Ενοτητα 11

4. ⓐ $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & , x \le 1 \\ 3x-1 & , x > 1 \end{cases}$

$$\left.\begin{aligned} &\cdot \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2+1 = 2 \\ &\cdot \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 3x-1 = 2 \end{aligned}\right\} \lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

$f(1) = 1^2+1 = 2$

Αφου $f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = 2$

Συνεχη στο 1!

ⓑ $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

$f(0) = 0$

Αρα

$f(0) \neq \lim_{x\to 0} f(x)$

οχι συνεχη στο 0.

Γνωστο ορια

$\lim_{x\to 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$

5. (α) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-5x+3}{x-1}, & x \neq 1 \\ -1, & x = 1 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2-5x+3}{x-1} = -1.$$

$$f(1) = -1$$

Συνεχής στο 1!

(β) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} = \frac{1}{2}$$

$$f(1) = 3$$

$f(1) \neq \lim_{x \to 1} f(x)$ όχι συνεχής στο 1.

5. (γ) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}, & x < 0 \\ \eta\mu x, & x \geq 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0 \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \eta\mu x = 0 \end{array}\right\} \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$f(0) = \eta\mu 0 = 0$ Άρα $f(0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x)$

η f συνεχής στο 0.

7. (α) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ (x+1)e^x, & x \geq 0 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (x^2 + 1) = 1 \\ \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (x+1)e^x = 1 \end{array}\right\} \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

$\underline{f(0) = 1}$ $\Rightarrow$ Συνεχής στο 0!

7. (β) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\eta\mu x}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x}=1$

$f(0)=1$

Αφού $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Συνεχής στο 0.

(γ) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1}, & x<1 \\ 3, & x=1 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}, & x>1 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3-1}{x-1}=3$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}=2$

Το όριο $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ δεν υπάρχει

Δεν είναι συνεχής στο 1.

9. (α) $f(x) = \begin{cases} e^x + \alpha, & x \leq 0 \\ x\ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$ Συνεχής!

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (e^x + a) = 1 + \alpha$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x\ln(x+1) = 0$$

$1 + \alpha = 0$ $\quad$ $\alpha = -1$

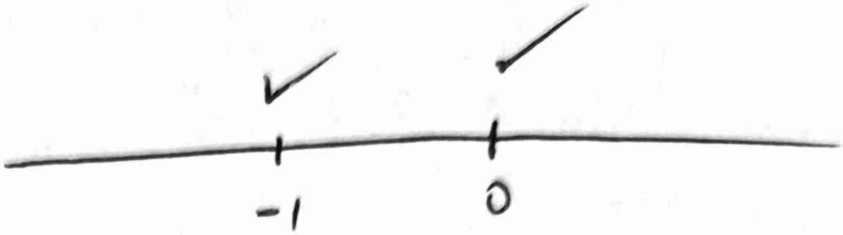
(β) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+1}{x+1}, & x \neq -1 \\ \alpha, & x = -1 \end{cases}$ Συνεχής!

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x+1} = 3$$

$f(-1) = \alpha$

$\alpha = 3$

10. $f(x) = \begin{cases} e^{x+1}+ax-2, & x \le -1 \\ 2x^2-\beta, & -1<x<0 \\ \beta\eta\mu x - 7\sigma\upsilon\nu x + 2\ln(x+1), & x>0 \end{cases}$ Συνεχής!



