28. $f(x) = x(x-2)$

ΕΥΟΤΗΤΑ 17

$\boxed{f(x) = x^2 - 2x}$ $\quad f'(x) = 2x - 2$

$\boxed{g(x) = -x^2 - 5}$ $\quad g'(x) = -2x$

$$\begin{cases} f'(\alpha) = g'(\beta) \\ f(\alpha) - \alpha f'(\alpha) = g(\beta) - \beta g'(\beta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\alpha - 2 = -2\beta \\ \alpha^2 - 2\alpha - \alpha \cdot (2\alpha - 2) = -\beta^2 - 5 - \beta(-2\beta) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha - 1 = -\beta \Rightarrow \boxed{\beta = 1 - \alpha} \\ \alpha^2 - 2\alpha - 2\alpha^2 + 2\alpha = -\beta^2 - 5 + 2\beta^2 \end{cases}$$

$$-\alpha^2 = \beta^2 - 5$$

$$-\alpha^2 = (1-\alpha)^2 - 5$$

$$-\alpha^2 = 1 - 2\alpha + \alpha^2 - 5$$

$$2\alpha^2 - 2\alpha - 4 = 0$$

$$\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$$

$\alpha = 2$

$\alpha = -1$

$y - f(2) = f'(2)(x - 2)$

$y - f(-1) = f'(-1)(x + 1)$

Ενότητα 17

31. $f(x) = e^x + \frac{x^2}{2} + x - 1$

Βρείτε την εφαπτομένη της $f(x)$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: 2x - y + 1 = 0$.

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ // $2x - y + 1 = 0$

$y = 2x + 1$

$\Rightarrow$ $f'(x_0) = 2$.

$f'(x) = 2$

$e^x + \frac{1}{2} 2x + 1 = 2$

$e^x + x + 1 - 2 = 0$

$e^x + x - 1 = 0$.

Προφανής ρίζα $x = 0$

$\varphi(x) = e^x + x - 1$

$\varphi'(x) = e^x + 1 > 0$

φ

$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$y - 0 = 2x$

$y = 2x$

33. $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 3$

Ψάχνω εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή αξόνων

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, $\longrightarrow (0,0)$

$0 - f(x) = f'(x)(0 - x)$

$-\left(\ln x - \frac{1}{x} + 3\right) = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)(-x)$

$-\ln x + \frac{1}{x} - 3 = -1 - \frac{1}{x}$

$-\ln x + \frac{1}{x} - 3 + 1 + \frac{1}{x} = 0$

$-\ln x + \frac{2}{x} - 2 = 0$ (x·x)

προφανής $x = 1$

$\varphi(x) = -\ln x + \frac{2}{x} - 2$

$\varphi'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} < 0$

$\varphi \downarrow$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2}{\sqrt[3]{x}-1} =$$

$\sqrt[6]{x} = t$

$\sqrt[3]{x} = t^2$

$\sqrt{x} = t^3$

$x \to 1$

$t \to 1$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{t^2+t^3-2}{t^2-1} =$$

$$= \lim_{t\to 1} \frac{2t+3t^2}{2t} = \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

Μονοτονια Συναρτησεων

1. Αν $f'(x) \geq 0$ τοτε $f \nearrow$

2. Αν $f'(x) \leq 0$ τοτε $f \searrow$

Ενοτητα 23

2. (β) $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$, $x > 0$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0$ $f \searrow$

(δ) $f(x) = 2x + \sigma\upsilon\nu x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

$f'(x) = 2 - \eta\mu x \geq 0$ $f \nearrow$

$-1 \leq \eta\mu x \leq 1$

$1 \geq -\eta\mu x \geq -1$

$3 \geq 2 - \eta\mu x \geq 1$ $\rightarrow 3 \geq f'(x) \geq 1$

3. (B) $f(x) = -x^2 - 2x + 3$, $x \in R$.

