

Άσκηση 14

Να αποδειχθούν οι παρακάτω ανισότητες

α) Αν $a < -3$ νδo $2 \cdot [5(a-3) - 2(a-9)] < -3(1-a)$

Ποιnov, $2[5(a-3) - 2(a-9)] < -3(1-a)$

$$2[5a - 15 - 2a + 18] < -3 + 3a$$

$$2[3a + 3] < -3 + 3a$$

$$6a + 6 < -3 + 3a$$

$$3a < -9 \quad (\Rightarrow) a < -3 \quad \text{που ισχυει.}$$

β) Αν ισχυει οτι $a > b > 1$ νδo $b(a+1) > a+b^2$

Ποιnov, $ba + b > a + b^2 \quad (\Rightarrow) \underline{ba + b - a - b^2} > 0$

$$a(b-1) - b(b-1) > 0$$

Αρκει νδo $(\underbrace{b-1}_{+})(\underbrace{a-b}_{+}) > 0$ που ισχυει!

οπωσ $b > 1 \Rightarrow b-1 > 0$

$$a > b \Rightarrow a-b > 0$$

$$\textcircled{7} \text{ Νδσ } \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}$$

Εξω οτι $2x \leq x^2+1$ $\Leftrightarrow 0 \leq x^2-2x+1$
 $0 \leq (x-1)^2$
 που ισχύει.

$$\textcircled{8} \text{ Αν } x \neq 1 \text{ νδσ } \frac{x^3-2}{x-1} > \frac{x^2-2x}{x-1}$$

Εδω δα μπορω να κανω χιασμι ουτε
 να πολ/σω παντου με το $x-1$ εαθως
 δα γινωριτω το προσημο του.

$$\frac{x^3-2}{x-1} - \frac{x^2-2x}{x-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \frac{x^3-2-x^2+2x}{x-1} > 0$$

$$\frac{x^3-x^2+2x-2}{x-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \frac{x^2(x-1)+2(x-1)}{x-1} > 0$$

$$\frac{\cancel{(x-1)}(x^2+2)}{\cancel{x-1}} > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2+2 > 0$$

που ισχύει!

$$\textcircled{\varepsilon} \text{ N} \delta_0 \quad \alpha\beta \leq \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \leq \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta}, \quad \alpha \neq \beta.$$

Αρκεί να δείξω ότι $\alpha\beta \leq \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2}$

$$\Leftrightarrow 2\alpha\beta \leq \alpha^2 + \beta^2 \quad \Leftrightarrow 0 \leq \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$0 \leq (\alpha - \beta)^2$$

Επίσης να δείξω ότι $\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \leq \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta}$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 \leq 2 \frac{(\cancel{\alpha - \beta})(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)}{\cancel{\alpha - \beta}}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 \leq 2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\beta^2$$

$$0 \leq \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$0 \leq (\alpha + \beta)^2$$

$$\textcircled{\eta} \text{ N} \delta_0 \quad \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 \geq 0$$

$$2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\beta^2 \geq 0$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha + \beta)^2 \geq 0 \quad \text{που ισχύει!}$$

$$\textcircled{h} \text{ wo } 2a^2 - 6a + 9 > 0$$

$$a^2 + a^2 - 6a + 9 > 0$$

$$a^2 + (a-3)^2 > 0 \quad \text{now is xuy!}$$

$$\textcircled{g} \text{ wo } |aB| - aB \geq a|B| - B|a|$$

$$\text{Ainon, } |a||B| - aB - a|B| + B|a| \geq 0$$

$$|B|(|a| - a) - B(a - |a|) \geq 0$$

$$|B|(|a| - a) + B(|a| - a) \geq 0$$

$$\underbrace{(|a| - a)}_{\textcircled{f}} \underbrace{(|B| + B)}_{\textcircled{f}} \geq 0 \quad \text{now is xuy!}$$

$$\text{opw } |a| \geq a \Rightarrow |a| - a \geq 0$$

$$\text{wa } |B| \geq -B \Rightarrow |B| + B \geq 0$$

Άσκηση 15

Να βρεθούν οι $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ σε κάθε περίπτωση

$$(a) \quad 2\alpha^2 + 9\beta^2 = -9 - 6\alpha(1 - \beta)$$

$$2\alpha^2 + 9\beta^2 = -9 - 6\alpha + 6\alpha\beta$$

$$2\alpha^2 + 9\beta^2 + 6\alpha - 6\alpha\beta + 9 = 0$$

$$\alpha^2 + 6\alpha + 9 + \alpha^2 - 6\alpha\beta + 9\beta^2 = 0$$

$$(\alpha + 3)^2 + (\alpha - 3\beta)^2 = 0$$

$$\text{αρα } \alpha + 3 = 0 \quad \text{και} \quad \alpha - 3\beta = 0$$

$$\boxed{\alpha = -3}$$

$$-3 - 3\beta = 0$$

$$-3 = 3\beta$$

$$\boxed{\beta = -1}$$

$$\textcircled{B} \quad a^2 + B^2 + 20 \leq 4(2B - a)$$

$$a^2 + B^2 + 20 \leq 8B - 4a$$

$$a^2 + B^2 + 20 - 8B + 4a \leq 0$$

$$a^2 + 4a + 4 + B^2 - 8B + 16 \leq 0$$

$$(a+2)^2 + (B-4)^2 \leq 0$$

$$\text{npнu} \quad a+2=0 \quad \text{ku} \quad B-4=0$$

$$\boxed{a = -2}$$

$$\boxed{B = 4}$$

Άσκηση 16

Αν ισχύει ότι $1 \leq \alpha \leq 3$ και $2 \leq \beta \leq 4$

Να βρούμε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται
οι τιμές των παραστάσεων

