2025

€

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2025
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι, αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 6

Α2. Τι ονομάζουμε κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f, ορισμένης σε ένα διάστημα Δ;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.) διαφορικού λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

Μονάδες 5

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Έστω μια συνάρτηση f, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$
- $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

β) Οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες $x\widehat{O}y$ και $x'\widehat{O}y'$.

γ) Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in[0,+\infty)$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_0 και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεσή τους, $g\circ f$, είναι συνεχής στο x_0.

ε) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $-f$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα $y'y$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x$, $x>0$ και $g(x)=e^x+1$, $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι η σύνθεση της συνάρτησης g με τη συνάρτηση f είναι η συνάρτηση $(f\circ g)(x)=\ln\left(e^x+1\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Β2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f\circ g$ είναι αντιστρέψιμη (μονάδες 2) και να βρείτε τη συνάρτηση $h=(f\circ g)^{-1}$ (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Αν $h(x)=\ln\left(e^x-1\right)$, $x>0$ τότε:

Β3. i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα (μονάδες 4).

ii) Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής (μονάδες 4).

Μονάδες 8

Β4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x^4}{4}+x^3+\dfrac{x^2}{2}+x$, $x\in\mathbb{R}$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}^*$.

Γ1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$.

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή του α ώστε η f να είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Στα επόμενα ερωτήματα να θεωρήσετε ότι $\alpha=3$.

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu(f(x))}{\ln\left(f(x)-x\right)}$$

Μονάδες 6

Γ4. Έστω Ε το εμβαδόν του τριγώνου $\overset{\Delta}{OAB}$ που ορίζουν τα σημεία $O(0,0)$, $A(x,0)$ και $B(x,f(x))$, με $x>0$. Αν το x μεταβάλλεται με ρυθμό 2cm/sec, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε, όταν $x=2\text{cm}$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\alpha x$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$. Για τη συνάρτηση f ισχύει ότι:

$$e^{f(x)-1}+x\geq\sqrt{x^2+1}\ ,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

i) $f'(0)=-1$ (μονάδες 4) και

ii) $\alpha=-1$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ (μονάδες 3) και ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Δ3. Έστω F μια αρχική συνάρτηση της συνάρτησης f στο $\mathbb{R}$. Να λύσετε στο διάστημα $[0,\pi]$ την εξίσωση:

$$F(\eta\mu^2x)+F(3\eta\mu^2x)=2F(2\eta\mu^2x)$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι:

$$\int_0^1 x\eta\mu(1-f(x))dx<\frac{7-4\sqrt{2}}{6}$$

Μονάδες 7

Επαναληπτικά 2025

Α1. Απόδειξη

Α2. Ορισμός

Α3. Ορισμός

Α4. α Σ β Σ γ Λ δ Σ ε Σ

Β1. $f(x) = \ln x \, , x > 0$

$g(x) = e^x + 1 \, , x \in \mathbb{R}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln(e^x + 1)$

$x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$

$x \in \mathbb{R}$ $\quad$ $e^x + 1 > 0$

$x \in \mathbb{R}$

Άρα $\boxed{\begin{array}{l} (f \circ g)(x) = \ln(e^x + 1) \\ D_{f \circ g} = \mathbb{R} \end{array}}$

Β2. $(f \circ g)'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1} > 0$ άρα γν. αύξουσα.

$y = \ln(e^x + 1)$

$e^y = e^x + 1$

$e^y - 1 = e^x$

$x = \ln(e^y - 1)$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} (f \circ g)(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} (f \circ g)(x) = +\infty \end{array}\right\} \Sigma T_f = D_{f^{-1}} = (0, +\infty).$

$\boxed{h(x) = \ln(e^x - 1)}$

B3. i) $h(x) = \ln(e^x - 1)\,,\ x > 0$

$$h'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} > 0 \qquad h \nearrow$$

ii). $$h''(x) = \frac{e^x(e^x-1) - e^x \cdot e^x}{(e^x-1)^2}$$

$$h''(x) = \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x}}{(e^x-1)^2} = -\frac{e^x}{(e^x-1)^2} < 0$$

h κοίλη

B4. $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \ln(e^x - 1) = -\infty$