$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \left(e^{x+1}+ax-2\right) = -1-a$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} 2x^2-\beta = 2-\beta$$

$$-1-a = 2-\beta \implies -3 = a-\beta$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 2x^2-\beta = -\beta$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \beta\eta\mu x - 7\sigma\upsilon\nu x + 2\ln(x+1)$$

$$= -7 \implies \beta = 7$$

$$a = 4$$

11. $f:[0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής

$$x f(x) - \text{ημ}x = 0 \quad , \; x \in [0,\pi],$$

$$f(x) = \frac{\text{ημ}x}{x} \quad , \; x \neq 0$$

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\text{ημ}x}{x} = 1 \; .$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{ημ}x}{x}, & x \in (0,\pi] \\ \underline{1}, & x = 0 \end{cases}$$

12. $x f(x) = 2x + 3 ημ x$ Σωστό!.

$$\boxed{f(x) = 2 + 3\frac{ημx}{x} \quad , x \neq 0}$$

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} 2 + 3\frac{ημx}{x} = 5$$

$f(0) = 5$

$$f(x) = \begin{cases} 2 + 3\dfrac{ημx}{x} & , x \neq 0 \\ 5 & , x = 0 \end{cases}.$$

13. $f: [0,\pi) \to \mathbb{R}$ Σωστό.

$f(x) ημx + 1 = συνx \quad \forall x \in [0,\pi)$.

$$\boxed{f(x) = \frac{συνx - 1}{ημx} \quad \forall x \in (0,\pi).}$$

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{συνx - 1}{ημx} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{συνx-1}{x}}{\frac{ημx}{x}} = \frac{0}{1} = 0.$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{συνx - 1}{ημx} & , x \in (0,\pi). \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

20. (α) $f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{ημ2x}{x} , & x \neq 0 \\ 1 , & x = 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x + \frac{ημ2x}{x} = 0 + 2 = 2$$

$$\rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{ημ2x}{x} = \lim_{x\to 0} 2\frac{ημ2x}{2x} = 2 \cdot 1 = 2$$

Αφού $\lim_{x\to 0} f(x) = 2$ ενώ $f(0) = 1$

ΟΧΙ Συνεχής στο 0.

(γ) $f(x) = \begin{cases} x^2 ημ\frac{1}{x} , & x \neq 0 \\ 0 , & x = 0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0} x^2 ημ\frac{1}{x} = 0$ άρα $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

$f(0) = 0$

Συνεχής στο 0.

$$-1 \leq ημ\frac{1}{x} \leq 1$$

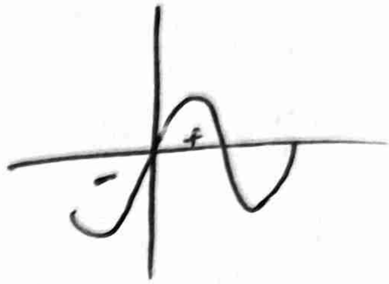
$$-x^2 \leq x^2 ημ\frac{1}{x} \leq x^2$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0} -x^2 &= 0 \\ \lim_{x\to 0} x^2 &= 0 \end{aligned}\right\} \lim_{x\to 0} x^2 ημ\frac{1}{x} = 0.$$

(δ) $f(x)=\begin{cases} ημx \, ημ\frac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} ημx \, ημ\frac{1}{x} = 0$$

$$-1 \leq ημ\frac{1}{x} \leq 1$$



$$\left|ημ\frac{1}{x}\right| \leq 1$$

$$|ημx| \left|ημ\frac{1}{x}\right| \leq 1 \cdot |ημx|$$

$$\left|ημx \, ημ\frac{1}{x}\right| \leq |ημx|$$

$$\boxed{-|ημx| \leq ημx \, ημ\frac{1}{x} \leq |ημx|}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0} -|ημx| = 0 \\ \lim_{x\to 0} |ημx| = 0 \end{array}\right\} \lim_{x\to 0} ημx \, ημ\frac{1}{x} = 0.$$

$$f(0)=0 \Rightarrow f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) \quad ✓$$

21 ⓐ $f(x) = \begin{cases} xe^{\frac{1}{x}}, & x<0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} xe^{\frac{1}{x}} = 0\cdot e^{-\infty} = 0\cdot 0 = 0$$

$$f(0)=0 \quad \Rightarrow \quad f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

