7. Σελίδα 23

(α) $f(x) = \frac{x}{x+1}$, $x \neq -1$

$$f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} > 0 \quad f \nearrow \ (-\infty, -1) \text{ και } (-1, +\infty)$$

(γ) $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$, $x \neq \pm 1$

$$f'(x) = \frac{x^2-1-x\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2} = \frac{-1-x^2}{(x^2-1)^2} < 0$$

(δ) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, $x \neq 0$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

x		-1		0		1	
f'	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	↗	max	↘	$\nexists$	↘	min	↗

$\longrightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2-1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$

$x = \pm 1$

10. (B) $f(x) = e^x - ex$

x		1	
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

$$f'(x) = e^x - e$$

$$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow e^x - e = 0$$

$$e^x = e$$

$$x = 1$$

11. $f(x) = x \ln x - 2x \quad , x > 0$

$$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 2$$

$$f'(x) = \ln x + 1 - 2$$

$$f'(x) = \ln x - 1$$

x	0		e	
f'		$-$	0	$+$
f		$\searrow$		$\nearrow$

$$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x - 1 = 0$$

$$\ln x = 1$$

$$\underline{\underline{x = e}}$$

12. (B) $f(x) = x^2 \ln x$, $x > 0$

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 2x \ln x + x$$

$$\boxed{f'(x) = x(2\ln x + 1)}$$

$$\longrightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x(2\ln x + 1) = 0$$

$$2\ln x + 1 = 0$$

$$2\ln x = -1$$

$$\ln x = -\frac{1}{2}$$

$$x = e^{-1/2} = \frac{1}{e^{1/2}} = \frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{\sqrt{e}}{e}$$

x	0	$\frac{\sqrt{e}}{e}$
f'	$-$ ‖	0 $+$
f	$\searrow$	$\nearrow$

16. ⓐ

$$f(x)=\begin{cases} x^2-2x+3, & x<1 \\ \frac{1}{x}+1, & x\geq 1 \end{cases}$$

$x<1$

$f_1(x)=x^2-2x+3$

$f_1'(x)=2x-2$

$\rightarrow 2x-2=0$

$\boxed{x=1}$

$x\geq 1$

$f_2(x)=\frac{1}{x}+1$

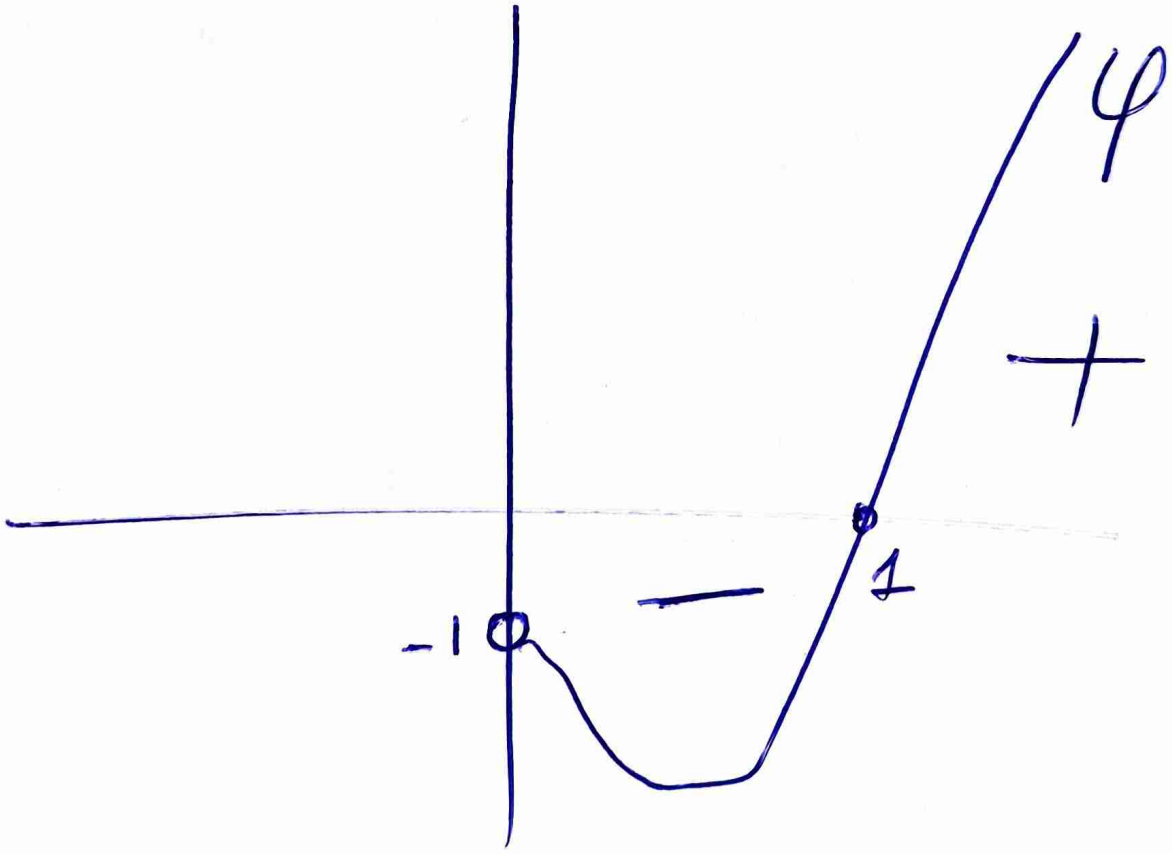
$f_2'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$