$\boxed{\varepsilon_1: x = 0}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ δεν έχει οριζόντια.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(e^x-1)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x-1} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} (h(x) - x) = \lim_{x\to+\infty} (\ln(e^x-1) - x) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \ln(e^x-1) - \ln e^x = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{e^x-1}{e^x}\right) = 0$$

$$\to \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

$\varepsilon: y = x$

$+\infty$

Γ1. $f(x) = \frac{\alpha x^4}{4} + x^3 + \frac{x^2}{2} + x \quad , \alpha \in \mathbb{R}^*$

$y - f(0) = f'(0)(x-0)$

$y - 0 = 1(x-0)$ $\quad$ $\varepsilon: y = x$

$\boxed{f'(x) = \alpha x^3 + 3x^2 + x + 1}$

Γ2. $f''(x) = 3\alpha x^2 + 6x + 1$

Για να είναι κυρτή πρέπει $f''(x) \geq 0$

$\Delta \leq 0$ και $3\alpha > 0$

$6^2 - 4 \cdot 3\alpha \cdot \cdot \leq 0$

Ελάχιστη Τιμή

$36 - 12\alpha \leq 0$

$\underline{\underline{\alpha = 3}}$

$3 - \alpha \leq 0$

$\alpha \geq 3$

Γ3. $\lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu f(x)}{\ln(f(x) - x)} = \lim_{x \to 0} \eta\mu f(x) \cdot \frac{1}{\ln(f(x) - x)}$

$= 0 \cdot 0 = 0.$

$f(x) = \frac{3}{4}x^4 + x^3 + \frac{x^2}{2} x$

Γ4. Γνωρίζω ότι $x'(t)=2$, $x(t_1)=2$, $y(t_1)=24$

$$y=\frac{3}{4}x^4+x^3+\frac{x^2}{2}+x$$

$$y(t)=\frac{3}{4}x^4(t)+x^3(t)+\frac{1}{2}x^2(t)+x(t)$$

$$y'(t)=3x^3(t)x'(t)+3x^2(t)x'(t)+x'(t)x(t)+x'(t)$$

Για $t=t_1$

$$y'(t_1)=3\cdot 2^3\cdot 2+3\cdot 2^2\cdot 2+2\cdot 2+2$$

$$y'(t_1)=48+24+4+2$$

$$y'(t_1)=78.$$

$$E=\frac{B\cdot v}{2}=\frac{x\cdot y}{2}=\frac{1}{2}xy$$

$$E(t)=\frac{1}{2}x(t)y(t)$$

$$E'(t)=\frac{1}{2}\left(x'(t)y(t)+x(t)y'(t)\right)$$

$t=t_1$

$$E'(t_1)=\frac{1}{2}(2\cdot 24+2\cdot 78)$$

$$E'(t_1)=102.$$

Δ1. i) $e^{f(x)-1}+x \geq \sqrt{x^2+1}$

$\underbrace{e^{f(x)-1}+x-\sqrt{x^2+1}}_{\varphi(x)} \geq 0 \Rightarrow \varphi(x) \geq 0$

$\varphi(x) \geq \varphi(0)$

Fermat

$\varphi'(0)=0$

$\varphi'(x)=e^{f(x)-1}f'(x)+1-\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}$

$\varphi'(0)=1\cdot f'(0)+1=0$

$f'(0)=-1$

ii). $f(x)=\sqrt{x^2+1}+ax$

$f'(x)=\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}+a$

$\underline{\underline{f(x)=\sqrt{x^2+1}-x}}$

$f'(0)=-1 \Leftrightarrow \underline{\underline{a=-1}}$

Δ2. $f(x)>0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}-x>0 \Rightarrow \sqrt{x^2+1}>x$

Αν $x \geq 0$ τοτε $\sqrt{x^2+1}^2 > x^2 \Rightarrow 1>0$ ✓

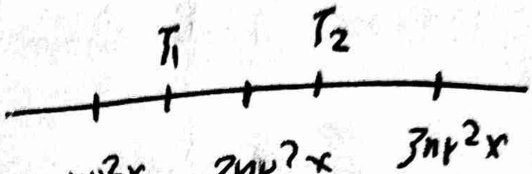
Αν $x<0$ τοτε προφανώς ισχύει.

