

Θεωρία Μαθηματικών Γ' Λυκείου

Ερωτήσεις - Απαντήσεις

Επιλεγμένα σημεία: 1.1, 1.3, 1.11, 1.12, 1.13, 1.14, 1.15, 1.18, 1.21, 1.22, 1.23, 1.24, 1.26 και
Απόδειξη 3.4

Ορισμός 1.1 - Συνάρτηση

Ερώτηση:	Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ;
----------	--

Απάντηση:

Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

Πεδίο ορισμού: $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \mathbb{R}\}$.

Σύνολο τιμών: $f(A) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x) \text{ για κάποιο } x \in A\}$.

Ορισμός 1.3 - Ισότητα συναρτήσεων

Ερώτηση:	Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;
----------	---

Απάντηση:

Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν:

- έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, δηλαδή $A_f = A_g = A$, και
- $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in A$.

Ορισμός 1.11 - Ολικό μέγιστο

Ερώτηση:	Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;
----------	--

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$, όταν:

$$f(x) \leq f(x_0), \forall x \in A.$$

Ορισμός 1.12 - Ολικό ελάχιστο

Ερώτησ η:	Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$;
--------------	---

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν:

$$f(x) \geq f(x_0), \forall x \in A.$$

Ορισμός 1.13 - Συνάρτηση 1-1

Ερώτησ η:	Πότε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1;
--------------	--

Απάντηση:

Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Ορισμός 1.14 - Αντίστροφη συνάρτηση

Ερώτησ η:	Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. i. Πότε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ αντιστρέφεται; ii. Με την προϋπόθεση ότι η f αντιστρέφεται, πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτησή της;
--------------	---

Απάντηση:

i. Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ αντιστρέφεται όταν είναι 1-1 στο A .

ii. Αν η συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ είναι 1-1, τότε ονομάζουμε αντίστροφη συνάρτηση της f και τη συμβολίζουμε με f^{-1} , τη συνάρτηση που έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών $f(A)$ της f και με την οποία κάθε στοιχείο $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

$$\text{Δηλαδή: } f^{-1} : f(A) \rightarrow A, \text{ με } f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y.$$

1.15 - Κριτήριο παρεμβολής

Ερώτησ η:	Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.
--------------	---

Απάντηση:

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν:

- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ για κάθε x κοντά στο x_0 και
 - $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$,
- τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

Ορισμός 1.18 - Συνέχεια σε σημείο

Ερώτησ η:	Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0;
--------------	--

Απάντηση:

Θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 , όταν:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Ορισμός 1.21 - Συνέχεια σε κλειστό διάστημα

Ερώτησ η:	Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$;
--------------	--

Απάντηση:

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, b) και επιπλέον:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \text{ και } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

1.22 - Θεώρημα Bolzano

Ερώτησ η:	Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.
--------------	---

Απάντηση:

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[a, b]$ και
- $f(a) \cdot f(b) < 0$,

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Δηλαδή, η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία, τουλάχιστον, λύση (ρίζα) στο ανοικτό διάστημα (a, b) .

1.23 - Γεωμετρική ερμηνεία θεωρήματος Bolzano

Ερώτησ η:	Να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το θεώρημα Bolzano.
--------------	--

Απάντηση:

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον οριζόντιο άξονα x σε ένα, τουλάχιστον, σημείο με τετμημένη $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

1.24 - Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

Ερώτησ η:	Να διατυπώσετε το θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.
--------------	--

Απάντηση:

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$,

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$.

Δηλαδή, η εξίσωση $f(x) = \eta$ έχει μία, τουλάχιστον, λύση (ρίζα) στο ανοικτό διάστημα (α, β) .

1.26 - Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής

Ερώτησ η:	Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης Τιμής.
--------------	--

Απάντηση:

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .

Δηλαδή, υπάρχουν δύο, τουλάχιστον, σημεία x_1 και x_2 του διαστήματος $[\alpha, \beta]$ τέτοια ώστε:

$$\min f(x) = m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M = \max f(x), \forall x \in [\alpha, \beta].$$

Απόδειξη 3.4 - Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών

Ερώτησ η:	Να αποδείξετε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.
--------------	---

Απάντηση:

Έστω ότι $f(\alpha) < f(\beta)$, οπότε $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, η οποία είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Επιπλέον, $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$, οπότε $g(\alpha) \cdot g(\beta) < 0$.

Άρα η συνάρτηση g ικανοποιεί στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano. Επομένως υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $g(x_0) = 0$, δηλαδή $f(x_0) = \eta$. Ο.Ε.Δ.

Το περιεχόμενο έχει οργανωθεί σε μορφή ερώτησης-απάντησης από το παρεχόμενο αρχείο θεωρίας.