

Ενότητα 25

3. Η $f(x)$ παρουσιάζει τοπικό ακρότατο
στο 1 το -1.

$$f(x) = \alpha x^4 + \beta x^3.$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

Αφού η f παρουσιάζει ακρότατο στο 1
το 1 εσωτερικά του $\mathbb{R}$

Η f παρ/κη στο 1.

Fermat $f'(1) = 0$. και $f(1) = -1$

$$f'(x) = 4\alpha x^3 + 3\beta x^2$$

$$f'(1) = 4\alpha + 3\beta = 0$$

$$\alpha + \beta = -1$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ 4\alpha + 3\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3\alpha - 3\beta = 3 \\ 4\alpha + 3\beta = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{+} \underline{\underline{\alpha = 3}}$$

$$\underline{\underline{\beta = -4}}$$

Πανελλήνιου 2025

$$f(x) = x^3 + ax^2 + 9x - 3$$

Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο
στο $x_0 = 1$.

Η f έχει ακρότατο στο 1

Η f παρ/κη στο 1

Το 1 εσωτερικό του $\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow \text{Fermat} \quad \underline{\underline{f'(1) = 0}}$$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + 9$$

$$f'(1) = 3 + 2a + 9 = 0$$

$$2a + 12 = 0$$

$$\underline{\underline{a = -6}}$$

8. $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ nap/μn.

$$(x-1)f(x) \geq e^{x-1} - 1, \quad \forall x > 0$$

Nd $f(1) = 1$.

loxou
$$\underbrace{(x-1)f(x) - e^{x-1} + 1}_{g(x)} \geq 0$$

loxou ou $g(x) \geq 0$

$$g(x) \geq g(1)$$

• Ακροσώζω στο 1.

• g nap/μn στο 1

• 1 εσωτερικό $(0, +\infty)$

forawt $\underline{\underline{g'(1) = 0}}$

$$g'(x) = f(x) + (x-1)f'(x) - e^{x-1}$$

$$g'(1) = f(1) - 1 = 0$$

$$\underline{\underline{f(1) = 1}}$$

7. $f, g: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ nap / vd.

$$\bullet f(0) + 2 = g(0)$$

$$\bullet f(x) + 2e^{-x} \geq g(x) + \ln(x+1) \quad \forall x > -1$$

$$\text{Né} \quad f'(0) = g'(0) + 3$$

$$\underbrace{f(x) + 2e^{-x} - g(x) - \ln(x+1)}_{h(x)} \geq 0 \Rightarrow h(x) \geq 0$$

$$h(x) \geq h(0)$$

Árrolás
sz 0

$$h'(x) = f'(x) - 2e^{-x} - g'(x) - \frac{1}{x+1}$$

Feront

$$\underline{\underline{h'(0) = 0}}$$

$$h'(0) = f'(0) - 2 - g'(0) - 1 = 0$$

$$f'(0) - g'(0) = 3$$

$$\underline{\underline{f'(0) = g'(0) + 3}}$$

17.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

 f convex

$$f(1) = -2$$

 f' convex

$$\bullet f(x) \leq -2x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

 f''

$$\bullet (f^2(x))' \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{a} \quad y - f(1) = f'(1)(x - 1)$$

$$\rightarrow f(x) \leq -2x$$

$$\underbrace{f(x) + 2x}_{g(x)} \leq 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) \leq 0$$

$$g(x) \leq g(1)$$

Applying the
1

Fermat

$$g'(1) = 0$$

$$g'(x) = f'(x) + 2$$

$$g'(1) = f'(1) + 2 = 0$$

$$\underline{\underline{f'(1) = -2}}$$

$$y - (-2) = -2(x - 1)$$

$$\boxed{y = -2x}$$

(B).

