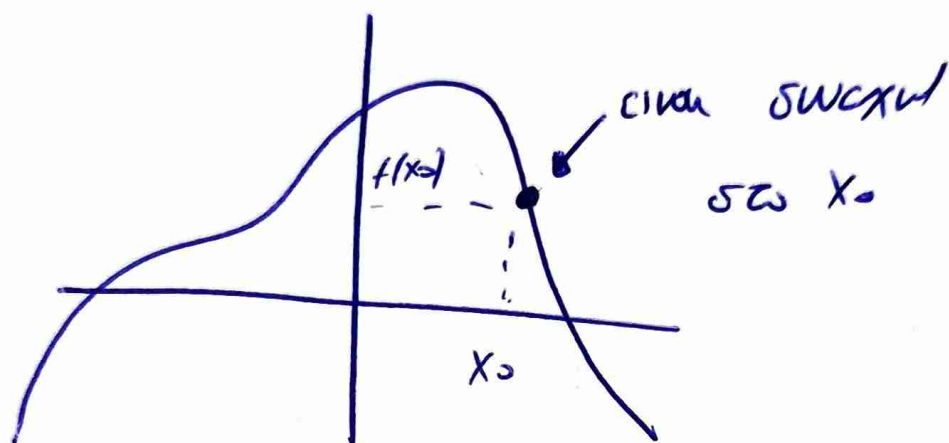


Σημειώσεις

1. Η $f(x)$ είναι συνεχής στο x_0

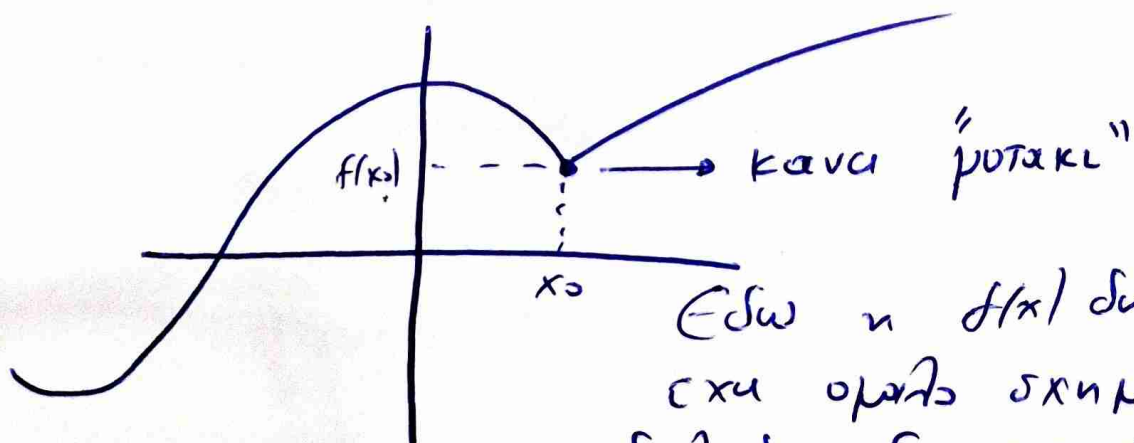
$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$



2. Η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0

αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ υπάρχει και

είναι πραγματικό αριθμό,



Εδώ η $f(x)$ δεν
έχει ομοιόμορφο
σχήμα δεν είναι παραγ/μη

Όταν το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

υπάρχει και είναι πραγματικό

αριθμό τότε λέμε ότι η

$f(x)$ είναι παραγωγισμένη στο

x_0 και συμβολίζουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l$$

Η παραγώγος της f στο x_0

Παραδύγμα

Εστω $f(x) = \sqrt{x-1}$

ψάχνω την παράγωγο της $f(x)$

στο $x_0 = 4$

$$f'(4) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{3}}{x-4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x-1} - \sqrt{3})(\sqrt{x-1} + \sqrt{3})}{(x-4)(\sqrt{x-1} + \sqrt{3})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x-1}^2 - \sqrt{3}^2}{(x-4)(\sqrt{x-1} + \sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\cancel{x-4}}{(x-4)(\sqrt{x-1} + \sqrt{3})} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Παραδειγμα

$$\text{Εστω } f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

Είναι συνεχής στο 0;

$$\begin{aligned} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0 \\ \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)} \right\} \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= 0 \\ f(0) &= 0^2 = 0 \end{aligned}$$

Άρα $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ Συνεχής στο 0

Єнаа нап/мч 820 0;