x		1	
f_1'	$-$		
f_2'			$-$
f'	$-$		$-$
f	$\searrow$		$\searrow$

$$\lim_{x\to 0^+} \varphi(x) = \lim_{x\to 0^+} x\ln x + x - 1 = -1$$

$$\to \lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{x} = 0$$



20. (B) $f(x) = (x-1)\ln x$, $x>0$

$$f'(x) = \ln x + (x-1)\frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \ln x + \frac{x-1}{x}$$

$$\boxed{f'(1) = 0}$$

1ος δρόμος

$$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{x-(x-1)}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{x-x+1}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$$

x	0		1	
f''		$+$		$+$
f'	$\nexists$	$\nearrow$	0	$\nearrow$
f	$\nexists$	$\searrow$	0	$\nearrow$

2ος δρόμος

$$f'(x) = \frac{x\ln x + x - 1}{x}$$

$$\varphi(x) = x\ln x + x - 1$$

$$\varphi(1) = 0$$

$$\varphi'(x) = \ln x + x\frac{1}{x} + 1$$

$$\varphi'(x) = \ln x + 2$$

$$\longrightarrow \ln x + 2 = 0$$

$$\ln x = -2$$

$$x = e^{-2}$$

x	0		e^{-2}		1	
φ'		$-$	0	$+$		$+$
φ	$\nexists$	$\searrow$	$-$	$\nearrow$	0	$\nearrow$
f'	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	$\nexists$	$\searrow$	$\nexists$	$\searrow$	0	$\nearrow$

SOS

Βασικές ανισότητες της ύλης

1. $e^x \geq x+1$ Το "=" για $x=0$

2. $\ln x \leq x-1$ Το "=" για $x=1$

3. $|\ln x| \leq |x|$ Το "=" για $x=0$

$e^x \geq x+1$

$e^x - x - 1 \geq 0$

$f(x)$

$f'(x) = e^x - 1$

$\rightarrow f'(x) = 0$

$e^x - 1 = 0$

$\boxed{x = 0}$

x		0	
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

$f(x) \geq f(0)$

$e^x - x - 1 \geq 0$

$e^x \geq x+1$

20. (δ) $f(x) = e^x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} - x - 1$

$f'(x) = e^x - \frac{1}{6}3x^2 - \frac{1}{2}2x - 1$

$$\boxed{f'(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - x - 1}$$ $f'(0) = 0$

$f''(x) = e^x - \frac{1}{2}2x - 1$

$$\boxed{f''(x) = e^x - x - 1}$$

Γνωρίζω ότι $e^x \geq x + 1$

$e^x - x - 1 \geq 0$

$f''(x) \geq 0$

x	0	
f''	+	+
f'	− ↗	0 + ↗
f	↘	↗

20. (ε) $f(x) = e^x + \frac{x^2}{2} - 2x + \eta\mu x$

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{2}2x - 2 + \sigma\upsilon\nu x$$

$$\boxed{f'(x) = e^x + x - 1 + \sigma\upsilon\nu x} \qquad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = e^x + \underbrace{1 - \eta\mu x}_{(+)} > 0$$

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1$$

$$1 \geq -\eta\mu x \geq -1$$

$$2 \geq 1 - \eta\mu x \geq 0$$

x		0
f''	+	+
f'	↓	0 ↑
f	↘	↗

21. ⑬ $f(x) = \dfrac{x^3 - 2\ln x}{2x}$, $x > 0$

$$f'(x) = \frac{\left(3x^2 - 2\cdot\frac{1}{x}\right)2x - (x^3 - 2\ln x)2}{4x^2}$$

$$f'(x) = \frac{6x^3 - 4 - 2x^3 + 4\ln x}{4x^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^3 + 4\ln x - 4}{4x^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^3 + \ln x - 1}{x^2}}$$

$f'(1) = 0$.

