Επαναληψη

για το τελευταιο

διαγωνισμα της

σχολικης χρονιας

στην

Αλγεβρα.

1. Νδο $\log_a \theta_1\theta_2 = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$

$$\alpha^{x_1} = \theta_1 \iff x_1 = \log_a \theta_1$$

$$\alpha^{x_2} = \theta_2 \iff x_2 = \log_a \theta_2$$

$$\alpha^{x_1}\alpha^{x_2} = \theta_1\theta_2$$

$$\alpha^{x_1+x_2} = \theta_1\theta_2$$

$$x_1 + x_2 = \log_a \theta_1\theta_2$$

$$\boxed{\log_a \theta_1 + \log_a \theta_2 = \log_a \theta_1\theta_2}$$

2. Nδɔ $\log_a \frac{\theta_1}{\theta_2} = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2$

$$a^{x_1} = \theta_1 \qquad\qquad a^{x_2} = \theta_1$$

$$\Leftrightarrow \qquad\qquad \Leftrightarrow$$

$$x_1 = \log_a \theta_1 \qquad\qquad x_2 = \log_a \theta_2$$

$$\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}} = \frac{\theta_1}{\theta_2}$$

$$a^{x_1 - x_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2}$$

$$x_1 - x_2 = \log_a \frac{\theta_1}{\theta_2}$$

$$\boxed{\log_a \theta_1 - \log_a \theta_2 = \log_a \frac{\theta_1}{\theta_2}}$$

3. ΝΔΟ $\log_a \theta^k = k \cdot \log_a \theta$

$$\alpha^x = \theta$$
$$\Leftrightarrow$$
$$x = \log_a \theta$$

$$\alpha^x = \theta \Leftrightarrow (\alpha^x)^k = \theta^k \Leftrightarrow \alpha^{kx} = \theta^k$$

$$kx = \log_a \theta^k$$

$$\boxed{k \cdot \log_a \theta = \log_a \theta^k}$$

Ιδιοτητες

$$\alpha^x=\theta \Leftrightarrow x=\log_\alpha \theta$$

1. $\log_\alpha \alpha^x = x$
2. $\alpha^{\log_\alpha x} = x$
3. $\log_\alpha \alpha = 1$
4. $\log_\alpha 1 = 0$
5. $\log_\alpha(\theta_1\theta_2) = \log_\alpha \theta_1 + \log_\alpha \theta_2$
6. $\log_\alpha\left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right) = \log_\alpha \theta_1 - \log_\alpha \theta_2$
7. $\kappa \log_\alpha \theta = \log_\alpha \theta^\kappa$

Δια σημοι λογαριθμοι

$$\log_{10} x = \log x$$

$$10^x=\theta \Leftrightarrow x=\log\theta$$

1. $\log 10^x = x$
2. $10^{\log x} = x$
3. $\log 10 = 1$
4. $\log 1 = 0$
5. $\log\theta_1\theta_2 = \log\theta_1 + \log\theta_2$
6. $\log\frac{\theta_1}{\theta_2} = \log\theta_1 - \log\theta_2$
7. $\kappa\log\theta = \log\theta^\kappa$

$$\log_e x = \ln x$$

$$e^x=\theta \Leftrightarrow x=\ln\theta$$

1. $\ln e^x = x$
2. $e^{\ln x} = x$
3. $\ln e = 1$
4. $\ln 1 = 0$
5. $\ln\theta_1\theta_2 = \ln\theta_1 + \ln\theta_2$
6. $\ln\frac{\theta_1}{\theta_2} = \ln\theta_1 - \ln\theta_2$
7. $\kappa\ln\theta = \ln\theta^\kappa$.

1. Να υπολογιστει η παρασταση

$$A = \frac{1}{3}\log 8 + \frac{1}{2}\log 25 =$$

$$= \log 8^{1/3} + \log 25^{1/2} =$$

$$= \log \sqrt[3]{8} + \log\sqrt{25} = \log 2 + \log 5$$

$$= \log 10 = 1$$

2. (α) Να λυθει η εξισωση. $P(x) = 0$

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\frac{6}{\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm 6}$$

$$\begin{array}{cccc|c}
1 & -2 & -5 & 6 & 1 \\
\downarrow & 1 & -1 & -6 & \\
\hline
1 & -1 & -6 & 0 &
\end{array}$$

$$(x-1)(x^2-x-6) = 0$$

$x=1$ $\quad x=3$ $\quad x=-2$

(B) Να λυθεί η εξίσωση

$$συν^3x + 2ημ^2x - 5συνx + 4 = 0$$

στο $[0, 2π]$.

$$συν^3x + 2(1 - συν^2x) - 5συνx + 4 = 0$$

$$συν^3x + 2 - 2συν^2x - 5συνx + 4 = 0$$

$$συν^3x - 2συν^2x - 5συνx + 6 = 0$$

$$P(συνx) = 0$$

$συνx = 1$ $\quad$ $συνx = 3$ $\quad$ $συνx = -2$

$συνx = συν0$ $\quad$ Αδύνατη $\quad$ αδύνατη.

