

9.

 $f \downarrow$

Evozeta

4

$$\textcircled{a} \quad f(x) > f(2)$$

 $f \downarrow$

$$\underline{\underline{x < 2}}$$

$$\textcircled{b} \quad f(x^2 - 3x) - f(6 - 4x) < 0$$

$$f(x^2 - 3x) < f(6 - 4x)$$

 $f \downarrow$

$$x^2 - 3x > 6 - 4x$$

$$x^2 + x - 6 > 0$$

x	-3	2
$x^2 + x - 6$	+	-

$$x \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$$

$$\textcircled{8} \quad f(x^4+2) \geq f(x^2+2)$$

$f \downarrow$

$$x^4+2 \leq x^2+2$$

$$x^4-x^2 \leq 0$$

$$x^2(x^2-1) \leq 0$$

x	-1	0	1
x^2	+	+	+
x^2-1	+	-	+
$x^2(x^2-1)$	+	-	+

$$x \in [-1, 1]$$

$$\textcircled{8} \quad f(f(5x-2)) < f(f(4x+1))$$

$f \downarrow$

$$f(5x-2) > f(4x+1)$$

$f \downarrow$

$$5x-2 < 4x+1$$

$$\underline{\underline{x < 3}}$$

10. $f(x) = x^5 + x - 2, \quad x \in \mathbb{R}.$

Ⓐ $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^5 < x_2^5$

$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2$

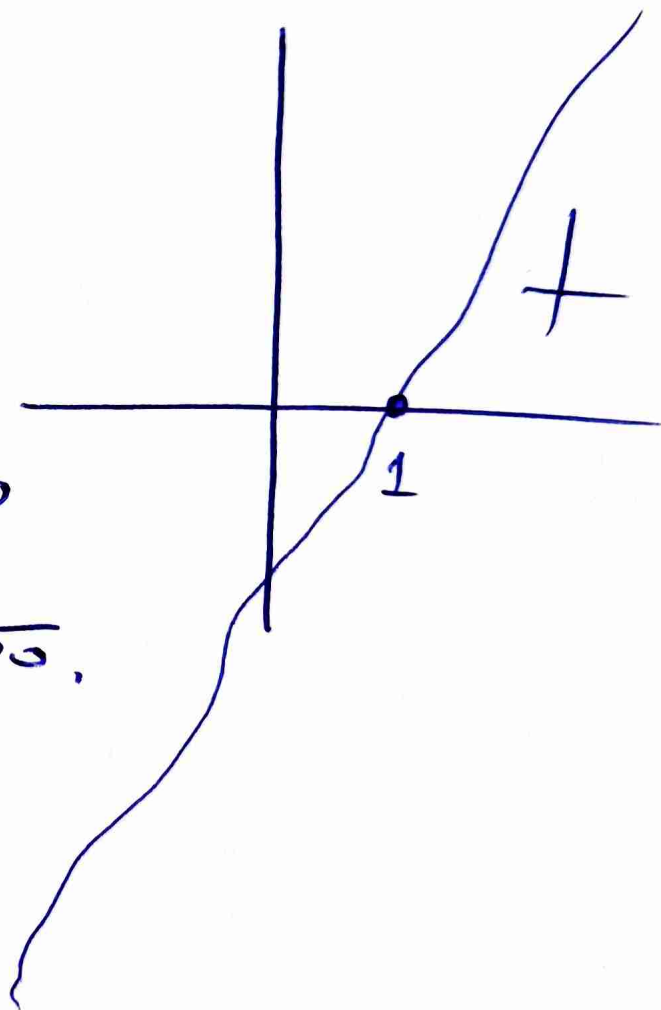
} ⊕ ↗ ↘

Ⓑ Проверка p, q $x=1$

x	1
$f(x)$	- ⊕ +

$x < 1 \Rightarrow f(x) < f(1) \Rightarrow f(x) < 0$

$x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) \Rightarrow f(x) > 0.$



$$\textcircled{1} \text{ i) } f(x) > 0 \Rightarrow f(x) > f(1) \\ \nearrow \\ \underline{\underline{x > 1}}$$

$$\text{ii) } x^5 + x + 2 < 0$$

$$x^5 + x < -2$$

$$x^5 + x - 2 < -4$$

$$f(x) < f(-1)$$

$$\nearrow$$

$$x < -1$$

$$\text{iii) } f(x^5 + x) \geq 32$$

$$f(x^5 + x) \geq f(2)$$

$$\nearrow$$

$$x^5 + x \geq 2$$

$$x^5 + x - 2 \geq 0$$

$$f(x) \geq f(1)$$

$$\underline{\underline{x \geq 1}}$$

14. $f(x) = e^{-x} - x - 1$, $D_f = \mathbb{R}$.