$f'(x) = -2x - 2$

$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow -2x - 2 = 0$

$-2x = 2$

$x = -1$

x		-1	
f'	$+$	0	$-$
f	↗		↘

$f(x) \leq f(-1)$

$f(x) \leq 4$

4. (δ) $f(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x - 1$

$$f'(x) = \frac{1}{4}4x^3 - 6x^2 + \frac{11}{2}2x - 6$$

$$\boxed{f'(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6.}$$

$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$

	1	−6	11	−6	(1)
↓		1	−5	6	
	1	−5	6	0	

$$(x-1)(x^2 - 5x + 6) = 0$$

(x = 1) (x = 2) (x = 3)

x		1		2		3	
x − 1	−	0	+	+	+	+	+
$x^2 - 5x + 6$	+	+	0	−	0	+	+
f'	−		+		−		+
f	↘		↗		↘		↗

7. (B) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{x^2+1 - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}}$$

$\longrightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0$

x		-1		1	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$1-x^2 = 0$

$x = 1$ $\quad$ $x = -1$

7. (ε) $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$, $x \neq 0$

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2} = 2\,\frac{x^3 - 1}{x^2}$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{x^3 - 1}{x^2}$$

$$\longrightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^3 - 1}{x^2} = 0 \Rightarrow x^3 - 1 = 0$$

$$x^3 = 1$$

$$x = 1$$

x		0		1	
f'	$-$	‖	$-$	0	$+$
f	↘	‖	↘	min	↗

8. (δ) $f(x) = \dfrac{x^3-2x}{x^2-1}$, $x \neq 1$, $x \neq -1$

$$f'(x) = \frac{(3x^2-2)(x^2-1)-(x^3-2x)2x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{3x^4-3x^2-2x^2+2-2x^4+4x^2}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^4-x^2+2}{(x^2-1)^2} \quad \begin{matrix}(+)\\(+)\end{matrix} \quad \rightarrow 0$$

$f \nearrow$

$\longrightarrow x^4-x^2+2$ είναι τριώνυμο

$\Delta = 1-8 = -7 < 0$

$\Rightarrow x^4-x^2+2 > 0$

x		-1		1	
$f(x)$	↗	|||	↘	|||	↘

10. $f(x) = (x^2+x+1)e^x$

$$f'(x) = (2x+1)e^x + (x^2+x+1)e^x$$

$$f'(x) = e^x(2x+1+x^2+x+1)$$

$$\boxed{f'(x) = e^x(x^2+3x+2)}$$

$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x^2+3x+2 = 0$

$x=-2$ $\quad$ $x=-1$

x		-2		-1	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

3. (6) $f(x) = -x^3 + x^2 + x + 3$

$$f'(x) = -3x^2 + 2x + 1$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$\longrightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm 4}{-6} \quad \left(\frac{1}{3}, \; 1\right)$$

x		$1/3$		1	
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

ΘΜΤ

- f συνεχής $[\alpha,\beta]$

  f παραγωγίσιμη (α,β)

  $\exists \xi \in (\alpha,\beta)$ τ.ω $f'(\xi) = \dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$.

- στ.σ. $f'(x) > 0$

- στ.σ. $f'(x) < 0$

f παραγωγίσιμη στο $[x_1, x_2]$



$x_1 < x_2$

Εφαρμόζω ΘΜΤ.

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

όμως $f'(x) > 0 \quad \forall x$

$f'(\xi) > 0$

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} > 0$$

$(+)$

$\Rightarrow f(x_2)-f(x_1) > 0$

$f(x_2) > f(x_1)$

$f(x_1) < f(x_2)$

$f \nearrow$

10. (52) $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{e^x(x^2+1) - e^x \cdot 2x}{(x^2+1)^1} = \frac{e^x(x^2+1-2x)}{(x^2+1)^1}$$