$\varphi(x) = x^3 + \ln x - 1$

$\varphi'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x} > 0$

x	0	1
φ'	+	+
φ	~~−~~ 0 + ↗	
f'	−	+
f	↘	↗

21. ⑧ $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}, & x \in (0, \frac{\pi}{2}] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$

Συνεχεια σε 0.

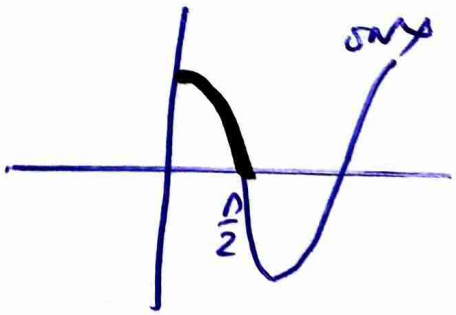
$f(0) = 0$

$f'(x) = \frac{x\eta\mu x - (1-\sigma\upsilon\nu x)}{x^2} = \frac{x\eta\mu x - 1 + \sigma\upsilon\nu x}{x^2}$

$f'(x) = \frac{x\eta\mu x - 1 + \sigma\upsilon\nu x}{x^2}$

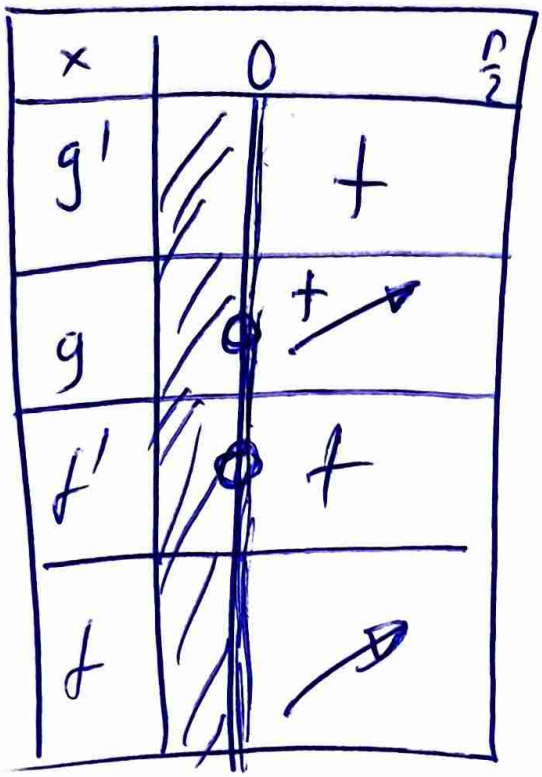
$g(0) = 0$

$g(x) = x\eta\mu x - 1 + \sigma\upsilon\nu x$



$g'(x) = \eta\mu x + x\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$

$g'(x) = x\sigma\upsilon\nu x > 0$


x
0
π/2
g'
+
g
+
f'
+
f

22. (δ) $f(x) = x^2 \ln x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3$

$x > 0$

$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} + x - \frac{2}{3} 3x^2$

$f'(x) = 2x \ln x + x + x - 2x^2$ $\quad f'(1) = 0$

$f'(x) = 2x \ln x + 2x - 2x^2$

$f'(x) = 2x (\ln x + 1 - x) < 0$

(+) (−)

$f \downarrow$

$\ln x \leq x - 1$

$\ln x - x + 1 \leq 0$

23. ⑧ $f(x) = (x+1)\ln x + e^x \quad , x>0$

$$f'(x) = \ln x + (x+1)\frac{1}{x} + e^x$$

$$f'(x) = \underbrace{\ln x + 1 + \frac{1}{x}}_{(+)} + e^x > 0$$

$f \nearrow$

$$\ln x \le x - 1$$

$$\ln \frac{1}{x} \le \frac{1}{x} - 1$$

$$\ln 1 - \ln x \le \frac{1}{x} - 1$$

$$0 \le \ln x + \frac{1}{x} - 1$$

$$1 \le \ln x + \frac{1}{x}$$

23. (52) $f(x) = e^{1-x} + \ln x, \quad x > 0$

$$f'(x) = -e^{1-x} + \frac{1}{x} \qquad f'(1) = 0$$

$$f''(x) = -\frac{1}{e^{x-1}} + \frac{1}{x} \qquad f''(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{-x}{x e^{x-1}} + \frac{e^{x-1}}{x e^{x-1}}$$

