

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2026
Β' ΦΑΣΗ

Ε_3.ΜΛ3ΘΟ(ε)

ΤΑΞΗ: Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ / ΣΠΟΥΔΩΝ
ΟΙΚΟΝΟΜΙΑΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ημερομηνία: Τετάρτη 15 Απριλίου 2026
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε είναι και συνεχής σε αυτό.

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Fermat και να δώσετε την γεωμετρική του ερμηνεία.

Μονάδες 5

A3. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ .

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη

(α) Για κάθε συνάρτηση ισχύει ότι το μικρότερο από τα τοπικά της ελάχιστα είναι και το ολικό της ελάχιστο.

(β) Το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ δεν υπάρχει.

(γ) Αν f', g' συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[a, \beta]$ τότε

$$\int_a^\beta f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^\beta + \int_\beta^a f(x)g'(x)dx$$

(δ) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της και δεν μηδενίζεται σ' αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο πεδίο ορισμού της

(ε) Για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, ισχύει $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις :

$$f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } f(x) = \frac{x+1}{x-1} \text{ και } g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } g(x) = \ln x$$

B1. Να ορίσετε την συνάρτηση $g \circ f$

Μονάδες 5

$$\text{Αν } \varphi(x) = (g \circ f)(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), x > 1 \text{ τότε}$$

B2. Να δείξετε ότι η φ είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της

Μονάδες 6

B3. (i) Να αποδείξετε ότι η φ αντιστρέφεται και να βρείτε την φ^{-1}

Μονάδες 5

(ii) Αν $\varphi^{-1}(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}, x > 0$ να βρείτε την κατακόρυφη και την οριζόντια ασύμπτωτη της φ^{-1}

Μονάδες 4

B4. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \ln x$ τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \alpha xe^x - \beta e^x, x \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση εφάπτεται στην ευθεία $y = -x - 2$ στο σημείο της $A(0, f(0))$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 2$

Μονάδες 6

Γ2. (i) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 4

(ii) Να λύσετε την ανίσωση $x^3 + 3x + 6 < 6e^x - 3xe^x$

Μονάδες 4

Γ3. Να αποδείξετε ότι η f έχει ένα τοπικό ελάχιστο και ένα τοπικό μέγιστο .

Μονάδες 6

Έστω x_1 η θέση του τοπικού μεγίστου και x_2 η θέση του τοπικού ελαχίστου

Γ4. Να αποδείξετε ότι $\left(\int_{x_1}^0 xf''(x) dx \right) \cdot \left(\int_0^{x_2} xf''(x) dx \right) < 0$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = xe^x + \ln x$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 η οποία ανήκει στο διάστημα $(0, 1)$

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής $A(x_1, f(x_1))$

Μονάδες 6

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2026
Β' ΦΑΣΗ

Ε_3.Μλ3ΘΟ(ε)

Αν για την ρίζα x_0 της συνάρτησης f και την τετμημένη x_1 του σημείου καμπής

$$\text{ισχύουν } \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} |f(x)| dx = \int_{x_0}^{\frac{1}{2}} f(x) dx \neq 0 \text{ και } x_0 < x_1$$

Δ3 (i) Να αποδείξετε ότι $e^{x_0} + 2 \ln x_0 > 0$

Μονάδες 5

(ii) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x_1) - F(x_0)}{(2x_0)^x}$, όπου F μια παράγουσα της f στο $(0, +\infty)$

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x < x_0$ ισχύει: $f(x) < (x - x_0) \cdot f'(x_1)$

Μονάδες 5

ΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