$$(f^2(x))' \neq 0$$

$$2f(x)f'(x) \neq 0$$

$f(x) \neq 0$ $f(x)$ σωστό

 και

$f'(x) \neq 0$ σωστό

$$f'(x) > 0 \text{ ή } f'(x) < 0$$

$$f'(1) = -2$$

$$\underline{\underline{f'(x) < 0}}$$

$$f \downarrow$$



$$f(x) > 0 \text{ ή } f(x) < 0$$

$$f(1) = -2$$

$$\underline{\underline{f(x) < 0}}$$

Προσοχή

Εάν συν συμπίπτει ότι $f'(1) = -2$
τότε για να βρω ποσοστό
παραγωγής να είναι 0.17

$$f'(1) = \frac{f(1) - f(a)}{1 - a}$$

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[\substack{x \rightarrow 0^+ \\ t \rightarrow +\infty}]{\frac{1}{x} = t} \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t),$$

$$f(x) \leq -2x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} -2x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

9.

$$f(1) = 1$$

$$f(x) \geq 1$$

$$f''(x) > 0$$

$$f \text{ convex}$$

$$f' \text{ increasing}$$

$$f''$$

$$\bullet f(x) \geq 1$$

$$f(x) \geq f(1)$$

Аксиома
свойства

Fermat

$$f'(1) = 0$$

x		1
f''	+	+
f'	-	+
f	-	+

$$f(x) \geq f(1)$$

$$f(x) \geq 1$$

15. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nap /v/

$$f'(0) = 1$$

$$f(h(x)) + e^{h(x)} = e^x - x$$

Nso δu exu akpocaw.

— στω ου η f exu
στω x_0
akpocaw

Fermat

$$f'(x_0) = 0.$$

$$f'(h(x)) f'(x) + e^{h(x)} f'(x) = e^x - 1$$

$x = x_0$

~~$$f'(h(x_0)) \cdot f'(x_0) + f'(x_0) e^{h(x_0)} = e^{x_0} - 1$$~~

~~$$0 = e^{x_0} - 1$$~~

$$f'(0) = 0$$

$$e^{x_0} - 1$$

$$x_0 = 0$$

Atow gaw $f'(0) = 1$, oup sw exu akpocaw

16.

$$f^3(x) + x f(x) = x + 2$$

— σ_{TW} σu $\sigma x u$ $\sigma p o c a z$
 $\sigma \omega$ x_0

Fermat $f'(x_0) = 0$.

$$3f^2(x)f'(x) + f(x) + xf'(x) = 1$$

$x = x_0$

~~$$3f^2(x_0)f'(x_0) + f(x_0) + x_0f'(x_0) = 1$$~~

$$\underline{\underline{f(x_0) = 1}}$$

$$f^3(x_0) + x_0 f(x_0) = x_0 + 2$$

~~$$1 + x_0 \cdot 1 = x_0 + 2$$~~

$$1 = 2$$

Атом!

Fermat

Εστω f ορισμένη στο Δ

- Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0
- Το x_0 εσωτερικό του Δ
- και η f παρ/μη στο x_0

Τότε $f'(x_0) = 0$.

κριση Σημείων

- Τα εσωτερικά σημεία του Δ
στα οποία η f δεν παραγωγίζεται.
- Οι ρίζες της $f'(x)$ εσωτερικά
του Δ ,

Πρώτα Θέλω ακροτήτων

- κριση σημείων.
- Ακρα του πρώτου ορισμού εφόσον
είναι κλειστά.

$$\text{II. } f(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & -1 \leq x < 1 \\ (x-2)^2 + 1, & 1 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^3 + 1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x-2)^2 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

$$f(1) = 2$$

Σωσυνολικά

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 + 1 - 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3x^2}{1} = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-2)^2 + 1 - 2}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 4x + 4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x - 4}{1} = \boxed{-2}$$