Άρα $f(x)>0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} < 0 \quad f \downarrow$$

Δ3. $F(\eta\mu^2 x) + F(3\eta\mu^2 x) = 2F(2\eta\mu^2 x)$

Προφανής ρίζα $x=0$ και $x=\pi$.



$$F'(\xi_1) = \frac{F(2\eta\mu^2 x) - F(\eta\mu^2 x)}{2\eta\mu^2 x - \eta\mu^2 x}$$

$$F'(\xi_2) = \frac{F(3\eta\mu^2 x) - F(2\eta\mu^2 x)}{\eta\mu^2 x}$$

$$\xi_1 < \xi_2 \xRightarrow[f\downarrow]{F'\downarrow} F'(\xi_1) > F'(\xi_2)$$

$$\frac{F(2\eta\mu^2 x) - F(\eta\mu^2 x)}{\eta\mu^2 x} > \frac{F(3\eta\mu^2 x) - F(2\eta\mu^2 x)}{\eta\mu^2 x}$$

$$F(2\eta\mu^2 x) - F(\eta\mu^2 x) > F(3\eta\mu^2 x) - F(2\eta\mu^2 x)$$

$$2F(2\eta\mu^2 x) > F(3\eta\mu^2 x) + F(\eta\mu^2 x)$$

Γενικά έχω ανισότητα εκτός των άκρων.

Δ4. Νδο $\int_0^1 x\,\eta\mu(1-f(x))\,dx < \frac{7-4\sqrt{2}}{6}$

$\forall x>0$ γνωρίζω ότι $\quad \eta\mu x < x$

$$\eta\mu(1-f(x)) < 1-f(x)$$

$0<x<1$

$f\downarrow$

$f(0)>f(x)>f(1)$

$1>f(x)$

$\boxed{1-f(x)>0}$

$$x\,\eta\mu(1-f(x)) < x(1-f(x))$$

$$\int_0^1 x\,\eta\mu(1-f(x))\,dx < \int_0^1 x-xf(x)\,dx$$

$$\int_0^1 x\,\eta\mu(1-f(x))\,dx < \frac{1}{2}(x^2)_0^1 - \int_0^1 xf(x)\,dx$$

$\rightarrow \int_0^1 xf(x)\,dx = \int_0^1 x(\sqrt{x^2+1}-x)\,dx = \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx + \int_0^1 x^2 dx$

$\rightarrow \int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,dx \quad \dfrac{\sqrt{x^2+1}=t}{\begin{gathered}x^2+1=t^2\\ 2x\,dx=2t\,dt\\ x\,dx=t\,dt\end{gathered}} \quad \int_1^{\sqrt{2}} t^2\,dt =$

$$= \frac{1}{3}(t^3)_1^{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{1}{3}(\sqrt{2}^3-1) =$$

$$= \frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

32. (B) $x(f'(x)-2)+f(x)=0$

$x>0$ $f(1)=0$

Ενότητα 33

$xf'(x)-2x+f(x)=0$

$\underbrace{xf'(x)+f(x)}-2x=0$

$(xf(x)-x^2)'=0$

$xf(x)-x^2=c$

$\underline{x=1}$

$f(1)-1=c$

$c=-1$

$xf(x)=x^2-1$

$$\boxed{f(x)=\frac{x^2-1}{x}}$$

8) $f(x) = x f'(x) \ln x \quad , x>1 \qquad f(e)=1$

$x f'(x) \ln x - f(x) = 0$

$$\boxed{f'(x) - \frac{1}{x\ln x} f(x) = 0}$$

$$g(x) = -\frac{1}{x \ln x}$$

$$\boxed{G(x) = -\ln(\ln x)}$$

$$e^{G(x)} = e^{-\ln(\ln x)} = \frac{1}{e^{\ln(\ln x)}} = \boxed{\frac{1}{\ln x}}$$

$$\frac{1}{\ln x} f'(x) - \frac{1}{\ln x}\frac{1}{x \ln x} f(x) = 0$$

$$\left(\frac{1}{\ln x} f(x)\right)' = 0 .$$

$\underline{\underline{f(x) = \ln x}}$

$$\frac{1}{\ln x} f(x) = c$$

$\underline{x=e}$

$\underline{\underline{c=1}}$

Πολλαπλασιαστής Euler

Μορφή: $f'(x) + g(x)f(x) = 0$

Βρίσκω παράγουσα $G(x)$ της $g(x)$.