$$f'(x) = \frac{e^{x-1} - x}{x e^{x-1}} > 0$$

$f \nearrow$

$$e^x \geq x + 1$$

$$e^{x-1} \geq x - 1 + 1$$

$$e^{x-1} \geq x$$

$$e^{x-1} - x \geq 0$$

2. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία:

α. $f(x)=e^x+x^3-1$

β. $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$

γ. $f(x)=-x^3+x^2-x+1$

δ. $f(x)=2x+\sigma\upsilon\nu x-1$

ε. $f(x)=1+(x-2)^3$

στ. $f(x)=x+\sigma\upsilon\nu x-1$

3. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=x^2-3x+1$

β. $f(x)=-x^2-2x+3$

γ. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$

δ. $f(x)=-x^3+x^2+x+3$

ε. $f(x)=x^3-3x+1$

στ. $f(x)=x^3-6x+1$

4. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\frac{x^4}{4}-x+1$

β. $f(x)=x^4+32x$

γ. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x$

δ. $f(x)=\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{11}{2}x^2-6x-1$

ε. $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x$

στ. $f(x)=x^4+2x^2-8x+6$

5. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=x^4-2x^2-1$

β. $f(x)=5x-x^5$

γ. $f(x)=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^2-$

δ. $f(x)=\frac{1}{5}x^5-x^4-\frac{1}{2}x^2+4x$

ε. $f(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+2x$

6. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x-1$

β. $f(x)=-\frac{4x^3}{3}+2x^2-x-4$

γ. $f(x)=-3x^4+4x^3+2$

δ. $f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3-2x^2+4x-1$

ε. $f(x)=(x-1)^3(x-3)^3$

στ. $f(x)=(x+1)^5(x-2)^4$

7. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\frac{x}{x+1}$

β. $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

γ. $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$

δ. $f(x)=x+\frac{1}{x}$

ε. $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$

στ. $f(x)=x+\frac{4}{x^2}$

8. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$ β. $f(x)=\ln|x|+\dfrac{1}{2x^2}$

γ. $f(x)=\dfrac{2-x^2}{x^4}$ δ. $f(x)=\dfrac{x^3-2x}{x^2-1}$

9. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\sqrt{x^2+4}$ β. $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ γ. $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

δ. $f(x)=x-4\sqrt{x}$ ε. $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{2-x}$ στ. $f(x)=x-2\sqrt{x-2}$

10. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=e^x-x+3$ β. $f(x)=e^x-ex$ γ. $f(x)=(x-2)e^x$

δ. $f(x)=(x^2+x+1)e^x$ ε. $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$ στ. $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$

11. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=e^{-2x}+x-1$ β. $f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$

γ. $f(x)=e^{2x}-3e^x+x-1$ δ. $f(x)=e^x-e^{-x}-2x$

12. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=x\ln x-2x$ β. $f(x)=x^2\ln x$

γ. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ δ. $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

ε. $f(x)=x-e\ln x$ στ. $f(x)=x+\ln(x^2+1)$

ζ. $f(x)=x\ln^2 x-3x+2$ η. $f(x)=x^{\ln x}$, $x>0$

13. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=(x-2)e^x-\dfrac{1}{2}x^2+x-1$ β. $f(x)=2xe^{-x}+(x-1)^2$

γ. $f(x)=(x^2-4x)\ln x-\dfrac{x^2}{2}+4x$ δ. $f(x)=(x^2-x)\ln x+\dfrac{x^2}{2}$

ε. $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$ στ. $f(x)=\dfrac{x}{\ln^2 x}$

14. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=e^{\eta\mu x}$, $x\in[0,2\pi]$ β. $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x$

γ. $f(x)=\eta\mu^2 x+4\sigma\upsilon\nu x$, $x\in[-\pi,\pi]$ δ. $f(x)=\dfrac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x}$, $x\in(0,2\pi)$

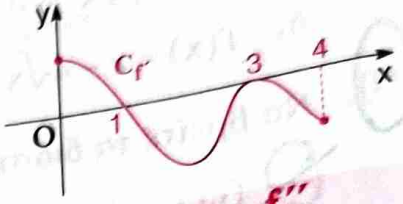
α. $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$, $x\in(-\pi,\pi)$ β. $f(x)=\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x$

16. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3, & x<1\\ \dfrac{1}{x}+1, & x\geq 1\end{cases}$ β. $f(x)=\begin{cases}x^3-3x, & x<0\\ x^2-4x, & x\geq 0\end{cases}$

17. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνεχούς συνάρτησης $f:[0,4]\to\mathbb{R}$.