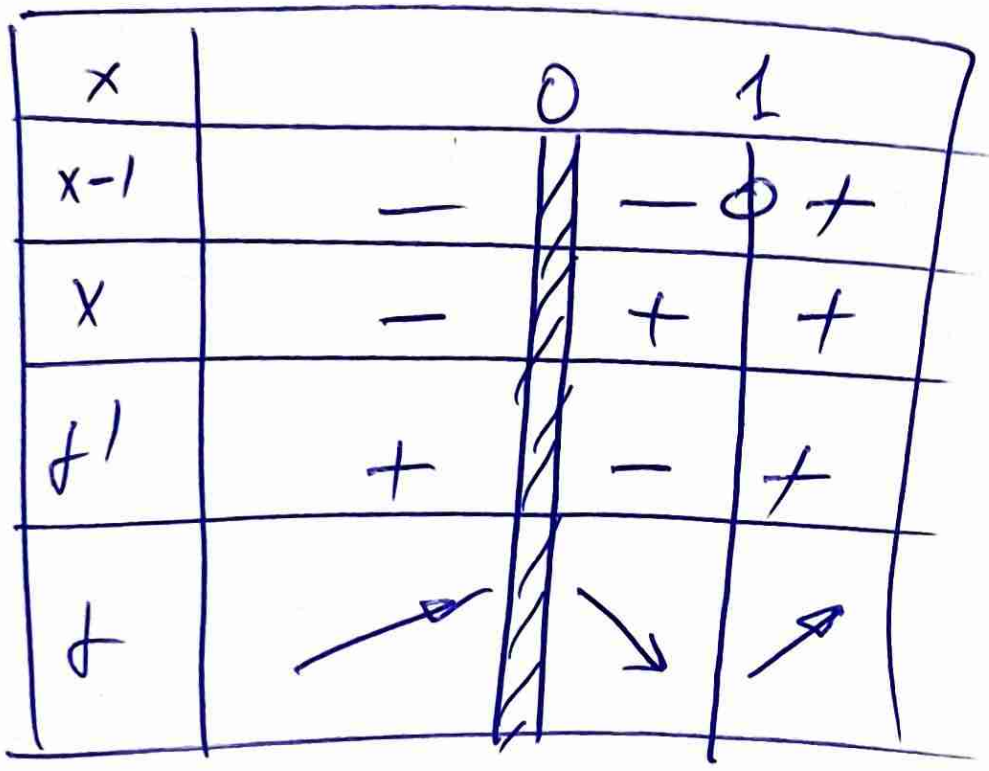
$$f'(x) = \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} \geq 0 \quad f \nearrow$$

11. (B) $f(x) = x\, e^{\frac{1}{x}}$, $x \neq 0$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + x \cdot e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = e^{\frac{1}{x}}\,\frac{x-1}{x}$$

$$f'(x) = \frac{x-1}{x}\, e^{\frac{1}{x}}$$


x
0
1
x-1
−
−
0
+
x
−
+
+
f'
+
−
+
f
↗
↘
↗

12. ⑥ $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $x > 0$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$\longrightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0$

$1 = \ln x$

$x = e$

x	0	e	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$
f	↗		↘

$f(x) \leq f(e)$

$f(x) \leq \frac{1}{e}$

12. (u) $f(x) = x^{\ln x}$, $x > 0$

$$f(x) = e^{\ln x \ln x} = e^{\ln x \ln x}$$

$$f'(x) = e^{\ln x \ln x} (\ln x \ln x)'$$

$$f'(x) = x^{\ln x} \left(\frac{1}{x} \ln x + \ln x \frac{1}{x} \right)$$

$$\boxed{f'(x) = x^{\ln x} \left(\frac{2 \ln x}{x} \right)}$$

$$\longrightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 2 \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

x	0	1	
f'		$-$ 0	$+$
f	$+$	$\searrow$	$\nearrow$

$f(x) \geq f(1)$

$f(x) \geq 1$

14. (B) $f(x) = \frac{x^2}{2} - x\cos x + \sin x$

$f'(x) = \frac{1}{2} 2x - (\cos x - x\sin x) + \cos x$

$f'(x) = x - \cos x + x\sin x + \cos x$

$f'(x) = x + x\sin x$

$f'(x) = x(1 + \sin x)$ — $(1+\sin x)$: (+)