(a) $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \Rightarrow e^{-x_1} > e^{-x_2}$

$x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 - 1 > -x_2 - 1$ (+)

$f(x_1) > f(x_2)$ $f \downarrow$

(b) i) $x e^x < 1 - e^x$

$$\frac{x e^x}{e^x} < \frac{1}{e^x} - \frac{e^x}{e^x}$$

$$x < e^{-x} - 1$$

$$0 < e^{-x} - x - 1$$

$$f(0) < f(x)$$

$f \downarrow$

$$0 > x$$

$$ii) \quad e^x < \frac{1}{x+1} \quad (-1, +\infty).$$

$$e^x(x+1) < 1$$

$$\frac{e^x(x+1)}{e^x} < \frac{1}{e^x}$$

$$x+1 < e^{-x}$$

$$0 < e^{-x} - x - 1$$

$$f(x) \neq f(x)$$

$$0 > x$$

$$\text{iii)} \quad f(3x-2) + x > e^{-x} - 1$$

$$f(3x-2) > e^{-x} - x - 1$$

$$f(3x-2) > f(x)$$

$$\downarrow f$$

$$3x-2 < x$$

$$3x - x < 2$$

$$2x < 2$$

$$x < 1$$

$$\text{iv)} \quad e^{-f(x)} - f(x) - 1 > 0$$

$$f(f(x)) > f(0)$$

$$\downarrow f$$

$$f(x) < 0$$

$$f(x) < f(0)$$

$$\underline{x > 0}$$

11.

$$f(x) = e^x + \ln(x+1) - 1, \quad \underline{\underline{x > -1}}$$

$$\bullet x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$$

$$\bullet x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1$$

$$\ln(x_1 + 1) - 1 < \ln(x_2 + 1) - 1$$

) $\oplus$ $f \nearrow$

Answer

$$f(x) > 0$$

$$f(x) > f(0)$$

$f \nearrow$

$$x > 0$$



15.

$$f(x) = \ln x + x - 1, \quad x > 0$$

$$(a) \quad x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2$$

⊕

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

↑

$$(b) \quad i) \quad x^2 + \ln(x^2 + 1) > 0$$

$$\ln(x^2 + 1) + x^2 + 1 - 1 > 0$$

$$f(x^2 + 1) > f(1)$$

↑

$$x^2 + 1 > 1$$

$$x^2 > 0$$

$$x \in \mathbb{R}^*$$

$$11). \ln \frac{3x}{x^2+2} < x^2-3x+2$$

$$\ln 3x - \ln(x^2+2) < x^2-3x+2$$

$$\ln 3x + 3x - 1 < \ln(x^2+2) + x^2 + 2 - 1$$

$$f(3x) < f(x^2+2)$$

$f \uparrow$

$$3x < x^2+2$$

$$0 < x^2-3x+2$$

x	1	2
x^2-3x+2	+	-

$$x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

2. Exercise 6

• $x_1 < x_2$

• $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow -e^{x_1} > -e^{x_2}$
 $1 - e^{x_1} > 1 - e^{x_2}$

(7)

$$\ln(1 - e^{x_1}) > \ln(1 - e^{x_2})$$

$$-\ln(1 - e^{x_1}) < -\ln(1 - e^{x_2})$$

$$x_1 - \ln(1 - e^{x_1}) < x_2 - \ln(1 - e^{x_2})$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

$f \uparrow$

f is increasing

B' rponst

$$f(x) = x - \ln(1 - e^x)$$

$$f(x) = \ln e^x - \ln(1 - e^x)$$

$$f(x) = \ln \left(\frac{e^x}{1 - e^x} \right)$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

