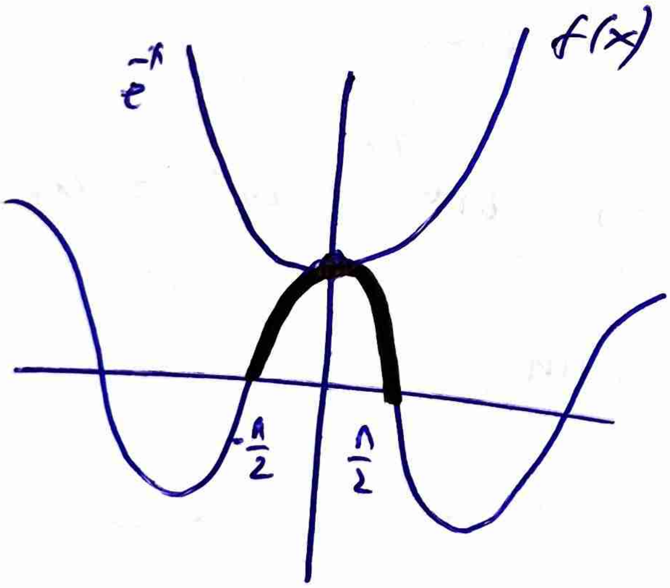




(δ) $g(x) = \sigma\upsilon\nu x \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$f(x) = g(x)$

$e^{|x|} = \sigma\upsilon\nu x.$



$f(x) \geq 1$

Το "=" για $x=0$

επίσης $0 \leq g(x) \leq 1$

Το $g(x) = 1$

"=" $x=0$.

Προφανής και μοναδική ρίζα $x=0$.

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{x^2+1}-x>0$, για κάθε $x\in(-\infty,0)$.

(Μονάδες 03)

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 09)

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$, με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $g(-x)+g(x)=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

(Μονάδες 09)

ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O.

(Μονάδες 04)

α) i) $\sqrt{x^2+1} > x$ αφού $x<0$ προφανώς ισχύει!

ii). $f(x)>0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}-x>0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}>x$

Για $x<0$ ισχύει

Για $x\geq 0$ $\sqrt{x^2+1}^2 > x^2 \Rightarrow \cancel{x^2}+1>\cancel{x^2}$

$1>0$ ✓

$f(x)>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

β) i) $g(-x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)$

$g(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}+x)$

$g(-x)+g(x)=\ln(\sqrt{x^2+1}-x)+\ln(\sqrt{x^2+1}+x)=$

$\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) =$

$= \ln\left(\sqrt{x^2+1}^{\,2}-x^2\right) = \ln(1) = 0.$

ii) Αρκει νδο περιττη.

$g(-x)+g(x)=0$

$g(-x)=-g(x)$

g περιττη