Ενότητα
21

1. $3, 7, 11, \ldots$

(a) $\alpha_1 = 3 \qquad \omega = 4$

(B) $\alpha_\nu = \alpha_1 + \omega(\nu - 1)$

$\alpha_\nu = 3 + 4(\nu - 1)$

$\alpha_\nu = 3 + 4\nu - 4.$

$\boxed{\alpha_\nu = 4\nu - 1.}$

2. ⓐ 5, 8, 11, ...

$a_1 = 5$ $\quad\quad$ $\omega = 3$

$a_\nu = a_1 + \omega(\nu - 1)$

$a_\nu = 5 + 3(\nu - 1)$

$a_\nu = 5 + 3\nu - 3$

$\boxed{a_\nu = 3\nu + 2}$

$a_{11} = 3 \cdot 11 + 2$

$a_{11} = 33 + 2$

$a_{11} = 35.$

γ) $1, -2, -5, \ldots$

$a_1 = 1 \qquad \omega = -3$

$$a_\nu = a_1 + \omega(\nu - 1)$$

$$a_\nu = 1 - 3(\nu - 1)$$

$$\boxed{a_\nu = -3\nu + 4}$$

$$a_{31} = -3 \cdot 31 + 4$$

$$a_{31} = -89$$

3. 2, 5, 8, ...

(a) $a_1 = 2 \quad \omega = 3$

$a_\nu = a_1 + \omega(\nu - 1)$

$a_\nu = 2 + 3(\nu - 1)$

$\boxed{a_\nu = 3\nu - 1}$

$a_{21} = 3 \cdot 21 - 1$

$a_{21} = 62$

(B) $a_\nu = 32$

$3\nu - 1 = 32$

$3\nu = 33$

$\nu = 11$

4. ⓐ $-2, \frac{1}{2}, 3, \ldots$

$\rightarrow 3 - \frac{1}{2} = \frac{6}{2} - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

$\omega = \frac{5}{2}$ $\alpha_1 = -2$

$\alpha_\nu = \alpha_1 + \omega(\nu - 1)$

$\alpha_\nu = -2 + \frac{5}{2}(\nu - 1)$

$\alpha_{11} = -2 + \frac{5}{2} \cdot 10$

$\alpha_{11} = 23$

ⓑ $98 = \alpha_\nu \iff 98 = -2 + \frac{5}{2}(\nu - 1)$

$196 = -4 + 5(\nu - 1)$

$200 = 5(\nu - 1)$

$40 = \nu - 1$ $\quad \nu = 41$

5. $a_1 = -3$

$a_{10} = 12.$

(a) $\boxed{a_v = a_1 + w(v-1)}$

$a_{10} = a_1 + 9w$

$12 = -3 + 9w$

$15 = 9w$

$w = \frac{15}{9}$

$w = \frac{5}{3}$

(B) $a_{22} = a_1 + 21w$

$a_{22} = -3 + 21 \cdot \frac{5}{3}$

$a_{22} = -3 + 35$

$a_{22} = 32$

2. $a_v = 27$

$a_1 + \omega(v-1) = 27$

$-3 + \frac{5}{3}(v-1) = 27$

$\frac{5}{3}(v-1) = 30$

$5(v-1) = 90$

$5v - 5 = 90$

$5v = 95$

$v = 19$

15. $a_3 = 2k+1$

$a_4 = k+3$

$a_5 = 1-2k$

$$a_4 = \frac{a_3 + a_5}{2}$$

$$k+3 = \frac{\cancel{2k}+1+1-\cancel{2k}}{2}$$

$$2k+6 = 2$$

$$2k = -4$$

$$k = -2$$

Διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

α, β, γ

Ισχύει ότι $\beta = \dfrac{\alpha + \gamma}{2}$.

Ασκηση 1

Να βρει το $\lambda \in \mathbb{R}$ ωστε η εξισωση $x^2+(\lambda-3)x+6-\lambda=0$ να εχει δυο πραγματικες και ανισες ριζες.