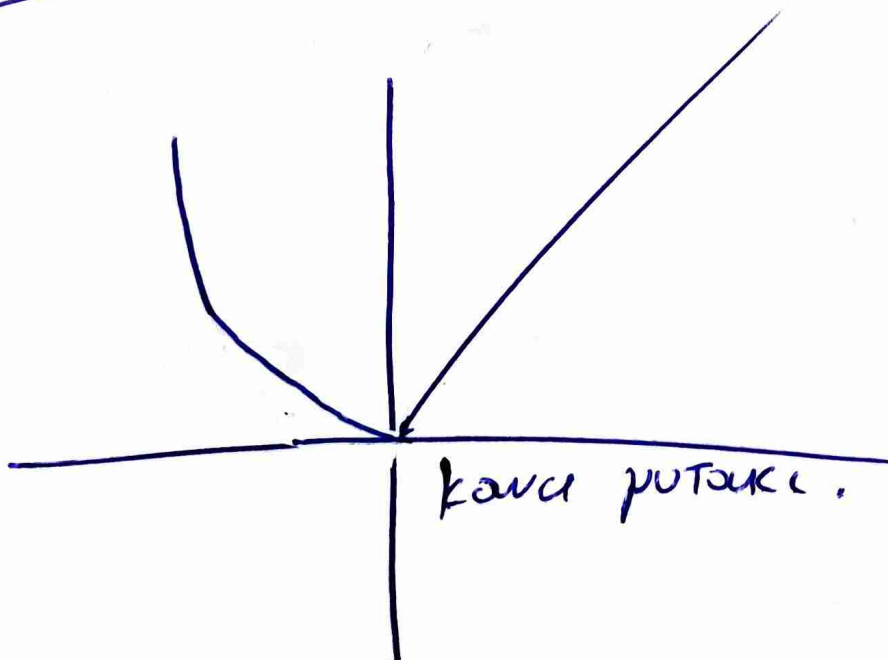
$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

H $f(x)$ єна нап/мч 820 0

єнаа 820 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

єна 0 нап/мч.



Εστω $f(x) = x^3$

Ψάχνω να βρω την παράγωγο της
στο $x_0 = 1$

Χαροκίνητος Τρόπος

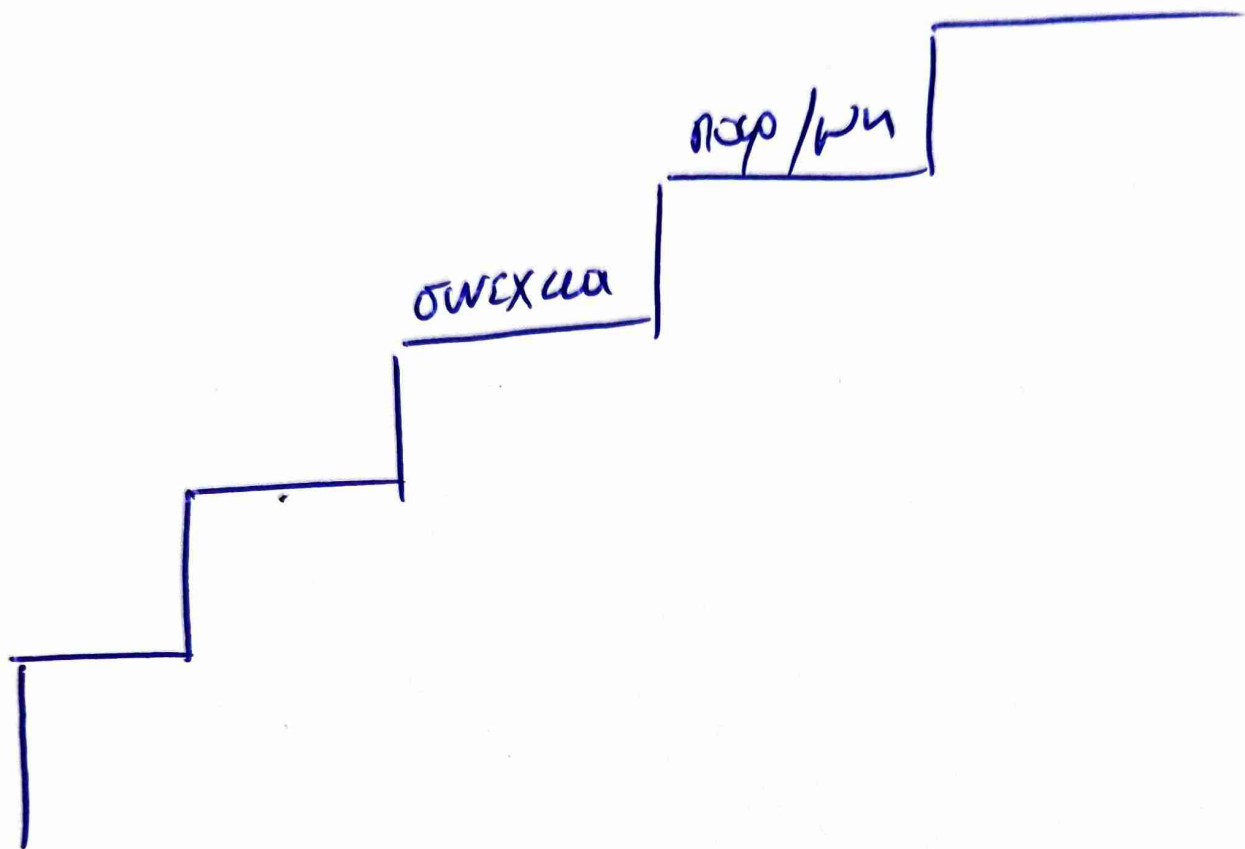
$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{x-1}} = 3$$