$-1 \leq \sin x \leq 1$

$0 \leq \sin x + 1 \leq 2$

$\rightarrow f'(x) = 0$

$x(1 + \sin x) = 0$

$x = 0$

x		0	
f'	−	0	+
f	↘		↗

$f(x) \geq f(0)$

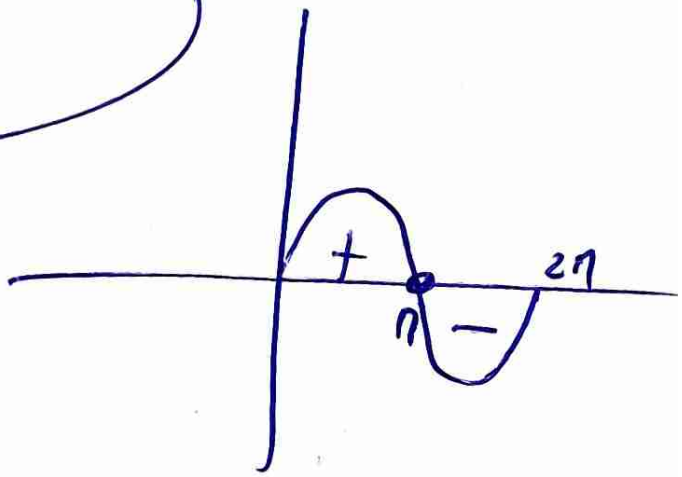
$f(x) \geq 0$

14. (δ) $f(x) = \dfrac{1}{1-\cos x}$ $\quad x \in (0, 2\pi)$

$$f'(x) = \frac{-(0+\sin x)}{(1-\cos x)^2} = \frac{-\sin x}{(1-\cos x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-\sin x}{(1-\cos x)^2}$$

x	0	π	2π
f'	$+$	0	$-$
f	↗		↘



$f(x) \le f(\pi)$

$f(x) \le \dfrac{1}{2}$

$f'(x) = 0$

$\dfrac{-\sin x}{(1-\cos x)^2} = 0$

$-\sin x = 0$

$\sin x = 0$

$x = \pi$

16. (B) $f(x) = \begin{cases} x^3-3x, & x<0 \\ x^2-4x, & x \geq 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} x^3-3x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x^2-4x = 0$

$\Big\} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

$f(0) = 0$

Συνεχής στο 0!

$x<0$

$f_1(x) = x^3-3x$

$f_1'(x) = 3x^2-3$

$f_1'(x) = 3(x^2-1)$

$\rightarrow f_1'(x) = 0$

$x^2-1 = 0$

$x=1$

$x=-1$

$x>0$

$f_2(x) = x^2-4x$

$f_2'(x) = 2x-4$

$\rightarrow f_2'(x) = 0$

$2x-4 = 0$

$x=2$

x		-1		0		1		2	
f_1'	$+$	0	$-$	//	//	0	$+$	$+$	
f_2'	//	//	//	//	$-$	$-$	0	$+$	
f'	$+$		$-$	$-$		$-$		$+$	
f	$\nearrow$		$\searrow$	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Α. Εύρεση μονοτονίας αλγεβρικά

2. Να μελετήσετε τις παρακάτω συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία.