Απαιτω $\Delta > 0$

$$\beta^2-4\alpha\gamma>0$$

$$(\lambda-3)^2-4(6-\lambda)>0$$

$$\lambda^2-6\lambda+9-24+4\lambda>0$$

$$\lambda^2-2\lambda-15>0$$

λ		-3		5	
$\lambda^2-2\lambda-15$	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\lambda \in (-\infty,-3)\cup(5,+\infty).$$

Ασκηση 2

Να βρεί το λ ωστε η εξισωση

$$-x^2+(\lambda+5)x-3\lambda-7=0$$

να ειναι αδυνατη.

$$\Delta<0$$

$$\beta^2-4\alpha\gamma<0$$

$$(\lambda+5)^2-4(-1)(-3\lambda-7)<0$$

$$\lambda^2+10\lambda+25+4(-3\lambda-7)<0$$

$$\lambda^2+10\lambda+25-12\lambda-28<0$$

$$\lambda^2-2\lambda-3<0$$

λ	-1		3	
$\lambda^2-2\lambda-3$	$+$	0 $-$	0	$+$

$$\lambda\in(-1,3)$$

Ασκηση 3

Να βρει το λ ωστε η εξισωση

$$-2x^2+3x+2\lambda^2-5\lambda-12=0$$

να εχει ετεροσημες ριζες,

Απαιτω $P<0$

$$\frac{\gamma}{\alpha}<0$$

$$\frac{2\lambda^2-5\lambda-12}{-2}<0$$

$$2\lambda^2-5\lambda-12>0$$

$\Delta=25+8\cdot12$

$\Delta=25+96$

$\Delta=121$

$\lambda=\frac{5\pm11}{4}$ < 4, $-\frac{3}{2}$

λ		$-\frac{3}{2}$		4	
$2\lambda^2-5\lambda-12$	+	0	−	0	+

$\lambda\in(-\infty,-\frac{3}{2})\cup(4,+\infty)$.

Άσκηση 4

Να βρεθεί το λ ώστε η εξίσωση

$$x^2-(\lambda-3)x+3-2\lambda=0$$

να έχει δύο αρνητικές και άνισες ρίζες.

$S<0$

$-\frac{\beta}{\alpha}<0$

$-\frac{-(\lambda-3)}{1}<0$

$\lambda-3<0$

$\lambda<3$

$P>0$

$\frac{\gamma}{\alpha}>0$

$\frac{3-2\lambda}{1}>0$

$3-2\lambda>0$

$3>2\lambda$

$\frac{3}{2}>\lambda$

$\Delta>0$

$\beta^2-4\alpha\gamma>0$

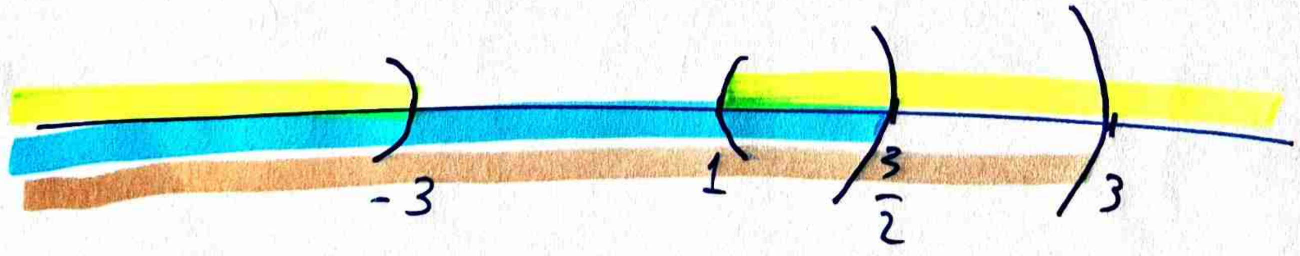
$(\lambda-3)^2-4(3-2\lambda)>0$

$\lambda^2-6\lambda+9-12+8\lambda>0$

$\lambda^2+2\lambda-3>0$

λ	-3 $\quad$ 1
$\lambda^2+2\lambda-3$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$

$\lambda\in(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$



$x\in(-\infty,-3)\cup(1,\frac{3}{2})$.