Αυτόματος Τρόπος

$$f'(x) = 3x^2$$

$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 = 3$$



- Αν n & f είναι συνεχώς δω σημαίνει
ότι είναι και παρ/μν.
- Αν n & δω είναι συνεχώς δω
είναι παρ/μν.
- Αν n & f είναι παρ/μν είναι συνεχώς.
- Αν n & δω είναι παρ/μν τότε
δω συμπίπτει αν είναι συνεχώς

κανονες 1 παραγυγιου

$$1. (c)' = 0$$

$$2. (x)' = 1$$

$$3. (x^v)' = v \cdot x^{v-1}$$

$$4. (e^x)' = e^x$$

$$5. (\sin x)' = \cos x$$

$$6. (\cos x)' = -\sin x$$

$$7. (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$8. (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$9. \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$10. (a^x)' = a^x \ln a$$

$$11. (\exp x)' = \exp x$$

$$12. (\exp x)' = \exp x$$

каводд Напог/он

2

$$1. [f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$2. (c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

$$3. [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$4. \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Παραδείγματα.

1. $f(x) = \sqrt{x} - \varepsilon\psi x - \ln x$

$$f'(x) = (\sqrt{x})' - (\varepsilon\psi x)' - (\ln x)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x}$$

2. $f(x) = 5x^3 - 2\ln x - \frac{4}{x}$

$$f(x) = (5x^3)' - (2\ln x)' - \left(\frac{4}{x}\right)'$$

$$f(x) = 5 \cdot (x^3)' - 2 \cdot (\ln x)' - 4 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'$$

$$f(x) = 5 \cdot 3x^2 - 2 \cdot \frac{1}{x} - 4 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f(x) = 15x^2 - \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2}$$

$$3. \quad \underline{f(x) = (x^2 - 2x) \cdot (x^3 - 1)}$$

$$f'(x) = (x^2 - 2x)'(x^3 - 1) + (x^2 - 2x)(x^3 - 1)'$$

$$f'(x) = (2x - 2)(x^3 - 1) + (x^2 - 2x)(3x^2 - 0)$$

$$4. \quad \underline{f(x) = \frac{\ln x}{\ln^2 x}}$$

$$f'(x) = \frac{(\ln x)' \ln^2 x - \ln x (\ln^2 x)'}{\ln^4 x}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \ln^2 x - \ln x \cdot 2 \ln x}{\ln^4 x}$$

Азмиш

1. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 5x + 1$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3\right)' - (2x^2)' + (5x)' + (1)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(x^3)' - 2 \cdot (x^2)' + 5 \cdot (x)' + 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{3} 3x^2 - 2 \cdot 2x + 5 \cdot 1$$

$$f'(x) = x^2 - 4x + 5$$

2. $f(x) = 2\ln x - 354x$

$$f'(x) = (2\ln x)' - (354x)'$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{x} - 3 \cdot \left(-\frac{1}{n^2 x}\right)$$

$$3. \quad \underline{f(x) = (x^2 - x)\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = (x^2 - x)' \sqrt{x} + (x^2 - x)(\sqrt{x})'$$

$$f'(x) = (2x - 1)\sqrt{x} + (x^2 - x) \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$4. \quad \underline{f(x) = \frac{nx}{x^3}}$$

$$f'(x) = \frac{(nx)' x^3 - nx \cdot (x^3)'}{(x^3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{0 \cdot nx \cdot x^3 - nx \cdot 3x^2}{x^6}$$

$$5. \underline{f(x) = x \ln x - e^x}$$

$$f(x) = (x \ln x)' - (e^x)'$$

$$f'(x) = (x)' \ln x + x (\ln x)' - e^x$$

$$f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - e^x$$

$$\boxed{f'(x) = \ln x + 1 - e^x}$$

$$6. f(x) = \frac{x \sin x}{x^2 - 1}$$

$$f'(x) = \frac{(x \sin x)'(x^2 - 1) - x \sin x (x^2 - 1)'}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(1 \cdot \sin x - x \cos x)(x^2 - 1) - x \sin x(2x)}{(x^2 - 1)^2}$$

Tε205

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 5x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 5x}} \cdot (x^2 - 5x)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 5x}} (2x - 5)$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) g'(x)$$

Επόμενο μάθημα

Ημερομηνία μαθήματος: 24/9/26

Ώρα μαθήματος: 17:30 .

Ασκήσεις

Ενότητες 15

② α β γ

③ α

⑤ α γ

⑬

Ενότητα 16

⑨

⑬

⑭

⑯

⑰ .

παρατηρήσεις