H of $0x1$ $\sup/\mu$ ≈ 1

$T_0 \quad 1 \quad \text{KPIOCPO} \quad \text{CHPO}$

$$\underline{-1 \leq x < 1}$$

$$f_1(x) = x^3 + 1$$

$$f_1'(x) = 3x^2$$

$$\rightarrow 3x^2 = 0$$

$$\boxed{x = 0}$$

K. Σ.

$$\underline{1 < x \leq 3}$$

$$f_2(x) = (x-2)^2 + 1$$

$$f_2'(x) = 2(x-2)$$

$$\rightarrow 2(x-2) = 0$$

$$\boxed{x = 2}$$

K. Σ.

Κριση Σημια : 1, 0, 2

Πιθανά Δεσλ Ακροατων

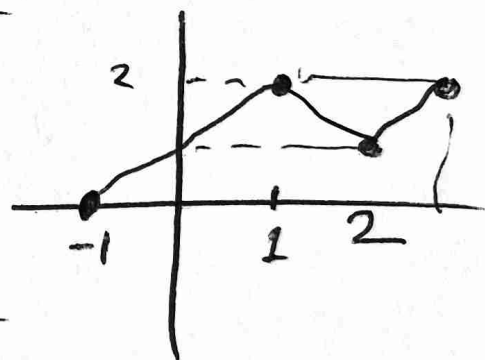
Κριση Σημια

1, 0, 2

Ακρυ

-1, 3.

x	-1	0	1	2	3	
f_1'	+	0	+	///		
f_2'	///			-	0	+
f'	+	+	-	+		
f	↗	↗	↘	↗		



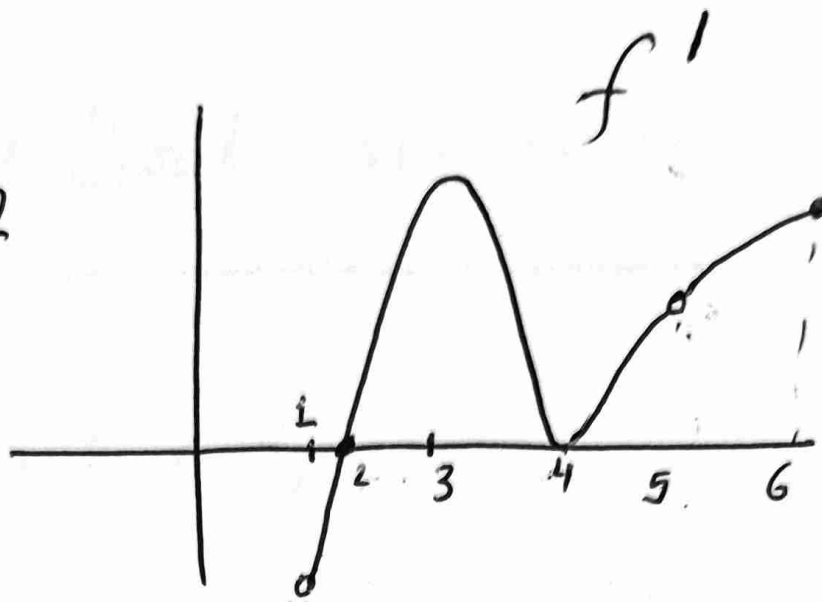
$$f(-1) = 0$$

$$f(3) = 2$$

$$\sum T_f = [0, 2]$$

10.

$f: [1, 6] \rightarrow \mathbb{R}$
συνχ.



Κρισιμα σημεια.