Ασκηση 5

Να βρεις το λ ωστε ο τριωνυμο

$$(\lambda-7)x^2+(\lambda-4)x-1$$

να διατηρει σταθερο προσημο.

$\Delta<0$ και $\alpha\neq 0$

$\lambda-7\neq 0$

$\lambda\neq 7$

$\beta^2-4\alpha\gamma<0$

$(\lambda-4)^2-4(\lambda-7)(-1)<0$

$\lambda^2-8\lambda+16+4(\lambda-7)<0$

$\lambda^2-8\lambda+16+4\lambda-28<0$

$\lambda^2-4\lambda-12<0$

λ		-2		6	
$\lambda^2-4\lambda-12$	$+$		$-$		$+$

$\lambda\in(-2,6)$

Ασκηση 6

Να βρω το λ ωστε το

τριωνυμο $\lambda x^2 + (\lambda-3)x + \lambda$

να ειναι αρνητικο

$\Delta < 0$ και $\lambda < 0$

$\beta^2 - 4\alpha\gamma < 0$

$(\lambda-3)^2 - 4\cdot\lambda\cdot\lambda < 0$

$(\lambda-3)^2 - 4\lambda^2 < 0$

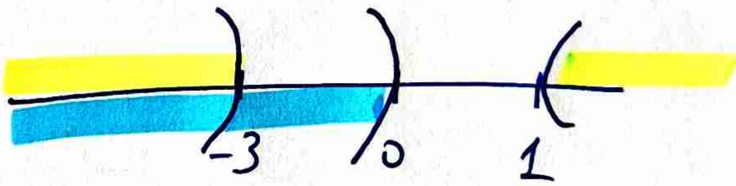
$\lambda^2 - 6\lambda + 9 - 4\lambda^2 < 0$

$-3\lambda^2 - 6\lambda + 9 < 0$

$-\lambda^2 - 2\lambda + 3 < 0$

λ		-3		1	
$-\lambda^2-2\lambda+3$	$-$		$+$		$-$

$\lambda \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$



$\lambda \in (-\infty, -3)$.

Ασκηση 7

Να βρεί τα λ ώστε η ανίσωση $4x^2+4(2\lambda-1)x+4-3\lambda \geq 0$ να αληθεύει.

Δηλαδή να είναι θετικό

$\Delta \leq 0$ και $\alpha > 0$, $4>0$ ✓

$$\beta^2-4\alpha\gamma \leq 0$$

$$\left[4(2\lambda-1)\right]^2-4\cdot 4\cdot(4-3\lambda) \leq 0$$

$$16(2\lambda-1)^2-16(4-3\lambda) \leq 0$$

$$4\lambda^2-4\lambda+1-4+3\lambda \leq 0$$

$$4\lambda^2-\lambda-3 \leq 0$$

$\Delta = 1+48=49$

$\lambda = \frac{1\pm 7}{8}$: 1, $-\frac{3}{4}$

λ	$-\frac{3}{4}$		1	
$4\lambda^2-\lambda-3$	$+$	$-$		$+$

$\lambda \in [-\frac{3}{4}, 1]$.

Ασκηση 8

Νδο η εξισωση $x^2-(3\lambda-1)x+\lambda^2-1=0$

εχει πραγματικη ριζα.