Πολλ/ζω παντού με $e^{G(x)}$

$$e^{G(x)} f'(x) + g(x) e^{G(x)} f(x) = 0$$

$$\left(e^{G(x)} f(x)\right)' = 0$$

$$e^{G(x)} f(x) = c.$$

ε) $f'(x)\,\text{συν}x = e^x\,\text{συν}^2x - f(x)\,\text{ημ}x$

$x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $f(0)=1$

$$f'(x)\,\text{συν}x + f(x)\,\text{ημ}x = e^x\,\text{συν}^2x$$

$$\frac{f'(x)\,\text{συν}x + f(x)\,\text{ημ}x}{\text{συν}^2x} = e^x$$

$$\left(\frac{f(x)}{\text{συν}x}\right)' = (e^x)'$$

$$\frac{f(x)}{\text{συν}x} = e^x + c$$

$\underline{x=0}$

$1 = 1 + c$ $\quad c = 0$

$$f(x) = e^x\,\text{συν}x$$

34. (B) $f'(x) = \frac{x+1}{x} f(x)$, $x>0$ $f(1)=e$.

$f'(x) - \frac{x+1}{x} f(x) = 0$

$f'(x) - \left(1-\frac{1}{x}\right) f(x) = 0$

$g(x) = -\left(1-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - 1$

$G(x) = \ln x - x$

$e^{G(x)} = e^{\ln x - x} = \frac{e^{\ln x}}{e^x} = \frac{x}{e^x} = \underline{\underline{x e^{-x}}}$

$x e^{-x} f'(x) - \left(1-\frac{1}{x}\right) x e^{-x} f(x) = 0$

$\left(x e^{-x} f(x)\right)' = 0$

$x e^{-x} f(x) = c \rightarrow f(x) = \frac{1}{x e^{-x}}$

$\underline{\underline{x=1}}$ $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

$e^{-1} f(1) = c$ $\boxed{c=1}$

$e^{-1} e^{1} = c$

34. (Y) $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x^2+1} f(x)$ $\quad f(0)=1$

$$f'(x) - \frac{(x-1)^2}{x^2+1} \cdot f(x) = 0$$

$$f'(x) - \frac{x^2-2x+1}{x^2+1} f(x) = 0$$

$$f'(x) - \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2+1}\right) f(x) = 0$$

$$f'(x) - \left(1 - \frac{2x}{x^2+1}\right) f(x) = 0$$

$$\boxed{f'(x) + \left(\frac{2x}{x^2+1} - 1\right) f(x) = 0}$$

$$g(x) = \frac{2x}{x^2+1} - 1$$

$$G(x) = \ln(x^2+1) - x$$

$$\left[\ln(x^2+1) - x\right] f'(x) + \left(\ln(x^2+1) - x\right)\left(\frac{2x}{x^2+1} - 1\right) f(x) = ?$$

$$\left(\ln(x^2+1)\, f(x) \right)' = 0$$

$$\ln(x^2+1)\, f(x) = C$$

$$\underline{x=0}$$

$$f(0) = C$$

$$1 = C$$

$$\underline{\ln(x^2+1)\, f(x) = 1}$$

$$f(x) = \frac{1}{\ln(x^2+1)}$$

36. (B) $2xf'(x)f(x)+1=x$, $x>0$ $f(1)=1$

$$2f'(x)f(x)+\frac{1}{x}=1$$

$$\left(f^2(x)+\ln x\right)'=(x)'$$

$$f^2(x)+\ln x=x+c$$

$\underline{x=1}$

$$f^2(1)+0=1+c$$

$$1=1+c \qquad \underline{\underline{c=0}}$$

$$f^2(x)=x-\ln x$$

$$f^2(x)=\sqrt{x-\ln x}^{\,2}$$

$\ln x\le x-1$
$1\le x-\ln x$
$0<x-\ln x$

$$|f(x)|=|\sqrt{x-\ln x}|$$

$$|f(x)|=\sqrt{x-\ln x}$$

$$f(x)=\sqrt{x-\ln x}$$

$\underline{\text{Ρίζα } f(x)}$

$f(x)=0$
$|f(x)|=0.$
Άτοπο!

