Ζητηματα αντιστροφης

ε

Εστω $f(x) = x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$.

Προφανως $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ $f \nearrow$ αρα

αντιστρεφεται!

Δεν μπορω να βρω την αντιστροφη

$f^{-1}(x)$

1. Βρειτε την εφαπτομενη της

στο $x_0 = 2$.

$$\boxed{\varepsilon : y - f^{-1}(2) = f^{-1\prime}(2)\,(x-2)}$$

Αφου $f(1) = 2$ το $f^{-1}(2) = 1$

Προβλημα: $f^{-1\prime}(2)$;

α' τροπος

$f(x) =$

$f(f^{-1}(x)) = x$

$f'(f^{-1}(x)) \, {f^{-1}}'(x) = 1$

$x = 2$

$f'(f^{-1}(2)) \, {f^{-1}}'(2) = 1$

$f'(1) \, {f^{-1}}'(2) = 1$

$4 \cdot {f^{-1}}'(2) = 1$

${f^{-1}}'(2) = \frac{1}{4}$

$\varepsilon: \; y - 1 = \frac{1}{4}(x-2)$

$y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2} + 1$

$\boxed{y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}}$

Β' τρόπος

$$f^{-1\prime}(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(2)}{x-2} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{f^{-1}(x) - 1}{x-2} \qquad \frac{f^{-1}(x) = t}{f(f^{-1}(x)) = f(t)}$$

$$x = f(t)$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{t-1}{f(t)-2} = \lim_{t\to 1} \frac{t-1}{t^3+t-2} =$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{1}{3t^2+1} = \frac{1}{4}.$$

2. $\int_0^2 f^{-1}(x)\,dx \quad \underset{f(f^{-1}(x))=f(t)}{\overset{f^{-1}(x)=t}{=\!=}}$

$x=f(t)$

$dx=f'(t)\,dt$

$\int_0^1 t\cdot f'(t)\,dt=$

$=\int_0^1 t\cdot(3t^2+1)\,dt=\int_0^1 3t^3+t\,dt$

$=\frac{3}{4}(t^4)\Big|_0^1+\frac{1}{2}(t^2)\Big|_0^1=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$

Εννω αν ηθελα

E: $C_{f^{-1}}$, $x'x$, $x=0$, $x=2$

$E=\int_0^2 |f^{-1}(x)|\,dx=\int_0^1 |t|\,f'(t)\,dt$

$=\int_0^1 t\,f'(t)\,dt=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}.$

3. $E: C_f, C_{f^{-1}}, x=2$

Προσοχη

$f(x)=x \iff f^{-1}(x)=x$

Ισοδυναμ/ εξισωσ/ χωρις αποδειξη

- $f(x)=f^{-1}(x)$

$f \nearrow$

$f(x)=x$

$x^3+x=x$

$x^3=0$

$\boxed{x=0}$

Αυτο απαιτει αποδειξη γιατι δεν το εχει το βιβλιο

Αποδειξη

$f(x)=f^{-1}(x)$

$f(f(x))=f(f^{-1}(x))$

$f(f(x))=x$

$f(f(x))+f(x)=f(x)+x$

$\boxed{g(x)=f(x)+x}$

$g(f(x))=g(x)$

$g: 1-1$

$f(x)=x$

Μονοτονια $g(x)$

- $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

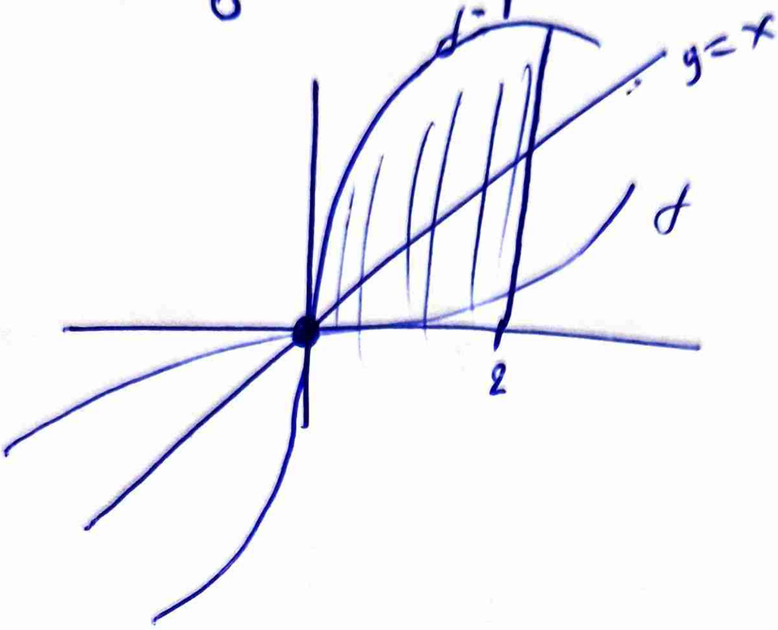
, $x_1<x_2$ ———— $(+)$

$f(x_1)+x_1<f(x_2)+x_2$

$g(x_1)<g(x_2)$

$g \nearrow$

$$E = \int_0^2 |f(x) - f^{-1}(x)|\, dx$$



Εαν εχουν δυο κοινα σημεια τοτε

$$\int_0^2 |f(x)-f^{-1}(x)|\, dx =$$

$$= 2\int_0^2 |f(x)-x|\, dx$$

λογω συμμετριας

SOS

1. Οταν Θελω νδο η $f(x)$ εχει μοναδικο ακροτατο

Βρισκω συνολο τιμων της $f''(x)$

Αποδεικνυω οτι η f' εχει μοναδικη ριζα x_0

Αποδεικνυω οτι η f' γν. μονοτονη.

Κανω πινακα.

x		x_0	
f''	$+$		$+$
f'	$\nearrow$ $-$	0	$+$ $\nearrow$
f	$\searrow$		$\nearrow$

ή

x		x_0	
f''	$-$		$-$
f'	$\searrow$ $+$	0	$-$ $\searrow$
f	$\nearrow$		$\searrow$

2. Οταν Θελω νδο η $f(x)$ εχει ακριβως δυο ακροτατα.

Αποδεικνυω οτι η $f'(x)$ εχει ακριβως δυο ριζες με συνολο τιμων (υπαρξιακα - κουκκιδες). και κανω πινακα μονοτονιας με τα x_1, x_2 μεσα.

3. Οταν Θελω νδο η $f(x)$ εχει ακριβως ενα κρισιμο σημειο

Αποδεικνυω οτι η $f'(x)$ εχει μοναδικη ριζα με συνολο τιμων και κουκκιδα

4. Οταν Θελω νδο η $f(x)$ εχει μοναδικο σημειο καμπης

Αποδεικνυω οτι η $f''(x)$ εχει μοναδικη ριζα.

x		x_0
f''	$-$	$+$
f		