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (3\lambda-1)^2 - 4(\lambda^2-1)$$

$$\Delta = 9\lambda^2 - 6\lambda+1 - 4\lambda^2 + 4$$

$$\Delta = 5\lambda^2 - 6\lambda + 5.$$

$$\Delta^* = (-6)^2 - 4\cdot 5\cdot 5$$

$$\Delta^* = 36 - 100$$

$$\Delta^* = -64 < 0$$

Αφου η $\Delta^* < 0$ το τριωνυμο $5\lambda^2-6\lambda+5$ διατηρει σταθερο προσημο ομοσημο του α δηλαδη θετικο αρα $\Delta > 0$

Ασκηση 9

Νδο η εξισωση $x^2+(\lambda-1)x+\lambda^2-\lambda+1=0$

ειναι αδυνατη.

$\Delta = B^2 - 4\alpha\gamma = (\lambda-1)^2 - 4(\lambda^2-\lambda+1)$

$\Delta = \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4\lambda^2 + 4\lambda - 4$

$\Delta = -3\lambda^2 + 2\lambda - 3$

$\Delta^* = 2^2 - 4(-3)(-3)$

$\Delta^* = 4 - 36 = -32$

$\Delta^* = -32$

Αφου $\Delta^* < 0$ το τριωνυμο $-3\lambda^2+2\lambda-3$

διατηρει σταθερο προσημο ομοσημο του α

οπα αρνητικο δηλαδη $\Delta < 0$ αρα η εξισωση

αδυνατη

Ασκηση 10

Δινεται η εξισωση $x^2+(\lambda+3)x+\lambda+6=0$

ⓐ Να βρεις τα λ ωστε η εξισωση να εχει πραγματικες ριζες.

ⓑ Αν x_1, x_2 οι ριζες βρες λ ωστε $x_1^2+x_2^2<42$

Λυση

ⓐ $\Delta \geq 0 \Rightarrow \beta^2-4\alpha\gamma \geq 0 \Rightarrow (\lambda+3)^2-4(\lambda+6)\geq 0$

$\lambda^2+6\lambda+9-4\lambda-24\geq 0 \Rightarrow \lambda^2+2\lambda-15\geq 0$

λ		-5		3	
$\lambda^2+2\lambda-15$	$+$		$-$		$+$

$\lambda\in(-\infty,-5]\cup[3,+\infty)$

ⓑ $x_1^2+x_2^2<42$

$x_1+x_2=-(\lambda+3)$

$x_1x_2=\lambda+6$

$(x_1+x_2)^2-2x_1x_2<42$

$\left(-(\lambda+3)\right)^2-2(\lambda+6)<42$

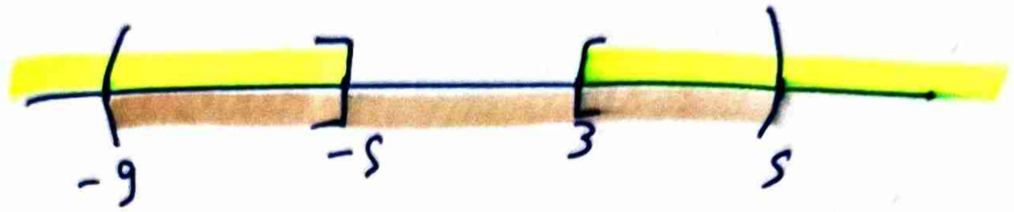
$\lambda^2+6\lambda+9-2\lambda-12-42<0$

$\lambda^2+4\lambda-3-42<0$

$\lambda^2+4\lambda-45<0$

λ		-9		5	
$\lambda^2+4\lambda-45$	$+$		$-$		$+$

$\lambda\in(-9,5)$.