ooo

$$x_1 = x_2$$

$$4. \quad f(x^2 - 3x) = f(x - 3)$$

$$f(0) = 1$$

$$x^2 - 3x = x - 3$$

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x = 1)$$

$$(x = 3)$$

$$⑧ \quad f(f(x) - 1) = 3$$

$$f(f(x) - 1) = f(2)$$

$$f(0) = 1$$

$$f(x) - 1 = 2$$

$$f(x) = 3$$

$$f(x) = f(2)$$

$$f(0) = 1$$

$$(x = 2)$$

$$5. \quad f(x) = x^5 + 2x^3 - 3$$

(a) Curva $f \uparrow$

(b) $x^5 + 2x^3 = 3$

$$x^5 + 2x^3 - 3 = 0$$

$$f(x) = 0$$

$$f(x) = f(1)$$

$$f(1) = 1$$

$$x = 1$$

(c) $2^5 - p^5 = 2p^3 - 22^3$

$$2^5 + 22^3 - 3 = p^5 + 2p^3 - 3$$

$$f(2) = f(p)$$

$$f(2) = 1$$

$$\underline{\underline{2 = p}}$$

$$\textcircled{8} \quad (3x-2)^5 + 2(3x-2)^3 - 3 = 0$$

$$f(3x-2) = f(1)$$

$$f(1) = 1$$

$$3x-2 = 1$$

$$3x = 3$$

$$\boxed{x = 1}$$

$$6. \quad f(x) = \frac{e^x}{e^{x+1} - 1}$$

$$e^{x+1} - 1 \neq 0$$

$$e^{x+1} \neq 1$$

$$x+1 \neq 0$$

$$x \neq -1$$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\frac{e^{x_1}}{e^{x_1+1} - 1} = \frac{e^{x_2}}{e^{x_2+1} - 1}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$e^{x_1} (e^{x_2+1} - 1) = e^{x_2} (e^{x_1+1} - 1)$$

$$e^{x_1} e^{x_2+1} - e^{x_1} = e^{x_2} e^{x_1+1} - e^{x_2}$$

$$\cancel{e^{x_1+x_2+1}} - e^{x_1} = \cancel{e^{x_2+x_1+1}} - e^{x_2}$$

$$e^{x_1} = e^{x_2}$$

$$\underline{\underline{x_1 = x_2}}$$

$$\textcircled{B} (e - e^{-x}) f(x^2) = 1$$

$$\left(e - \frac{1}{e^x}\right) f(x^2) = 1$$

$$\left(\frac{e \cdot e^x}{e^x} - \frac{1}{e^x}\right) f(x^2) = 1$$

$$\left(\frac{e^{x+1} - 1}{e^x}\right) f(x^2) = 1$$

$$f(x^2) = \frac{e^x}{e^{x+1} - 1}$$

$$f(x^2) = f(x)$$

$$f(3) = 1$$

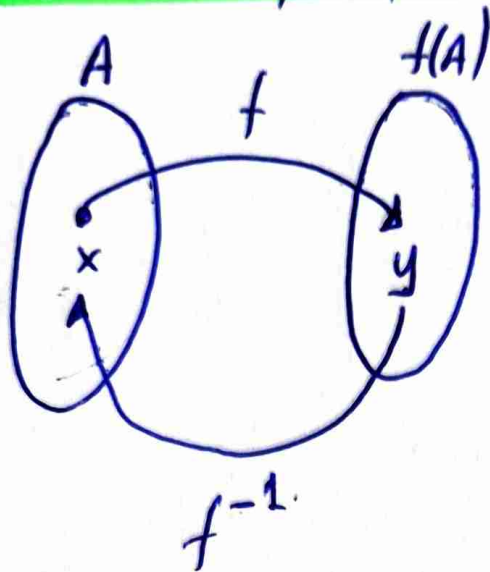
$$x^2 = x$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0 \quad \textcircled{x=0} \quad \textcircled{x=1}$$

Αντιστροφή

Συνάρτηση



A : Πεδίο ορισμού f
 $f(A)$: Συνολο Τιμών f

$$f(x) = y \quad (\Leftrightarrow) \quad x = f^{-1}(y)$$

ΣΟΣ: Το Πεδίο ορισμού της αντιστροφής είναι το συνολο τιμών της $f(x)$

ΣΟΣ $f(f^{-1}(x)) = x, x \in f(A)$

$$f^{-1}(f(x)) = x, x \in A$$

ΣΟΣ: Αν $f(6) = 8 \quad (\Leftrightarrow) \quad f^{-1}(8) = 6$

ΣΟΣ: Για να αντιστρέφεται η $f(x)$ πρέπει να είναι 1-1

Άσκηση 1

$$\underline{\underline{D_f = \mathbb{R}}}$$

- Νόο η $f(x) = e^x - 1$ αντιστρέφεται
και να βρω την αντιστροφή $f^{-1}(x)$

$$f(x) = e^x - 1$$

$$y = e^x - 1$$

Λύνω ως προς x

$$y+1 = e^x$$

$$y+1 > 0$$

$$y > -1$$

$$\ln(y+1) = \ln e^x$$

$$\ln(y+1) = x$$

$$f^{-1}(y) = \ln(y+1)$$

ή
η

$$\boxed{f^{-1}(x) = \ln(x+1)}$$

$$D_{f^{-1}} = (-1, +\infty)$$

Tip

Τότε αν το y είναι θετικό ή αρνητικό,

$$f \circ f^{-1} = 1$$

$$\bullet x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$$

$$e^{x_1} - 1 < e^{x_2} - 1$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

