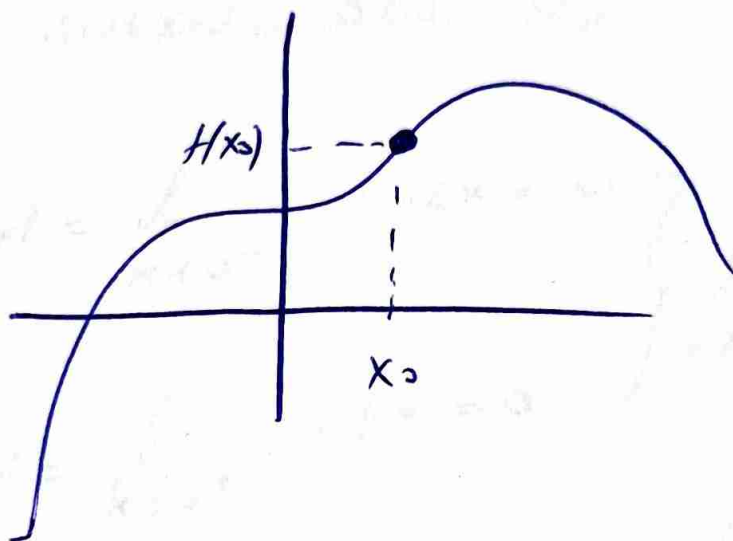


Σημειώσεις

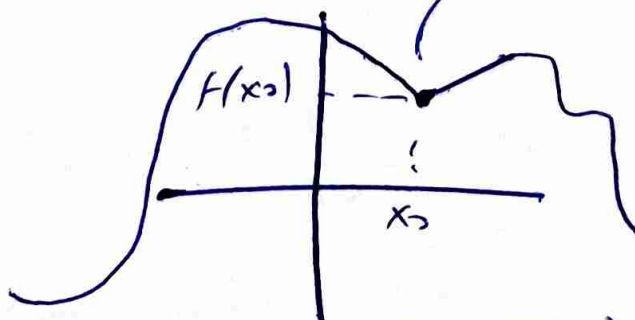
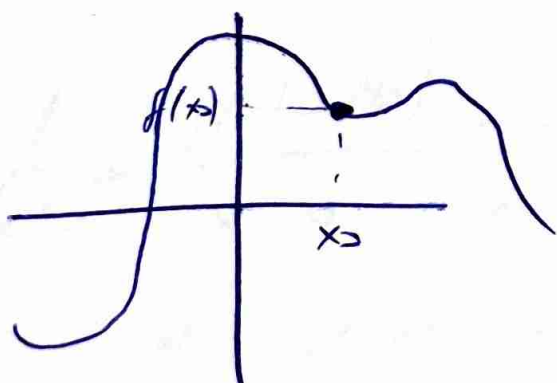
1. Η $f(x)$ είναι συνεχής στο x_0
αν και μόνο αν $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$



2. Η $f(x)$ είναι παραγωγισμένη στο x_0
αν το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ υπάρχει και

είναι πραγματικός αριθμός,

και
πύρακι



οχι παρ/κη στο x_0

Ασκηση

Εστω $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \leq 0 \\ nx, & x > 0 \end{cases}$

Είναι συνεχής στο 0;

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - 2x = 0 \quad \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)} \right\} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} nx = 0$$

Είναι $f(0) = 0$ άρα Συνεχής στο 0!