ⓑ $f(x) = \begin{cases} xe^{1-\frac{1}{x}}, & x>0 \\ \ln(1+x^2), & x\le 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} xe^{1-\frac{1}{x}} = 0\cdot e^{1-\infty} = 0\cdot e^{-\infty} = 0.0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \ln(1+x^2) = \ln 1 = 0$$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ $f(0)=0$

① $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln x}, & x > 0,\ x \neq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x \to 0^+} x \cdot \frac{1}{\ln x}$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{\infty} = 0 \cdot 0 = 0.$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \\ &f(0) = 0 \end{aligned}\right\} \checkmark$$

23. $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\ln x}{x}}, & x>0 \\ \alpha, & x=0 \end{cases}$ Συνεχής.

$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ Πρέπει να ισχύει!

$\lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln x}{x}} = \alpha$

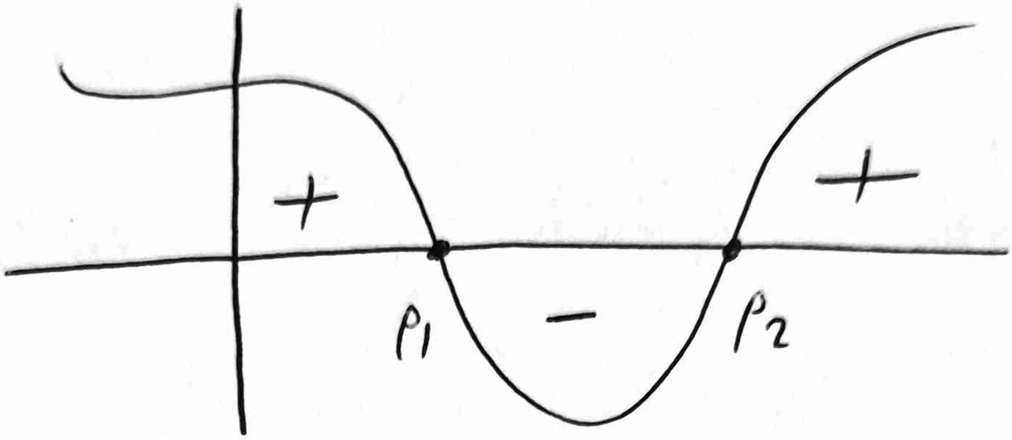
$\to \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \ln x \frac{1}{x} = -\infty \cdot +\infty = -\infty$

$e^{-\infty} = \alpha$

$0 = \alpha$

Συνεπειες Bolzano

1.



Αν η f συνεχης τοτε αυτη διαδοχικων ριζων διατηρει σταθερο προσημο.

2. Αν $f(x) \neq 0$ και συνεχης,

Τοτε $f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$.

Ενοτητα 13

6. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχη $\quad f(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 f(0) + x - 1}{x^2 f(1) + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3 f(0)}{x^2 f(1)}$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x f(0)}{f(1)} = \overset{+}{\frac{f(0)}{f(1)}} \cdot (+\infty) = +\infty$$

Αφου $f(x) \neq 0$ και συνεχη

$\Rightarrow f(x) > 0$ ή $f(x) < 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$f(0)$ και $f(1)$ ομοσημοι

$\Rightarrow f(0) f(1) > 0$ και $\dfrac{f(0)}{f(1)} > 0$

Βασικη Εφαρμογη συνεχειας

Βοηθητικη συναρτηση με οριο

Εστω $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - x^2}{x-1} = 4$

και f συνεχης.

Βρει το $f(1)$.

Θεωρω βοηθητικη συναρτηση

$$g(x) = \frac{f(x) - x^2}{x-1} \Rightarrow \lim_{x \to 1} g(x) = 4$$

Λυνω ως προς $f(x)$.

$$g(x)(x-1) = f(x) - x^2$$

$$\boxed{f(x) = g(x)(x-1) + x^2}.$$

$$f(x) = g(x)(x-1) + x^2$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} g(x)(x-1) + x^2$$

f συνεχης

$$f(1) = 4 \cdot (1-1) + 1^2$$

$$\underline{\underline{f(1) = 1}}$$

Βασικη ιδιοτητα

Αν $f(x) = g(x)$

Τοτε $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$.

4. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχή

$f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-2}{x-1} = 3$ $\qquad$ Ν.δ.ο. $\underline{\underline{f(x) > 0}}$

Αφού $f(x) \neq 0$ και συνεχής $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$.

Θεωρώ βοηθητική συνάρτηση

$g(x) = \frac{f(x)-2}{x-1}$ $\qquad$ $\underline{\underline{\lim_{x \to 1} g(x) = 3}}$

$\boxed{f(x) = g(x)(x-1) + 2}$

$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} g(x)(x-1) + 2$

f συνεχής

$f(1) = 2 \quad \Rightarrow \underline{f(x) > 0}$

3. $f(1)=2$ $\qquad$ f, g συνεχείς.

$g(1)=-3$ $\qquad$ $f(x)\cdot g(x) \neq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ν.δ.ο $f(x)g(x)<0$.

$$\boxed{h(x)=f(x)g(x)}$$

$h(x)$ συνεχής ως π.σ.σ

$h(x) \neq 0$ αφού $f(x)g(x) \neq 0$

$\rightarrow h(x)>0$ ή $h(x)<0$

$\forall x \in \mathbb{R}$.

$h(1)=f(1)g(1)=2(-3)=-6$

$h(x)<0$

$f(x)g(x)<0$

8. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής.

$f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Ν.δ.ο. η εξίσωση $\dfrac{x}{x^2-1} = \dfrac{e^x}{f(x)}$

έχει μια τουλάχιστον λύση

στο $(-1, 1)$.

$x f(x) = e^x (x^2-1)$

$\underbrace{x f(x) - e^x (x^2-1)}_{g(x)} = 0$

Η $g(x)$ συνεχής και ορ.δ.σ.

$$\left.\begin{aligned} g(-1) &= -f(-1) \\ g(1) &= f(1) \end{aligned}\right\} g(-1)\, g(1) = -f(-1) f(1)$$

Η $f(x) \neq 0$ και συνεχής.

$\Rightarrow f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}.$$

Άρα $f(-1)$ και $f(1)$ ομόσημοι

$$f(-1) \cdot f(1) > 0$$

$\rightarrow g(-1)g(1) = -f(-1)f(1) < 0$

Bolzano $\exists\, \xi \in (-1,1)$ τ.ω $g(\xi) = 0$

$$\frac{\xi}{\xi^2 - 1} = \frac{e^{\xi}}{f(\xi)}$$

24. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής.

$f(x) \neq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Νδο η εξίσωση $xf(x) = 1$ έχει

ρίζα $(-1, 1)$.

$$\underbrace{xf(x) - 1}_{g(x)} = 0$$

Η $g(x)$ συνεχής στο $[-1,1]$ ως π.δ.σ

$$g(-1) = -f(-1) - 1 = -h(-1)$$

$$g(1) = f(1) - 1 = h(1)$$

$f(x) \neq x \Rightarrow \underbrace{f(x) - x}_{h(x)} \neq 0 \Rightarrow h(x) \neq 0$

και συνεχής οπότε ως π.δ.σ $\Rightarrow h(x) > 0$ ή

$h(x) < 0$

$\forall x \in \mathbb{R}$.

$$g(-1)g(1) = -\underbrace{h(-1)h(1)}_{\oplus} < 0$$

αφού το $h(-1)$ και $h(1)$ ομόσημοι

$$\rightarrow h(-1)h(1) > 0$$

Bolzano $\exists\, \xi \in (-1,1)$ τ.ω

$$g(\xi) = 0$$

$$\xi f(\xi) - 1 = 0$$

Επομενο Μαθημα

Τεταρτη 9 - 11:30.

12

2

4 α

5

6 α.

8 α β γ.

9

10

11 α β

12

14

16

18

20

17 β.

23

24

38

40