1.

(a) $x^2-5x+7 \mid x-3$

$-(x^2-3x) \quad\quad x-2$

$-2x+7$

$-(-2x+6)$

1

$x^2-5x+7 = (x-3)(x-2)+1$

(β) $(x^3+2x-1) : (x-2)$

1	0	2	−1	(2)
↓	2	4	12	
1	2	6	11	

(1)

$x^3+2x-1 = (x-2)(x^2+2x+6)+11.$

4. (a)

$$x^3+2x^2-x-2 \quad \Big| \quad x^2-1$$

$$-(x^3-x) \qquad\qquad x+2$$

$$2x^2-2$$

$$-(2x^2-2)$$

$$0$$

$$x^3+2x^2-x-2 = (x^2-1)(x+2)$$

(B)

$$\frac{x^3+2x^2-x-2}{x^2-1} = \frac{(x^2-1)(x+2)}{x^2-1}$$

$$= x+2 .$$

6. (a) $P(x) = (3x^3+5)(x^2-3) + 2x - 1$

$$P(x) = 3x^5 - 9x^3 + 5x^2 + 2x - 16$$

(B) $Q(x) = P(x) - 2x + 1$

$Q(x) = 3x^5 - 9x^3 + 5x^2 + 2x - 16 - 2x + 1$

$$Q(x) = 3x^5 - 9x^3 + 5x^2 - 15$$

$$\begin{array}{r|l} 3x^5 - 9x^3 + 5x^2 - 15 & x^2 - 3 \\ \hline -(3x^5 - 9x^3) & 3x^3 + 5 \\ \hline 5x^2 - 15 & \\ -(5x^2 - 15) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

✓

8. (α) $\underbrace{(x^3 - x + 1)}_{P(x)} : (x-2)$ $\quad U = P(2) = 7$

(β) $P(x) : (x+3)$ $\quad U = P(-3) = -27 + 45 - 1$

$U = 17$

9. Το υπόλοιπο της $P(x) : (x+2) \longrightarrow 5$

$\Rightarrow P(-2) = 5$

$P(x) = x^2 + 1Cx - 1$

$P(-2) = (-2)^2 + 1C(-2) - 1 = 5$

$4 - 2C - 1 = 5$

$3 - 2C = 5$

$3 - 5 = 2C$

$-2 = 2C$ $\quad C = -1$

8. (α) $\underbrace{(x^3 - x + 1)}_{P(x)} : (x-2)$ $\quad U = P(2) = 7$

(β) $P(x) : (x+3)$ $\quad U = P(-3) = -27 + 45 - 1$

$U = 17$

9. Το υπόλοιπο της $P(x) : (x+2) \longrightarrow 5$

$\Rightarrow P(-2) = 5$

$P(x) = x^2 + 1kx - 1$

$P(-2) = (-2)^2 + 1k(-2) - 1 = 5$

$4 - 2k - 1 = 5$

$3 - 2k = 5$

$3 - 5 = 2k$

$-2 = 2k$ $\quad k = -1$

10. $P(x) : (x+1) \longrightarrow 0 = 1$

$$\underline{P(-1) = 1}$$

$$P(x) = x^3 + ax + a^2$$

$$P(-1) = -1 - a + a^2 = 1$$

$$a^2 - a - 2 = 0$$

$a = 2$ $\quad$ $a = -1$

14. $P(x) : (x+1) \longrightarrow 3 \quad \Rightarrow \underline{P(-1) = 3}$

$P(x) : x \longrightarrow 2 \quad \Rightarrow \underline{P(0) = 2}$

$$P(x) = x^3 - ax + \beta - 1$$

$$P(-1) = -1 + a + \beta - 1 = 3 \quad \Rightarrow a + \beta = 5$$

$$P(0) = \beta - 1 = 2 \quad \Rightarrow \beta = 3 \qquad a = 2$$

22. $P(x) = x^3 + \alpha x + \beta$ έχει παράγοντα το x.

$P(x) : (x+2) \xrightarrow{\upsilon} -4$

$P(0) = 0 \Rightarrow \underline{\beta = 0}$

$P(-2) = -4 \Rightarrow -8 - 2\alpha + \beta = -4$

$-8 - 2\alpha + 0 = -4$

$-8 + 4 = 2\alpha$

$2\alpha = -4$

$\alpha = -2$

Σχόλιο

Όταν το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$

$\Rightarrow P(\rho) = 0$.

Όταν το υπόλοιπο της $P(x) : (x-\rho)$ είναι 7

$\Rightarrow P(\rho) = 7$.

25. $P(x) = x^3 + \alpha x^2 + x + \beta$ έχει

παράγοντα το $x+\alpha$

Ν.δ.ο έχει παράγοντα το $x+\beta$.

Αφού το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x+\alpha$

$\Rightarrow P(-\alpha) = 0$

$(-\alpha)^3 + \alpha(-\alpha)^2 - \alpha + \beta = 0$

$-\alpha^3 + \alpha \cdot \alpha^2 - \alpha + \beta = 0$

$-\alpha^3 + \alpha^3 - \alpha + \beta = 0$

$\alpha = \beta$

Άρκει ν.δ.ο $P(-\beta) = 0$.

$P(-\beta) = (-\beta)^3 + \alpha(-\beta)^2 - \beta + \beta =$

$= -\beta^3 + \alpha \cdot \beta^2 = -\beta^3 + \beta^3 = 0$ ✓

27. Το $P(x) = x^3 - ax^2 + \beta x + 4$ εχει παραγοντα το $x^2 - 4$.

Βρει a, β.