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.



Β1. Εύρεση μονοτονίας συνάρτησης με τη βοήθεια της f′

18. Να βρείτε, τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης:

α. f, όταν $f(x)=e^{-x}-x-1$ β. f', όταν $f(x)=x\ln(1+x)$

γ. f'', όταν $f(x)=e^x-ex\ln x+ex$.

19. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f'(2)=0$ και $f''(x)<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων f' και f.

20. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=e^{x-1}-\ln x$ β. $f(x)=(x-1)\ln x$ γ. $f(x)=e^{x-1}+x\ln x-2x$

δ. $f(x)=e^x-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^2}{2}-x-1$ ε. $f(x)=e^x+\dfrac{x^2}{2}-2x+\eta\mu x$

Β2. Εύρεση μονοτονίας της f με βοηθητική συνάρτηση

21. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=x-\dfrac{\ln x}{x}$ β. $f(x)=\dfrac{x^3-2\ln x}{2x}$

γ. $f(x)=2\sqrt{x}-\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ δ. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}, & x\in(0,\dfrac{\pi}{2})\\ 0, & x=0\end{cases}$

Β3. Εύρεση μονοτονίας της f με τη βοήθεια βασικών ανισοτήτων

22. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=2\cdot e^x-x^2-2x$ β. $f(x)=x\ln x-\dfrac{x^2}{2}$

γ. $f(x)=\ln^2 x-2x+2$ δ. $f(x)=x^2\ln x+\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{2}{3}x^3$

23. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=2e^x-x^2$ β. $f(x)=\frac{1}{2}x^2+x-x\ln x$

γ. $f(x)=x\ln x-x^2-x$ δ. $f(x)=(x+1)\ln x+e^x$

ε. $f(x)=\ln x+e^{-x}+1$ στ. $f(x)=e^{1-x}+\ln x$

24. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\ln(e^x-x)$ β. $f(x)=\frac{x}{e^x-x}$

γ. $f(x)=\ln(x-\ln x)$ δ. $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\varepsilon\varphi x}$, $x\in(0,\frac{\pi}{2})$

Β4. Εύρεση μονοτονίας της f με επιλεγμένο αριθμό

25. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=2\eta\mu x-x+3$, $x\in[0,\pi]$ β. $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\sigma\upsilon\nu x$

γ. $f(x)=e^{-x}\eta\mu x$, $x\in[0,\pi]$ δ. $f(x)=x\varepsilon\varphi x$, $x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

Β΄ ΟΜΑΔΑ

26. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ β. $f(x)=x\sqrt{1-x^2}$ γ. $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

δ. $f(x)=\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}-x^2$ ε. $f(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{8}{3}x^{\frac{3}{2}}+3x$

27. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x-4}$ β. $f(x)=\ln\frac{x}{1-x}$ γ. $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

28. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\begin{cases}(x-2)e^{x-1}+2 & , x<1\\ -x^2+2x & , x\geq 1\end{cases}$ β. $f(x)=\begin{cases}\eta\mu x & , -\pi<x\leq 0\\ x^2\ln x & , x>0\end{cases}$

γ. $f(x)=\begin{cases}\ln(e^x-x) & , x\leq 0\\ \ln x-x & , x>0\end{cases}$ δ. $f(x)=\begin{cases}x^2e^{1-x}+2 & , x<1\\ x-2\sqrt{x-1} & , x\geq 1\end{cases}$

Επόμενο μάθημα

Ημερομηνία μαθήματος : Δευτερα 26/10

Ώρα μαθήματος : 19:30

Ασκήσεις

Ενοτητα. 23

(6) αι β

(9) α β

(10) γ ε

(11) α γ δ

(12) ε στ ζ

(13) ολη

(20) α γ

(21) αι.

(22) α γ β

(23) α β γ

(24) α γ.

παρατηρήσεις