$\lambda \in (-9, -5] \cup [3, 5).$

Παραγοντοποιηση τριωνυμου

1. $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2)$

$\Delta>0$

$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

$$x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}$$

2. $\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)^2$

$\Delta=0$

$$x_1=\frac{-\beta}{2\alpha}$$

3. $\alpha x^2+\beta x+\gamma=$ $-$

$\Delta<0$ δεν παραγοντοποιειται

Ασκηση 11

Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις

$$\frac{2x^2+x-6}{4x^2-12x+9} = \frac{2(x-\frac{3}{2})(x+2)}{4\cdot(x-\frac{3}{2})^2} = \frac{\cancel{(2x-3)}(x+2)}{(2x-3)^{\cancel{2}}}$$

$$= \frac{x+2}{2x-3}$$

$\Delta = 144 - 4\cdot4\cdot9$

$\Delta = 1^2 - 4\cdot2\cdot(-6)$

$\Delta = 144 - 144$

$\Delta = 1+48$

$\Delta = 0$

$\Delta = 49$

$$x_{1,2} = \frac{-1\pm7}{4} \begin{cases} \frac{3}{2} \\ -2 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

Επεξήγηση

$$4(x-\tfrac{3}{2})^2 = 4(x-\tfrac{3}{2})(x-\tfrac{3}{2}) = (2x-3)(2x-3) = (2x-3)^2$$

Ασκηση 12

Να λυθεί η ανίσωση

$$x^4 - 5x^2 + 4 \leq 0$$

$\boxed{\text{Θέτω } x^2 = t}$

$$t^2 - 5t + 4 \leq 0$$

t		1		4	
t^2-5t+4	+		−		+

$$t \in [1,4]$$

$$1 \leq t \leq 4$$

$$1 \leq x^2 \leq 4$$

$x^2 \geq 1$ και $x^2 \leq 4$

$$x^2 - 1 \geq 0$$

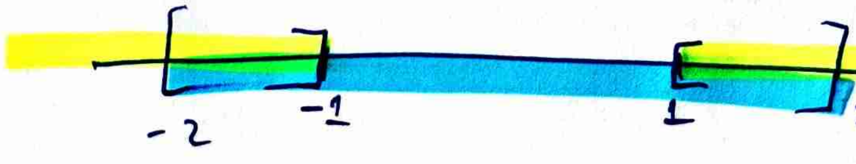
x		−1		1	
x^2-1	+		−		+

$$x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$$

$$x^2 - 4 \leq 0$$

x		−2		2	
x^2-4	+		−		+

$$x \in [-2,2]$$



2 $x \in [-2,-1] \cup [1,2]$.

1. Βρει τα λ ωστε η εξισωση

$(\lambda-1)x^2-2\lambda x+3\lambda-2=0$ να εχει δυο ριζες πραγματικες και ανισες.

2. Να βρειτε το λ ωστε η εξισωση

$-4x^2+(\lambda+3)x-\lambda=0$ να ειναι αδυνατη.

3. Να βρειτε το λ ωστε η εξισωση

$x^2+(\lambda+5)x-\lambda^2+2\lambda+8=0$ να εχει δυο διαφορετικες ριζες ομοσημες.

4. Να βρειτε το λ ωστε η εξισωση

$x^2+(\lambda-3)x+\lambda=0$ να εχει δυο ριζες ανισες.

5. Να βρειτε το λ ωστε το τριωνυμο $(\lambda+5)x^2+(\lambda+2)x+1$ να διατηρει σταθερο προσημο.

6. Να βρω το λ ώστε το τριώνυμο

$(\lambda-1)x^2+4x+\lambda+2$ να είναι θετικό.

7. Να βρω το λ ώστε η ανίσωση

$-x^2+(\lambda-5)x+\lambda-8\le 0$ να

αληθεύει.

8. Νδο η εξίσωση $x^2-\lambda x+\lambda-3=0$

έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες

9. Νδο $27-(x+2)^2>-2(x-3)(x+3)$

10. Να παραγοντοποιηθούν τα τριώνυμα

α) $2x^2-x-1$ β) $4x^2-4x+1$

γ) x^2-x+7

Επομενο Μαθημα

21

6 22

7 25,

8 36.

10

17

18.

19 α

20 α.