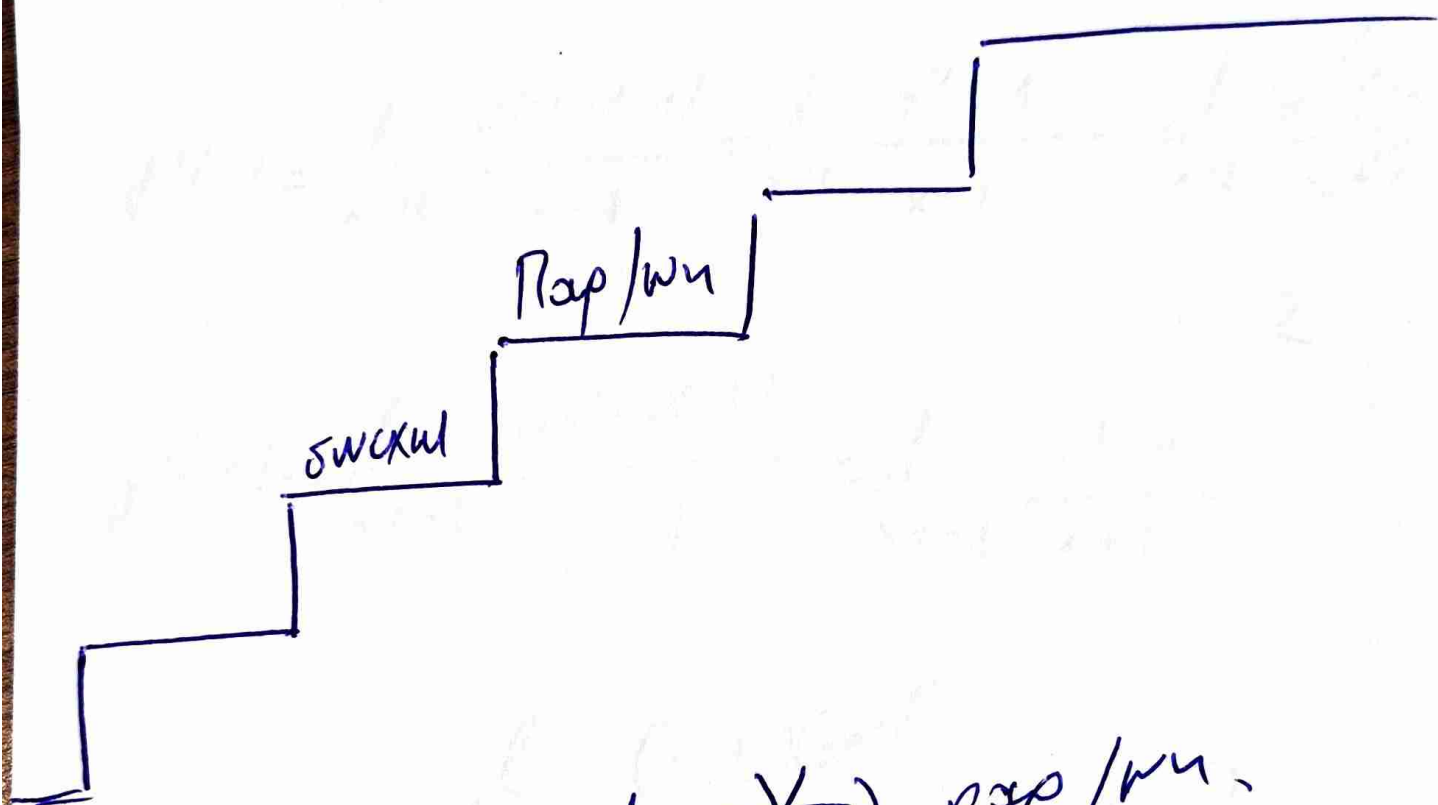
Είναι παραγώγιμη στο 0;

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - 2x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x-2)}{x} = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{nx - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{nx}{x} = n$$

Δεν είναι παραγώγιμη στο 0!

Δωσιν Σωτα.



Av n t σωχνη ~~⇒~~ παρ/μν.

Av n t παρ/μν ⇒ σωχνη

Av n t σωχνη σωχνη ⇒ σωχνη
παρ/μν

Av n t οχι παρ/μν ~~⇒~~ οχι σωχνη.

Προδοχη

$$\infty \text{τω} \quad f(x) = x^2$$

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x} = 0$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$$

$$f'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = -2$$

$$f'(0) = 0, \quad f'(1) = 2, \quad f'(-1) = -2$$

Ολο αυτο μας
χρειο βορο.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} =$$