$f(x)\neq 0 \Rightarrow f(x)>0$ ή $f(x)<0.$

$f(1)=1$ $\underline{\underline{f(x)>0}}$

(γ) $f'(x)\left(e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right)=2 \qquad f(0)=0$

$$f'(x)e^{f(x)}+f'(x)e^{-f(x)}=2$$

$$\left(e^{f(x)}-e^{-f(x)}\right)'=(2x)'$$

$$e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x+c$$

$\underline{x=0}$

$$1-1=0+c \qquad c=0$$

$$e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x$$

$$e^{f(x)}-\frac{1}{e^{f(x)}}=2x$$

$$e^{2f(x)}-1=2x\,e^{f(x)}$$

$$e^{2f(x)}-2x\,e^{f(x)}=1$$

$$e^{2f(x)}-2xe^{f(x)}+x^2=x^2+1$$

$$\left(e^{f(x)} - x\right)^2 = \sqrt{x^2+1}^{\,2}$$

$$|\underbrace{e^{f(x)} - x}_{g(x)}| = |\overset{+}{\sqrt{x^2+1}}|$$

$$|\overset{+}{g(x)}| = \sqrt{x^2+1}$$

Ρίζες $g(x)$

$g(x) = 0$

$|g(x)| = 0$

$\sqrt{x^2+1} = 0$

Αδύνατη

$g(x) > 0$ ή $g(x) < 0$.

$g(0) = e^{f(0)} - 0 = 1$

$g(x) > 0$

$$g(x) = \sqrt{x^2+1}$$

$$e^{f(x)} - x = \sqrt{x^2+1}$$

$$e^{f(x)} = \sqrt{x^2+1} + x$$

$$f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right).$$

33. (B) $x f'(x) = (x-1) e^{-f(x)}$, $x>0$

$\Rightarrow x f'(x) = (x-1) \frac{1}{e^{f(x)}}$

$x f'(x) e^{f(x)} = x-1$

$f'(x) e^{f(x)} = \frac{x-1}{x}$

$\left(e^{f(x)}\right)' = 1 - \frac{1}{x} = (x - \ln x)'$

$e^{f(x)} = x - \ln x + C$

$x=1$

$1 = 1 + C \quad C = 0$

$e^{f(x)} = x - \ln x$

$f(x) = \ln(x - \ln x)$

SOS

$2f(x) f'(x) = \left(f^2(x)\right)'$

$e^{f(x)} f'(x) = \left(e^{f(x)}\right)'$

$\frac{f'(x)}{f(x)} = \left(\ln f(x)\right)'$

$\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \left(-\frac{1}{f(x)}\right)'$

$f'(x)\,\text{ημ} f(x) = \left(-\text{συν} f(x)\right)'$

(5) $f'(x) + 2x f(x) = 0$

$x > 0$

$f(1) = e$

$f(x) \neq 0$

$\frac{f'(x)}{f(x)} + 2x = 0$

$\left(\ln(f(x)) + x^2 \right)' = 0$

$\ln f(x) + x^2 = c$

$x = 1$

$1 + 1 = c$ $\quad c = 2$

$\ln f(x) = 2 - x^2$

$f(x) = e^{2-x^2}$

B' τρόπος

$f'(x) + 2x f(x) = 0$

$g(x) = 2x$

$G(x) = x^2$

$e^{G(x)} = e^{x^2}$

$\Rightarrow e^{x^2} f'(x) + 2x e^{x^2} f(x) = 0$

$\left(e^{x^2} f(x) \right)' = 0$

$e^{x^2} f(x) = c$

$x = 1$

$e f(1) = c$

$c = e^2$

$$e^{x^2} f(x) = e^2$$

$$f(x) = \frac{e^2}{e^{x^2}}$$

$$\boxed{f(x) = e^{2-x^2}}$$

35. (B) $f'(x)\ln x + \frac{f(x)}{x} = 1 \quad x>0.$

$$\left(f(x)\cdot \ln x\right)' = (x)'$$

$$f(x)\ln x = x + c$$

$\underline{x=1}$

$$0 = 1 + c$$

$$c = -1$$

$$f(x)\ln x = x-1$$

$$f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$$

$$x \in (0,1)\cup(1,+\infty)$$

$$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\ln x} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\frac{1}{x}} = 1$$

$$\underline{\underline{f(1)=1}}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\ln x}, & x\in(0,1)\cup(1,+\infty) \\ 1, & x=1. \end{cases}$$

1. $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}, \; x > -1$

Ενότητα 38

F παράγουσα f $\qquad F(0) = 0$

F

f

f'

f''

