

Διατάξη πραγματικών αριθμών

1. Αν $a < b$ τότε $a - b < 0$

2. Αν a, b ομοσημοί τότε $a \cdot b > 0, \frac{a}{b} > 0$

3. Αν a, b ετεροσημοί τότε $a \cdot b < 0, \frac{a}{b} < 0$

4. Ισχύει ότι $a^2 \geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}.$

5. Αν $a^2 = 0$ τότε $a = 0$

6. Αν $a^2 + b^2 = 0$ τότε $a = b = 0$

7. Αν $a < b \quad (\Leftrightarrow) \quad a^v < b^v$
μόνο αν $a, b > 0$ και $v \in \mathbb{N}^*$

8. Αν $a < b \quad (\Leftrightarrow) \quad a^v < b^v, \quad v \text{ άφιστος},$
 $\forall a, b \in \mathbb{R}.$

Ιδιότητες Ανισοτήτων

1. Μπορώ να προσθέσω αψοβά κατά μέλη ανισοτήτων

$$\left. \begin{array}{l} \alpha < \beta \\ \gamma < \delta \end{array} \right\} \oplus \quad \alpha + \gamma < \beta + \delta.$$

2. Μπορώ να πολίσω κατά μέλη θετική ανισότητα.

$$\left. \begin{array}{l} \alpha < \beta \\ \gamma < \delta \end{array} \right\} \odot \quad \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \delta$$

3. Μπορώ να προσθέσω αψοβά εάν αριθμοί και στα δύο ανισοτήτες.
Αν $\alpha < \beta \Rightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$.

4. Αν πολίσω αρνητικό σε ανισότητα αλλάζει φορά.

$$\alpha < \beta \Rightarrow \alpha \gamma > \beta \gamma \text{ αν } \gamma < 0.$$

5. Δα διαρρω ρατα μρτη ανιδορτη

6. Δα ορρρρρ ρατα μρτη ανιδορτη

7. $A \vee \alpha < \beta$ και $B < \gamma$ τορρ
 $\alpha < \gamma$.

Άσκηση 1

$$\text{Νόο } (a-b)^2 + 8b^2 \geq 4ab.$$

$$a^2 - 2ab + b^2 + 8b^2 \geq 4ab$$

$$a^2 - 2ab + 9b^2 - 4ab \geq 0$$

$$a^2 - 6ab + 9b^2 \geq 0$$

$$(a-3b)^2 \geq 0.$$

που ισχύει.

Άσκηση 2

$$\text{Νίσο } \alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha + 6\beta \geq -13.$$

$$\alpha^2 + \beta^2 - 4\alpha + 6\beta + 13 \geq 0$$

$$\alpha^2 - 4\alpha + 4 + \beta^2 + 6\beta + 9 \geq 0$$

$$\underbrace{\alpha^2 - 4\alpha + 4}_{(\alpha-2)^2} + (\beta+3)^2 \geq 0$$

που ισχύει!

Άσκηση 3

$$\text{ΝΣΟ} \quad \alpha^2 + 4\alpha + 5 > 0$$

$$\alpha^2 + 4\alpha + 4 + 1 > 0$$

$$(\alpha + 2)^2 + 1 > 0$$

που ισχύει!

Ασκηση 4

$$\text{NB } 2a^2 + 4a + 4 > 0$$

$$a^2 + a^2 + 4a + 4 > 0$$

$$a^2 + (a+2)^2 > 0$$

now obvious!

Άσκηση 5

$$\text{Αν } \alpha < 2 < \beta \quad \forall \beta \quad \alpha^2 + 2\beta > \alpha\beta + 2\alpha.$$

$$\underbrace{\alpha^2 + 2\beta - \alpha\beta - 2\alpha}_{> 0}$$

$$\alpha(\alpha - 2) + \beta(2 - \alpha) > 0$$

$$\alpha(\alpha - 2) - \beta(\alpha - 2) > 0$$

$$\boxed{\begin{array}{c} (\alpha - 2) \cdot (\alpha - \beta) > 0 \\ \ominus \quad \ominus \\ \checkmark \end{array}}$$

$$\bullet \alpha < 2 \Rightarrow \alpha - 2 < 0$$

$$\bullet \alpha < \beta \Rightarrow \alpha - \beta < 0$$

Άσκηση 6

$$\text{Av } x > 1 \quad \text{v} \delta 0 \quad x^3 + x > x^2 + 1$$

$$x^3 + x > x^2 + 1$$

$$\underbrace{x^3 + x - x^2 - 1}_{> 0}$$

$$x^2(x-1) + x-1 > 0$$

$$\boxed{\begin{matrix} (x-1) & (x^2+1) & > 0. \\ (+) & (+) & \end{matrix}}$$

$$\bullet \quad x > 1 \Rightarrow x-1 > 0$$

$$\bullet \quad x^2 + 1 > 0$$

Άσκηση 7

$$\text{Αν } x > 1 \text{ τότε } \frac{2}{x-1} > \frac{1}{x}$$

$$\frac{2}{x-1} > \frac{1}{x}$$

• Αν $x > 1$ τότε $x > 0$

• Αν $x > 1 \Rightarrow x-1 > 0$

$$\rightarrow 2x > x-1$$

$$2x - x > -1$$

$$x > -1$$

που ισχύει!

Άσκηση 8

Να βρεθούν τα $x, y \in \mathbb{R}$

ώστε $2x^2 + y^2 + 4 - 2xy - 4x = 0.$

$$x^2 - 2xy + y^2 + x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$(x-y)^2 + (x-2)^2 = 0$$

$$\begin{cases} x-y=0 & \Rightarrow 2-y=0 \\ & \textcircled{y=2} \\ x-2=0 & \Rightarrow \textcircled{x=2} \end{cases}$$

Aufgabe 9

$$\text{Av} \quad a^2 + B^2 - 2\gamma(a + 2B) + 5\gamma^2 \leq 0$$

$$\text{vdo} \quad a = \frac{B}{2} = \gamma.$$

$$a^2 + B^2 - \underline{2a\gamma} - 4B\gamma + 5\gamma^2 \leq 0$$

$$a^2 - 2a\gamma + \gamma^2 + B^2 - 4B\gamma + 4\gamma^2 \leq 0$$

$$(a - \gamma)^2 + (B - 2\gamma)^2 \leq 0$$

$$(a - \gamma)^2 + (B - 2\gamma)^2 = 0$$

$$\begin{cases} a - \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = \gamma}$$

$$\begin{cases} B - 2\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow B = 2\gamma$$

$$\boxed{\frac{B}{2} = \gamma}$$