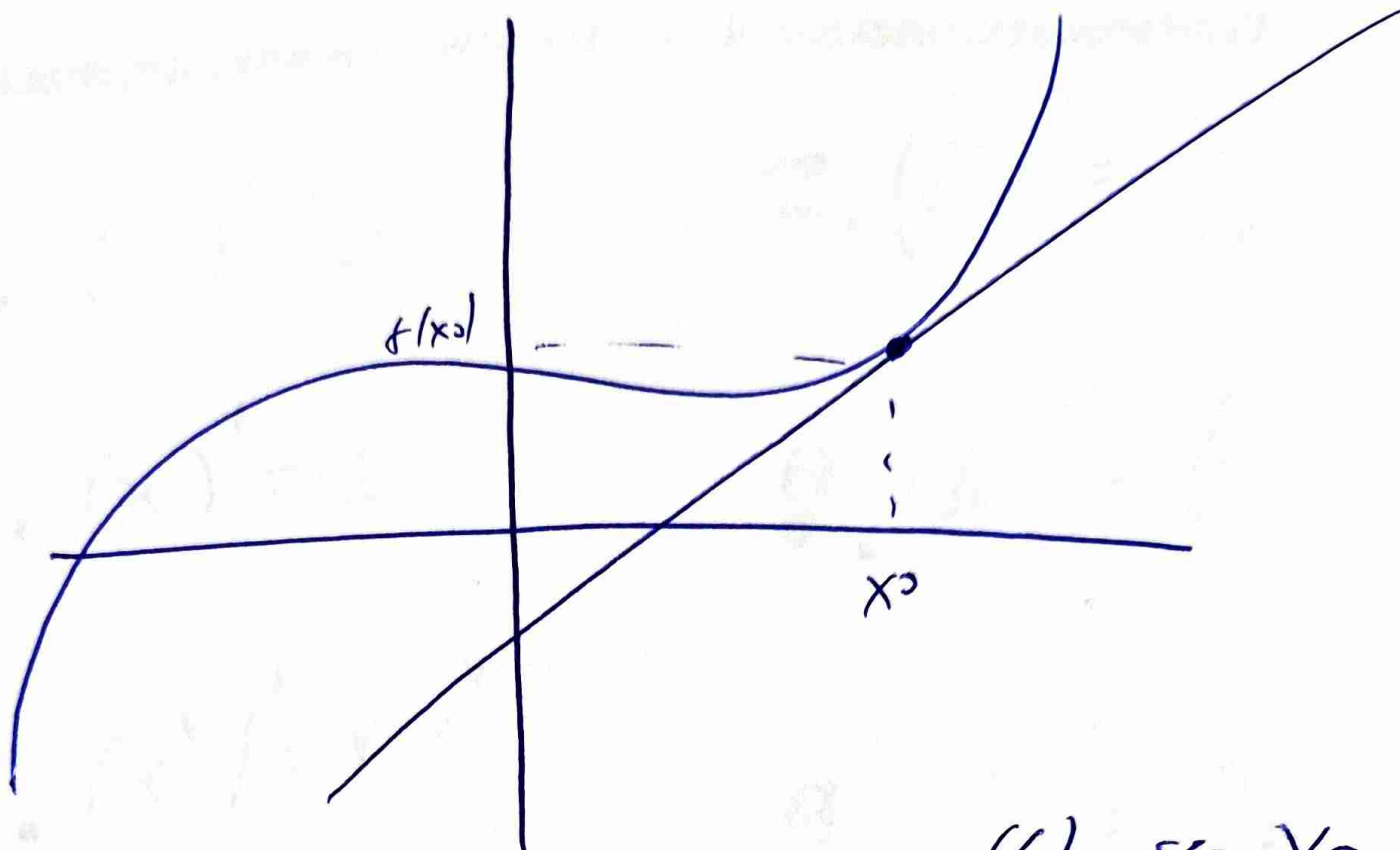
$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0$$

$$f'(x_0) = 2x_0 \text{ Για το οποιο } x_0.$$

Παρατηρουμε οτι $f(x) = x^2$

$$f'(x) = 2x$$



Εφαρμογή της $f(x)$ στο x_0

$$\varepsilon \approx y - f(x_0) = \underline{f'(x_0)}(x - x_0)$$



Η παράγωγος της
 $f(x)$ στο x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

κανόνες 1 παραγυρισμού

$$1. (c)' = 0$$

$$7. (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$2. (x)' = 1$$

$$8. (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$3. (x^v)' = v \cdot x^{v-1}$$

$$9. \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$4. (e^x)' = e^x$$

$$10. (a^x)' = a^x \ln a$$

$$5. (\sin x)' = \cos x$$

$$11. (\cos x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$6. (\cos x)' = -\sin x$$

$$12. (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Кавовд Напог/он

2

$$1. [f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$2. (c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

$$3. [f(x) \cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$4. \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Παραγωγή 5

1. $f(x) = \arcsin x - \sin x + \ln x$

$$f'(x) = (\arcsin x)' - (\sin x)' + (\ln x)'$$

$$f'(x) = \sin x - (-\arcsin x) + \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \sin x + \arcsin x + \frac{1}{x}$$