$f \nearrow$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$(\text{отн } f(x) = f(x_2) \implies \dots \implies x_1 = x_2 \quad f(3) = 1$$

$$y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$y(e^x + 1) = e^x - 1$$

$$ye^x + y = e^x - 1$$

$$ye^x - e^x = -1 - y$$

$$e^x(y - 1) = -1 - y$$

$$e^x = \frac{-1 - y}{y - 1}$$

$$x = \ln\left(\frac{-1 - y}{y - 1}\right)$$

$$f^{-1}(y) = \ln\left(\frac{-1 - y}{y - 1}\right)$$

$$f^{-1}(x) = \ln\left(\frac{-1 - x}{x - 1}\right)$$

$$D_{f^{-1}} = (-1, 1)$$

$$\frac{-1 - y}{y - 1} > 0$$

y	-1	1
-1-y	+	-
y-1	-	+
-	-	+

$$y \in (-1, 1)$$

$$f: (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = (x-1)^2 + 2$$

$$D_f = (-\infty, 1]$$

$$\bullet x_1 \leq x_2 \Rightarrow \underset{\ominus}{x_1 - 1} \leq \underset{\ominus}{x_2 - 1}$$

$$\Rightarrow (x_1 - 1)^2 \geq (x_2 - 1)^2$$

$$(x_1 - 1)^2 + 2 \geq (x_2 - 1)^2 + 2$$

$$y = (x-1)^2 + 2$$

$$y \geq 0 \quad f(x_1) \geq f(x_2)$$

$f \downarrow$

$$y - 2 = (x-1)^2$$

$$y - 2 \geq 0$$

$$y \geq 2$$

$$\sqrt{y-2}^2 = (x-1)^2$$

$$\left| \overset{+}{\sqrt{y-2}} \right| = \left| \overset{-}{x-1} \right|$$

$$\sqrt{y-2} = 1 - x$$

$$x = 1 - \sqrt{y-2}$$

$$f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y-2}$$

$$f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x-2}$$

$$D_{f^{-1}} = [2, +\infty)$$

$$x \leq 1$$

$$1 - \sqrt{y-2} \leq 1$$

$$-\sqrt{y-2} \leq 0$$

now look at

$$f(x) = \frac{x+4}{x+1}, \quad D_f = \mathbb{R} - \{-1\}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x_1) = f(x_2) \\ \text{ooo} \\ x_1 = x_2 \end{array} \right\} f \circ 1 - 1 \text{ apa antrasparan}$$

$$y = \frac{x+4}{x+1}$$

$$y(x+1) = x+4$$

$$yx + y = x + 4$$

$$yx - x = 4 - y$$

$$x(y-1) = 4-y$$

$$x = \frac{4-y}{y-1}$$

$$y \neq 1$$

$$f^{-1}(y) = \frac{4-y}{y-1}$$

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{4-x}{x-1}}$$

$$x \neq -1$$

$$\frac{4-y}{y-1} \neq -1$$

$$4-y \neq -y+1$$

$$4 \neq 1$$

now 15x04

Πανελλαννιου 2026

Εστω $h(x) = \ln(x-2)$, $x \in (2, +\infty)$.

• $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \Rightarrow \ln(x_1 - 2) < \ln(x_2 - 2)$
 $h(x_1) < h(x_2)$