(a) $F'(x) = f(x) = \dfrac{e^x}{x+1} > 0$

$\boxed{F \nearrow}$

$$F''(x) = f'(x) = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{e^x(x+1-1)}{(x+1)^2} = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$$

$$F''(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$$

$\rightarrow F''(x) = 0 \Rightarrow xe^x = 0 \Rightarrow x = 0$

x		0	
F''	$-$		$+$
F	$\cap$		$\cup$

$y - F(0) = F'(0)(x - 0)$

$y - 0 = f(0)\, x$

$\boxed{y = x}$

③ $F(x) = x$

$\forall x > 0$ η $F(x)$ κυρτή $F(x) > x$

$\forall x < 0$ η $F(x)$ κοίλη $F(x) < x$

$F(x) = x \iff \underline{\underline{x = 0}}$

(γ) ΝΔο $\displaystyle\int_0^1 \frac{F(x)}{x^2+1}\,dx > \frac{\ln 2}{2}$

$\forall x > 0$ η $F(x)$ κυρτή $\Rightarrow F(x) > x$

$$\frac{F(x)}{x^2+1} > \frac{x}{x^2+1}$$

$$\int_0^1 \frac{F(x)}{x^2+1}\,dx > \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$\to \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\Big(\ln(x^2+1)\Big)_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2.$$

2. $f(x) = \dfrac{e^x}{x-1}$, $x>1$.

F

f

f'

f''

$F(2)=0$

ⓐ $F'(x) = f(x) = \dfrac{e^x}{x-1} > 0$

$F \nearrow$

$F(x^2+2) > 0$

$F(x^2+2) > F(2)$

$F \nearrow$

$x^2+\cancel{2} > \cancel{2}$

$x^2 > 0$ $\qquad \underline{\underline{x \neq 0}}$

Ⓑ $F''(x) = f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)-e^x}{(x-1)^2} = \dfrac{e^x(x-1-1)}{(x-1)^2}$

$F''(x) = \dfrac{e^x(x-2)}{(x-1)^2}$

x	1	2
F''	$-$	$+$
F	$\frown$	$\cup$

$y - F(2) = F'(2)(x-2)$

$y - 0 = f(2)(x-2)$

$\boxed{y = e^2(x-2)}$

① E: C_F, $x'x$, $x=3$.

$$E=\int_2^3 |\overset{(+)}{F(x)}|\,dx = \int_2^3 F(x)\,dx$$

$\rightarrow F(x)=0 \quad \Rightarrow F(x)=F(2)$

F: 1-1

$\underline{\underline{x=2}}$

$x>2$

$F \nearrow$

$F(x)>F(2)$

$F(x)>0$

Ndo $2E>e^2$

Ndo $E>\frac{e^2}{2}$

$$\Rightarrow \boxed{\int_2^3 F(x)\,dx > \frac{e^2}{2}}$$

$\forall x>2$ η F κυρτή $F(x)>e^2(x-2)$

$$\int_2^3 F(x)\,dx > \int_2^3 e^2(x-2)\,dx$$

$$\rightarrow \int_2^3 e^2(x-2)\,dx = e^2\int_2^3 x-2\,dx$$

$$= e^2\left(\frac{1}{2}(x^2)_2^3 - 2(x)_2^3\right)$$

$$= e^2\left(\frac{5}{2} - 2\right) = e^2\left(\frac{5}{2} - \frac{4}{2}\right) = \frac{e^2}{2}$$

Apa $\int_2^3 f(x)\,dx > \frac{e^2}{2}$

ΠΡΟΣΟΧΗ

Μορφη : $f'(x) = f(x)$

$\Longrightarrow f(x) = ce^{x}$

$f'(x) = f(x)$

$f'(x) - f(x) = 0 \longrightarrow e^{-x} f'(x) - f(x) e^{-x} = 0$

$g(x) = -1$

$G(x) = -x$

$e^{G(x)} = e^{-x}$

$\left(e^{-x} f(x)\right)' = 0$

$e^{-x} f(x) = c$

$\frac{1}{e^{x}} f(x) = c$

$\underline{\underline{f(x) = ce^{x}}}$

Επόμενο Μάθημα

Δευτέρα 30/3

Πανελλήνιες 2024

Πανελλήνιες 2024 Επαναληπτικές.

Νέα	Παλιά
	33
32 αγ	16 αβ
33 αγ	17 α
34 α	23 α
35 α	25
36 α.	29
	24 αγ