2. $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}x - 1$

$$f'(x) = (3x^4)' - (2x^2)' + \left(\frac{1}{2}x\right)' - (1)'$$

$$f'(x) = 3 \cdot (x^4)' - 2 \cdot (x^2)' + \frac{1}{2} \cdot (x)' - (1)'$$

$$f'(x) = 3 \cdot 4x^3 - 2 \cdot 2x + \frac{1}{2} \cdot 1 - 0$$

$$f'(x) = 12x^3 - 4x + \frac{1}{2}$$

3. $f(x) = (x^2 - 2x) e^x$

$$f'(x) = (x^2 - 2x)' e^x + (x^2 - 2x) (e^x)'$$

$$f'(x) = (2x - 2) e^x + (x^2 - 2x) e^x$$

$$f'(x) = e^x (2x - 2 + x^2 - 2x)$$

$$f'(x) = e^x (x^2 - 2)$$

4. $f(x) = \frac{\ln x}{x-1}$

$$f'(x) = \frac{(\ln x)'(x-1) - \ln x \cdot (x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot (x-1) - \ln x \cdot (1)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x-1 - x \ln x}{x(x-1)^2}$$

Τι είναι συγγρα;

1. Η f παρ/μη στο x_0 αν

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$$

2. Αν η f παρ/μη $\implies f$ συνεχής

Αν η f όχι συνεχής $\implies$ όχι παρ/μη.

3. Η εφαπτομένη της $f(x)$
στο x_0 είναι

$$εξ y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

4. Αναλυτικούς κανόνες

παράγωγησης.

5. (B) $f(x) = \begin{cases} 1+4x, & x \leq 0 \\ 2x, & x > 0 \end{cases}$

ΕΥΟΤΗΤΑ

15

Είναι συνεχής στο 0;

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1+4x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0$$

} 0 ≠ 1
στο 0!

Είναι παραγώγιμη στο 0;

Αφού δεν είναι συνεχής στο 0

Ναι είναι παραγώγιμη

στο 0.

$$5. \textcircled{8} \quad f(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Граничное значение 0;

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin \frac{1}{x} =$$

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$$

$$\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1$$

$$|x^3| \left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x^3|$$

$$\left| x^3 \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x^3|$$

$$\boxed{-|x^3| \leq x^3 \sin \frac{1}{x} \leq |x^3|}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} -|x^3| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x^3| = 0$$

по к.п

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \sin \frac{1}{x} = 0.$$

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Sufficiently small } 0!$$

Give up/quit soon 0;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$$

$$-1 \leq \sin \frac{1}{x} \leq 1$$

$$\boxed{-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} -x^2 = 0 \quad \left\{ \text{Prove K.O.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0 \quad \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Συμπέρασμα

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

Άρα $\frac{df}{dx}$ σε $x=0$

είναι 0.

14. $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \leq 1 \\ ax+b, & x > 1 \end{cases}$

Είναι nap / m σω 1!

Από ανα nap / m σω 1

Είναι και σωχ m . σω 1.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^3 = \underline{1}$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ax+b = \underline{a+b}$

Προκύπτει $a+b=1$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cancel{(x-1)}(x^2 + x + 1)}{\cancel{x-1}} = 3$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + b - 1}{x - 1} \quad \textcircled{*}$$

Grouping on $a + b = 1 \Rightarrow \boxed{1 - a = b}$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + \cancel{1} - a - \cancel{1}}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax - a}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a(\cancel{x-1})}{\cancel{x-1}} = 0$$

Ans $a = 3$ $b = -2$

Πανελλήνια 2026

$$f(x) = \begin{cases} x^2(g(x) + x), & x < 0 \\ 2\ln x + \varepsilon\psi x - kx, & 0 \leq x < \frac{\eta}{2} \end{cases}$$

Η $f(x)$ παρ/μη.

Νδο $k=3$

Θα ω είναι παρ/μη είναι και σωστό

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

Βω μπα κατ.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2(g(x) + x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\ln x + \varepsilon\psi x - kx}{x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2ux}{x} + \frac{34x}{x} - \frac{kx}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \frac{ux}{x} + \frac{ux}{x} 34x - k$$

$$= 2 \cdot 1 + 1 - k = 3 - k$$

Apr $3 - k = 0$

$$k = 3$$

Kavoru De L'Hospital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x + \cos x - kx}{x} \quad \underline{\underline{\left(\frac{0}{0}\right)}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\cos x + \frac{1}{\sin^2 x} - k}{1} = 2 + 1 - k = 3 - k$$