α. $f(x)=e^x+x^3-1$

β. $f(x)=\frac{1}{x}-\ln x$

γ. $f(x)=-x^3+x^2-x+1$

δ. $f(x)=2x+\sigma\upsilon\nu x-1$

ε. $f(x)=1+(x-2)^3$

στ. $f(x)=x+\sigma\upsilon\nu x-1$

3. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=x^2-3x+1$

β. $f(x)=-x^2-2x+3$

γ. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$

δ. $f(x)=-x^3+x^2+x+3$

ε. $f(x)=x^3-3x+1$

στ. $f(x)=x^3-6x+1$

4. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\frac{x^4}{4}-x+1$

β. $f(x)=x^4+32x$

γ. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2x$

δ. $f(x)=\frac{x^4}{4}-2x^3+\frac{11}{2}x^2-6x-1$

ε. $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-2x$

στ. $f(x)=x^4+2x^2-8x+6$

5. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=x^4-2x^2-1$

β. $f(x)=5x-x^5$

γ. $f(x)=\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{2}x^2-1$

δ. $f(x)=\frac{1}{5}x^5-x^4-\frac{1}{2}x^2+4x$

ε. $f(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}+2x$

6. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+x-1$

β. $f(x)=-\frac{4x^3}{3}+2x^2-x-4$

γ. $f(x)=-3x^4+4x^3+2$

δ. $f(x)=x^4-\frac{4}{3}x^3-2x^2+4x-1$

ε. $f(x)=(x-1)^3(x-3)^3$

στ. $f(x)=(x+1)^5(x-2)^4$

7. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\frac{x}{x+1}$

β. $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$

γ. $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$

δ. $f(x)=x+\frac{1}{x}$

ε. $f(x)=x^2+\frac{2}{x}$

στ. $f(x)=x+\frac{4}{x^2}$

8. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^2}$

β. $f(x)=\ln|x|+\dfrac{1}{2x^2}$

γ. $f(x)=\dfrac{2-x^2}{x^4}$

δ. $f(x)=\dfrac{x^3-2x}{x^2-1}$

9. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\sqrt{x^2+4}$

β. $f(x)=\sqrt{4-x^2}$

γ. $f(x)=\sqrt{x^2-9}$

δ. $f(x)=x-4\sqrt{x}$

ε. $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{2-x}$

στ. $f(x)=x-2\sqrt{x-2}$

10. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=e^x-x+3$

β. $f(x)=e^x-ex$

γ. $f(x)=(x-2)e^x$

δ. $f(x)=(x^2+x+1)e^x$

ε. $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$

στ. $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$

11. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=e^{-2x}+x-1$

β. $f(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}}$

γ. $f(x)=e^{2x}-3e^x+x-1$

δ. $f(x)=e^x-e^{-x}-2x$

12. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=x\ln x-2x$

β. $f(x)=x^2\ln x$

γ. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

δ. $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

ε. $f(x)=x-e\ln x$

στ. $f(x)=x+\ln(x^2+1)$

ζ. $f(x)=x\ln^2 x-3x+2$

η. $f(x)=x^{\ln x}\ ,\ x>0$

13. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=(x-2)e^x-\dfrac{1}{2}x^2+x-1$

β. $f(x)=2xe^{-x}+(x-1)^2$

γ. $f(x)=(x^2-4x)\ln x-\dfrac{x^2}{2}+4x$

δ. $f(x)=(x^2-x)\ln x+\dfrac{x^2}{2}$

ε. $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2}$

στ. $f(x)=\dfrac{x}{\ln^2 x}$

14. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=e^{\eta\mu x}\ ,\ x\in[0,2\pi]$

β. $f(x)=\dfrac{x^2}{2}-x\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x$

γ. $f(x)=\eta\mu^2 x+4\sigma\upsilon\nu x\ ,\ x\in[-\pi,\pi]$

δ. $f(x)=\dfrac{1}{1-\sigma\upsilon\nu x}\ ,\ x\in(0,2\pi)$

15. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

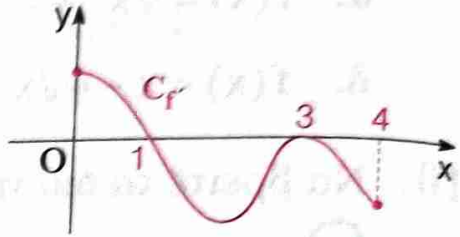
α. $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$, $x\in(-\pi,\pi)$ **β.** $f(x)=\eta\mu x-\varepsilon\varphi x$, $x\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$

16. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3, & x<1\\ \dfrac{1}{x}+1, & x\geq 1\end{cases}$ **β.** $f(x)=\begin{cases}x^3-3x, & x<0\\ x^2-4x, & x\geq 0\end{cases}$

17. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνεχούς συνάρτησης $f:[0,4]\to\mathbb{R}$.

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f.



Β1. Εύρεση μονοτονίας συνάρτησης με τη βοήθεια της f''

18. Να βρείτε, τις ρίζες και το πρόσημο της συνάρτησης:

α. f, όταν $f(x)=e^{-x}-x-1$ **β.** f', όταν $f(x)=x\ln(1+x)$

γ. f'', όταν $f(x)=e^x-ex\ln x+ex$.

19. Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $f'(2)=0$ και $f''(x)<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων f' και f.

20. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

α. $f(x)=e^{x-1}-\ln x$ **β.** $f(x)=(x-1)\ln x$ **γ.** $f(x)=e^{x-1}+x\ln x-2x$

δ. $f(x)=e^x-\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{x^2}{2}-x-1$

Επόμενο μάθημα

Ημερομηνία μαθήματος : Πεμπτη 22/10

Ώρα μαθήματος : 17:30.

Ασκήσεις

Ενοτητα 23

(2) α γ ε

(3) α γ ε

(4) α γ

(7) α γ δ στ

(10) α β

(12) α β

(16) α.

παρατηρήσεις

Επόμενο μάθημα

Ημερομηνία μαθήματος: Πέμπτη 22/10

Ώρα μαθήματος: 17:30.

Ασκήσεις

Ενότητα 23

(2) α γ ε

(3) α γ ε

(4) α γ

(7) α γ δ στ

(10) α β

(12) α β

(16) α.

παρατηρήσεις