$x = 2κπ \pm 0$

$$\boxed{x = 2κπ}$$

$0 \le x \le 2π$

$0 \le 2κπ \le 2π$

$0 \le κ \le 1$

$κ \in Ζ$

$κ = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 0}}$

$κ = 1 \Rightarrow x = 2π$

3. Να λυθεί η

i) εξίσωση $2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$

$2^x = t$ $\quad t^2 - 3t - 4 = 0$

$t = 4 \quad t = -1$

$2^x = 4 \quad 2^x = -1$

$2^x = 2^2 \quad$ Αδύνατη

$x = 2$

ii) Ανίσωση $2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 4 \leq 0$

$t^2 - 3t - 4 \leq 0$

t		-1	4	
t^2-3t-4	$+$	$-$		$+$

$-1 \leq t \leq 4$

$\underbrace{-1 \leq 2^x}_{} \leq 4$

✓

$2^x \leq 4$

$2^x \leq 2^2$

$x \leq 2$

$x \in (-\infty, 2]$.

4. Να γίνει η διαίρεση $P(x)=2x^3-2x^2+x-1$

$P(x):(x^2+4)$ και να γραφεί ταυτότητα

ευκλείδειας διαίρεσης.

$$
\begin{array}{l|l}
2x^3-2x^2+x-1 & x^2+4 \\ \cline{2-2}
-(2x^3+8x) & 2x-2 \\ \cline{1-1}
-2x^2-7x-1 & \\
-(-2x^2-8) & \\ \cline{1-1}
-7x+7 &
\end{array}
$$

$$\underline{P(x)=(x^2+4)(2x-2)-7x+7}.$$

5. Έστω $P(x) = x^2 - 1$

(α) Νδο $P(x) \le 0 \quad \forall x \in [-1, 1]$

$x^2 - 1 \le 0$

x		-1		1	
x^2-1	$+$		$-$		$+$

$x \in [-1, 1] \Leftrightarrow P(x) \le 0$

(β) Να λυθεί η ανίσωση

$P(9^x - 4 \cdot 3^x + 4) < 0$

Εδείξα ότι το $P(x) \le 0 \quad \forall x \in [-1, 1]$

άρα πρέπει $-1 < 9^x - 4 \cdot 3^x + 4 < 1$

(+)

$-1 < 9^x - 4 3^x + 4$

$\Delta < 0$

$x \in \mathbb{R}$

$9^x - 4 \cdot 3^x + 4 < 1$

$9^x - 4 \cdot 3^x + 3 < 0$

$3^x = t$

$t^2 - 4t + 3 < 0$

t		1		3	
t^2-4t+3	+		−		+

$t \in (1, 3)$

$1 < t < 3$

$3^0 < 3^x < 3^1$

$0 < x < 1$

6. Μια συναρτηση ειναι περιττη οταν $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in D_f$.

και (αν $x \in D_f$ και $-x \in D_f$)

α' τροπος

$f(-x) = \text{oooo} = -f(x)$ ✓

β' τροπος

$f(-x) + f(x) = \text{ooo} = 0$ ✓

7. Εστω γνησιως μονοτονη $f(x)$ η οποια διερχεται απο τα σημεια $A(1,4)$ και $B(-1,-4)$

Τι μονοτονια εχει;

Αφου ειναι γνησιως μονοτονη ειναι $f \nearrow$ ή $f \searrow$

ομως $1 > -1$ $\Leftrightarrow$ $f(1) > f(-1)$

$$\underset{4}{\overset{\parallel}{f(1)}} > \underset{-4}{\overset{\parallel}{f(-1)}}$$

$\Rightarrow f \nearrow$

Τριγωνομετρικη εξισωσεις

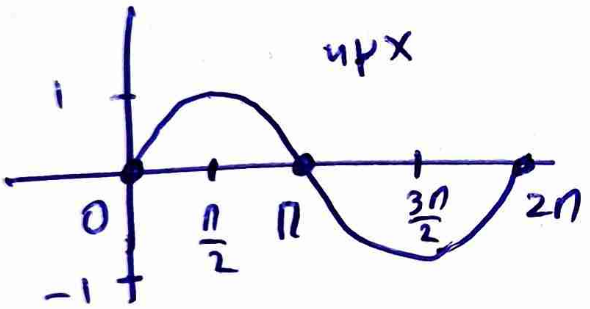
1. $ημx = ημθ \iff x = 2κπ + θ$ ή $x = 2κπ + π - θ$