2, 4
~~~~~  
Ριζα  $f'$

5  
↓  
Η  $f$  οχι παρ/κη  
εκει .

{  $T_0 \geq 1$  , οριζων  $n$   $f$  συν αυξων

παρ/κη οριζων αυξων ακρο

αρα συν αυξων κρισιμα σημεια

Π, David David algorithm

Κριση : 2, 4, 5

Αλλα : 1, 6 .

| x | z |    |
|---|---|----|
| + | - | +  |
| + | ↘ | ↗. |



## Ενότητα 24

61.

$$f(x) =$$

$$\begin{cases} \alpha - \frac{1}{x}, & -1 < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -2e^{1-x} - \frac{x^3}{3} - x + \beta, & x > 0 \end{cases}$$

α

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \alpha - \frac{1}{x} \right) = \alpha - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( -2e^{1-x} - \frac{x^3}{3} - x + \beta \right) = -2e + \beta$$

$$f(0) = 0$$

$$\boxed{\alpha = 1}$$

$$\boxed{\beta = 2e}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{x}, & -1 < x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -2e^{1-x} - \frac{x^3}{3} - x + 2e, & x > 0 \end{cases}$$

⑧

$$\underline{-1 < x < 0}$$

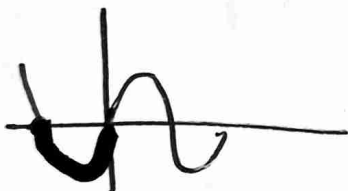
$$f_1(x) = 1 - \frac{\ln x}{x}$$

$$f_1'(x) = - \frac{x \ln x - \ln x}{x^2}$$

$$\boxed{\varphi(x) = x \ln x - \ln x} \quad \varphi(0) = 0$$

$$\varphi'(x) = \ln x - x \ln x - \frac{1}{x}$$

$$\varphi'(x) = -x \ln x < 0$$



| x          | -1         | 0          |
|------------|------------|------------|
| $\varphi'$ | -          |            |
| $\varphi$  | $\searrow$ | $\nearrow$ |
| $-x^2$     | -          |            |
| $f_1'$     | -          |            |
| $f_1$      | $\searrow$ |            |

$$x < 0 \Rightarrow \varphi(x) > \varphi(0)$$

$$\varphi(x) > 0$$

| x | -1         | 0          | 1          |
|---|------------|------------|------------|
| f | $\searrow$ | $\nearrow$ | $\searrow$ |

$$\underline{x > 0}$$

$$f_2(x) = -2e^{1-x} - \frac{x^3}{3} - x + 2e$$

$$f_2'(x) = 2e^{1-x} - x^2 - 1$$

$$f_2''(x) = -2e^{1-x} - 2x < 0$$

| x       | 0          | 1          | $+\infty$  |
|---------|------------|------------|------------|
| $f_2''$ | -          | -          |            |
| $f_2'$  | $\searrow$ | $\nearrow$ | $\searrow$ |
| $f_2$   | $\searrow$ | $\searrow$ |            |

$$(8) f(e^{-x^2} - 3) = f(-2)$$

$$\bullet -x^2 < 0$$

$$e^{-x^2} < e^0$$

$$e^{-x^2} < 1$$

$$e^{-x^2} - 3 < -2$$

$$\forall x \in (-n, 0) \text{ u } f \downarrow$$

$$e^{-x^2} - 3 = -2$$

$$e^{-x^2} = 1$$

$$-x^2 = 0$$

$$x = 0$$

52.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sin x}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$y - 0 = f'(0)x$$

$$y = f'(0)x$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1 - \sin x}{x} - 0}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sin x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f'(0) = \frac{1}{2}$$

Апрку vdo  $\frac{1}{2}x > \frac{1-\cos x}{x} \quad \forall x > 0$

$$x^2 > 2 - 2\cos x$$

$$x^2 - 2 + 2\cos x > 0$$

$\varphi(x)$

$$\varphi'(x) = 2x - 2\sin x = 2(x - \sin x)$$

$$\varphi'(0) = 0.$$

$$\varphi''(x) = 2 - 2\cos x$$

$$\varphi''(x) = 2(1 - \cos x) > 0$$

| x           | 0 |
|-------------|---|
| $\varphi''$ | + |
| $\varphi'$  | + |
| $\varphi$   | + |

$\forall x > 0$  Тільки  
Внм.

$$\varphi(x) > \varphi(0)$$

$$\varphi(x) > 0$$

# Επορω Μαθημα

---

25

---

2

4

5

6

14

+

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & -1 \leq x \leq 0 \\ \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$$

Θεω

→ κριση Σημω

→ η, δανδ θαωλ υπερωτω.

→ σωδο Τερμ.