$$y = \ln(x-2)$$

$h \nearrow$

$$e^y = x - 2$$

$$e^y + 2 = x$$

$$x > 2$$

$$e^y + 2 > 2$$

$$f^{-1}(y) = e^y + 2$$

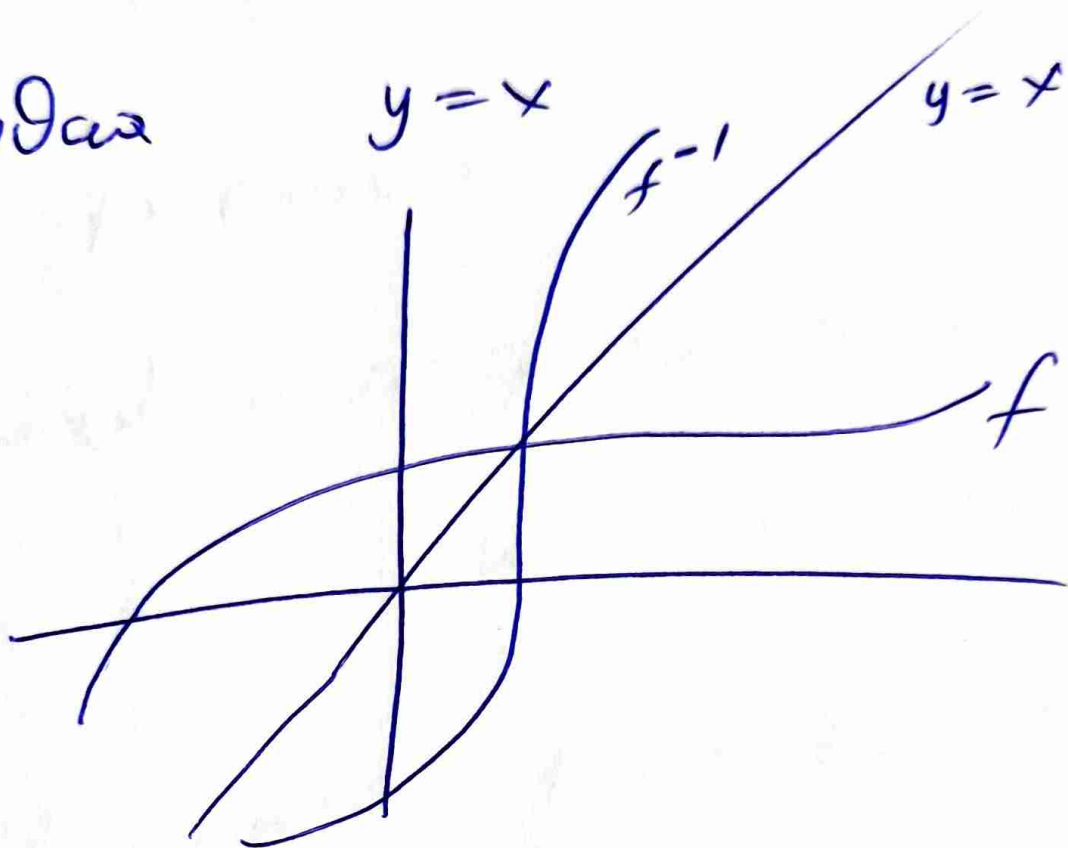
$$e^y > 0 \text{ παντα.}$$

$$f^{-1}(x) = e^x + 2$$

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

SOS

Οι συναρτήσεις $f(x)$ και $f^{-1}(x)$
είναι συγγενικά ως προς την
ευθεία



Σύνοψη

Οι εξισώσεις $f(x)=x$ και $f^{-1}(x)=x$
είναι ισοδύναμες.

Τι λύνει τη μια, Τι λύνει
την άλλη και ιδίω.

Ασκηση

Εστω $f(x) = x^3 + x + 8$

Ευκολο f $\neq$ αρα 1-1 συνεπ

αντιστρέφεται

Υπαρχι αντιστροφή αλλα

δεν μπορω να τη βρω

οχι γιατι ειναι παριβληκη.

Επειδη αλλα ειναι αδυνατον

να λυσω ul ποσ/ x,

ψάχνω να βρω στην τμή

$f^{-1}(x)$ και τμή $y=x$

$$f^{-1}(x) = x$$

f συνάρτηση

$$f(f^{-1}(x)) = f(x)$$

$$x = f(x)$$

$$\cancel{x} = x^3 + \cancel{x} + 8$$

$$x^3 = -8$$

$$x = -2$$

Προσοχή

$$x_1 = x_2 \xrightarrow{\text{f συνάρτηση}} f(x_1) = f(x_2)$$

Μπορώ πάντα να βρω f

από δ_w και από εκεί

αρκεί η f να είναι

αντα συνάρτηση.

Για να βρω f

$$f(x_1) = f(x_2) \xrightarrow{f^{-1}-1} x_1 = x_2$$

Επόμενο Μαθημα

Τετάρτη 10:30

Ενοτητα 7

3

4

5

6

7

Μεγάλη Ασκήση

8

αβ