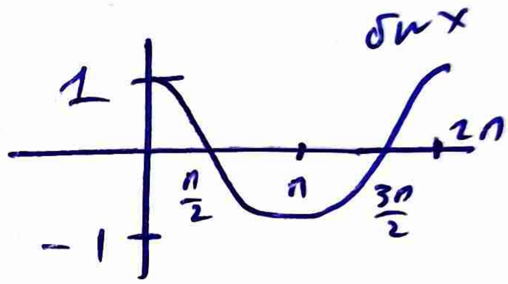
2. $συνx = συνθ \iff x = 2κπ + θ$ ή $x = 2κπ - θ$

3. $εφx = εφθ \iff x = κπ + θ$

4. $σφx = σφθ \iff x = κπ + θ$

Ημιτονο - συνημιτονο





x	$\frac{π}{6}$	$\frac{π}{4}$	$\frac{π}{3}$
ημx	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
συνx	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
εφx	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$
σφx	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$

$συν(-x) = συνx$

$εφ(π + x) = εφx$

$ημ(π - x) = ημx$

$ημ(\frac{π}{2} - x) = συνx$

SOS

$$(2^x)^2 = (2^2)^x = 4^x = 2^{2x}$$

8. Έστω τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$.

Ν.δ.ο. $\eta\mu(B-\Gamma) = \eta\mu(A+2\Gamma)$

$A+B+\Gamma = 180$

$B = 180 - A - \Gamma$

$B - \Gamma = 180 - A - 2\Gamma$

$B - \Gamma = 180 - (A+2\Gamma)$

$$\eta\mu(B-\Gamma) = \eta\mu(180-(A+2\Gamma)) =$$

$$= \eta\mu(\pi - (A+2\Gamma)) =$$

$$= \eta\mu(A+2\Gamma)$$ ✓

9. Έστω ότι $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

Πεδίο ορισμού

$$\frac{x-1}{x+1} > 0$$

x		-1		1	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x-1}{x+1}$	$+$		$-$		$+$

$x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Νδο f περιττή

$x \in D_f$

$-x \in D_f$

$$f(-x) = \ln\left(\frac{-x-1}{-x+1}\right) = \ln\left(\frac{-(x+1)}{1-x}\right) =$$

$$= \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{-1} =$$

$$= -\ln\frac{x-1}{x+1} = -f(x)$$

περιττή

Νδο $f\left(εφ\frac{A+Γ}{2}\right)+f\left(-σφ\frac{B}{2}\right)=0$

- $A+B+Γ=180$

$A+Γ+B=180$

$\frac{A+Γ}{2}+\frac{B}{2}=90$

$\Rightarrow \frac{A+Γ}{2}=90-\frac{B}{2}$

$εφ\frac{A+Γ}{2}=εφ\left(90-\frac{B}{2}\right)$

$$\boxed{εφ\frac{A+Γ}{2}=σφ\frac{B}{2}}$$

f συνάρτηση

$f\left(εφ\frac{A+Γ}{2}\right)=f\left(σφ\frac{B}{2}\right)$

$f\left(εφ\frac{A+Γ}{2}\right)-f\left(σφ\frac{B}{2}\right)=0$

Αφού f περιττή

$-f(x)=f(-x)$

$f\left(εφ\frac{A+Γ}{2}\right)+f\left(-σφ\frac{B}{2}\right)=0$

$$\sigma w\left(\frac{3}{2}(A+B)\right)+n\rho\left(\frac{3}{2}r\right)=0$$

$$A+B+r=180$$

$$A+B=180-r$$

$$\frac{3}{2}(A+B)=(180-r)\frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2}(A+B)=180\cdot\frac{3}{2}-\frac{3}{2}r$$

$$\frac{3}{2}(A+B)=270-\frac{3}{2}r$$

$$\sigma w\,\frac{3}{2}(A+B)=\sigma w\left(\frac{3\Pi}{2}-\frac{3}{2}r\right)$$

$$\sigma w\,\frac{3}{2}(A+B)=\sigma w\left(\frac{2\Pi}{2}+\frac{\Pi}{2}-\frac{3}{2}r\right)$$

$$\sigma w\,\frac{3}{2}(A+B)=\sigma w\left(\Pi+\frac{\Pi}{2}-\frac{3}{2}r\right)$$

$$\sigma w\,\frac{3}{2}(A+B)=-\sigma w\left(\frac{\Pi}{2}-\frac{3}{2}r\right)$$

$$\sigma w\,\frac{3}{2}(A+B)=-n\rho\left(\frac{3}{2}r\right).$$