$\rightarrow x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

↓ παραγοντα $P(x)$ → παραγοντα του $P(x)$

$P(2) = 0$ $\quad$ $P(-2) = 0$

$P(2) = 2^3 - a \cdot 2^2 + \beta \cdot 2 + 4 = 0$

$8 - 4a + 2\beta + 4 = 0$

$-4a + 2\beta = -12$

$-2a + \beta = -6$

$P(-2) = (-2)^3 - a(-2)^2 + \beta(-2) + 4 = 0$

$-8 - 4a - 2\beta + 4 = 0$

$-4a - 2\beta = 4$

$-2a - \beta = 2$

$$\begin{cases} -2a + B = -6 \\ -2a - B = 2 \end{cases} \quad \oplus$$

$$-2 - B = 2$$

$$B = -4$$

$$-4a = -4$$

$$a = 1$$

Β' τρόπος

$$x^3 - ax^2 + Bx + 4 \;\big|\; x^2 - 4$$

$$-(x^3 - 4x) \qquad\qquad x - a$$

$$-ax^2 + (B+4)x + 4$$

$$-(-ax^2 + 4a)$$

$$(B+4)x + 4 - 4a$$

Αλλιώς $\longrightarrow$ $v = 0$

$B + 4 = 0$

$B = -4$

$4 - 4a = 0$

$4 = 4a$

$a = 1$

Γ' Τρόπο

$$x^2-4=(x-2)(x+2)$$

$$(x^3-ax^2+Bx+4):(x-2)$$

1	$-a$	B	4	(2)
↓	2	$4-2a$	$8-4a+2B$	
1	$2-a$	$4-2a+B$	$-4a+2B+12$	

$-4a+2B+12 \longrightarrow 0$

$$\alpha=1$$

1	$2-a$	$4-2a+B$	(−2)
↓	-2	$2a$	
1	$-a$	$B+4$	

$B+4 \longrightarrow 0$

$$B=-4$$

28. $P(x) = \alpha x^3 - (\alpha-\gamma)x^2 - 2\beta x + \gamma - 1$

Έχει παράγοντα το $x^3 - x$

$$x^3 - x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$$

$P(0) = 0 \Rightarrow \gamma - 1 = 0$ $\quad (\gamma = 1)$

$P(1) = 0 \Rightarrow \alpha - (\alpha-\gamma) - 2\beta = 0$

$P(-1) = 0 \Rightarrow -\alpha - (\alpha-\gamma) + 2\beta + \gamma - 1 = 0$

$\gamma - 2\beta = 0$

$1 - 2\beta = 0$

$\beta = \frac{1}{2}$

$-\alpha - \alpha + \gamma + 2\beta + 1 - 1 = 0$

$-2\alpha + 1 + \gamma \cdot \frac{1}{\gamma} = 0$

$-2\alpha + 1 + 1 = 0$

$-2\alpha + 2 = 0$

$\alpha = 1$

17. $P(x) : (x+2)$ υπόλ. 2 $\rightarrow$ $P(-2) = 2$

$Q(x) = P(9x+7) + x^3 - 10$

Βρες το υπολ. των $Q(x) : (x+1)$

Τι ψαχνω; Το υπόλοιπο των $Q(x) : (x+1)$

ψαχνω το $Q(-1)$

$$Q(-1) = P(-2) - 1^3 - 10 = P(-2) - 11$$
$$= 2 - 11 = -9$$

$$Q(-1) = -9$$

18. $P(x) : (x^3+x-2) \xrightarrow{U} x^2-3$

Βρες το υπόλοιπο της $P(x) : (x-1)$

Ψάχνω $P(1)$

$$P(x) = (x^3+x-2)\,\pi(x) + x^2-3$$

$$P(1) = 1^2 - 3 = -2$$

39. $P(x):(x-1) \xrightarrow{\text{υπολ.}} 4 \Rightarrow P(1)=4$

$P(x):(x+1) \xrightarrow{\text{υπολ}} 2 \Rightarrow P(-1)=2$

Βρίσκω το υπόλοιπο της $P(x):(x^2-1)$

$$P(x) = (x^2-1)\,\Pi(x) + U(x)$$

$\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$

$\delta \qquad\qquad 1ου$

$$P(x) = (x^2-1)\,\Pi(x) + \alpha x + \beta.$$

$$P(1) = \alpha + \beta = 4$$

$$P(-1) = -\alpha + \beta = 2$$

$(+)$

$$2\beta = 6$$

$$\beta = 3$$

$$\alpha = 1$$

$$U(x) = x + 3$$

41. Το x είναι παράγοντας του $P(x)$ $\boxed{P(0)=0}$

Η $P(x):(x-1) \xrightarrow{U} 2$ $\boxed{P(1)=2}$

Η $P(x):(x+1) \xrightarrow{U} 3$ $\boxed{P(-1)=3}$

Βρες το υπόλοιπο της $P(x):(x^3-x)$

$$P(x) = (x^3-x)\,\Pi(x) + U(x)$$

↓ 3ου ↓ 2ου

$$\boxed{P(x) = (x^3-x)\,\Pi(x) + \alpha x^2+\beta x+\gamma}$$

$U(x) = \frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$

$P(0) = \gamma = 0$

$P(1) = \alpha+\beta+\gamma = 2 \Rightarrow \alpha+\beta=2$ (+)

$P(-1) = \alpha-\beta+\gamma = 3 \Rightarrow \alpha-\beta=3$

$2\alpha = 5$ $\alpha = \frac{5}{2}$

$\frac{5}{2}+\beta = 2$ $\beta = -\frac{1}{2}$