α) $2\alpha + 3\beta$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet 1 \leq \alpha \leq 3 \Rightarrow 2 \leq 2\alpha \leq 6 \\ \bullet 2 \leq \beta \leq 4 \Rightarrow 6 \leq 3\beta \leq 12 \end{array} \right\} \oplus 8 \leq 2\alpha + 3\beta \leq 18$$

β) $\alpha - \beta$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet 1 \leq \alpha \leq 3 \Rightarrow 3 \geq \alpha \geq 1 \\ \bullet 2 \leq \beta \leq 4 \Rightarrow -2 \geq -\beta \geq -4 \end{array} \right\} \oplus 1 \geq \alpha - \beta \geq -3$$

γ) $\frac{\alpha}{\beta} - \alpha^3$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet 1 \leq \alpha \leq 3 \Rightarrow 3 \geq \alpha \geq 1 \\ \bullet 2 \leq \beta \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \frac{1}{\beta} \geq \frac{1}{4} \\ \bullet 1 \leq \alpha \leq 3 \Rightarrow 1 \leq \alpha^3 \leq 27 \Rightarrow -1 \geq -\alpha^3 \geq -27 \end{array} \right\} \oplus \frac{3}{2} \geq \frac{\alpha}{\beta} \geq \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{2} - 1 \geq \frac{a}{b} - a^3 \geq \frac{1}{4} - 27$$

$$\frac{3}{2} - \frac{2}{2} \geq \frac{a}{b} - a^3 \geq \frac{1}{4} - \frac{108}{4}$$

$$\frac{1}{2} \geq \frac{a}{b} - a^3 \geq -\frac{107}{4}$$

Άσκηση 17

Αν ισχύει ότι $1 \leq \alpha \leq 3$ και $-4 \leq \beta \leq -2$
να βρούμε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται
οι τιμές των παραστάσεων

α) $2\alpha + 3\beta$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet 1 \leq \alpha \leq 3 \quad \Leftrightarrow 2 \leq 2\alpha \leq 6 \\ \bullet -4 \leq \beta \leq -2 \quad \Leftrightarrow -12 \leq 3\beta \leq -6 \end{array} \right\} (+) -10 \leq 2\alpha + 3\beta \leq 0$$

β) $\alpha - \beta$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet 1 \leq \alpha \leq 3 \quad \Leftrightarrow 3 \geq \alpha \geq 1 \\ \bullet -4 \leq \beta \leq -2 \quad \Leftrightarrow 4 \geq -\beta \geq 2 \end{array} \right\} (+) 7 \geq \alpha - \beta \geq 3$$

γ) $\alpha^2 + \beta^2$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet 1 \leq \alpha \leq 3 \quad \Leftrightarrow 1 \leq \alpha^2 \leq 9 \quad \Leftrightarrow 9 \geq \alpha^2 \geq 1 \\ \bullet -4 \leq \beta \leq -2 \quad \Leftrightarrow 4 \geq -\beta \geq -2 \quad \Leftrightarrow 16 \geq \beta^2 \geq 4 \end{array} \right\} (+)$$

$$25 \geq \alpha^2 + \beta^2 \geq 5$$

$$\textcircled{8} \quad \frac{a}{B}$$

$$\bullet \quad 1 \leq a \leq 3$$

$$\bullet \quad -4 \leq B \leq -2 \quad \Leftrightarrow \quad 4 \geq -B \geq 2 \quad (\Rightarrow) \quad \frac{1}{4} \leq -\frac{1}{B} \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} \leq -\frac{a}{B} \leq \frac{3}{2}$$

$$-\frac{1}{4} \geq \frac{a}{B} \geq -\frac{3}{2}$$

Ασκηση 18

Να συγκρίνουν οι αριθμοί $\alpha = x^3 - 2x^2$

και $\beta = 8 - 4x$ αν γινώσκουμε ότι $x < 2$

Εστω ότι $\alpha < \beta$

Ανταλλάσσοντας

$$x^3 - 2x^2 < 8 - 4x$$

$$x^3 - 2x^2 + 4x - 8 < 0$$

$$x^2(x-2) + 4(x-2) < 0$$

$$\underbrace{(x-2)}_{\ominus} \underbrace{(x^2+4)}_{\oplus} < 0$$

οπώς $x < 2 \Leftrightarrow x - 2 < 0$

ενώ $x^2 + 4 > 0$

Άρα οπότε $\alpha < \beta$.

Άσκηση 19

Να γραφούν οι ακόλουθες παραστάσεις χωρίς απόλυτες αγκύρες.

$$\textcircled{a} \quad A = |^{-5}| + |^2| - |^{-3}| - |^{-4}|$$

$$A = 5 + 2 - 3 - 4$$

$$A = 7 - 7$$

$$A = 0$$

$$\textcircled{b} \quad B = |^{-x^2-2}| - |^{x^2-4x+4}|$$

$$B = x^2 + 2 - |^{(x-2)^2}|$$

$$B = x^2 + 2 - (x-2)^2$$

$$B = x^2 + 2 - (x^2 - 4x + 4)$$

$$B = x^2 + 2 - x^2 + 4x - 4$$

$$B = 4x - 2.$$

γ) Αν ισχύει ότι $\alpha - 2 < B$ τότε

$$A = \overset{\ominus}{| \alpha - 2 |} + \overset{\oplus}{| 2B - 4 |} - \overset{\ominus}{| \alpha - B |} - \overset{\ominus}{| 3\alpha - 2B - 4 |}$$

• $\alpha < 2 \Rightarrow \alpha - 2 < 0$

• $2 < B \Rightarrow 4 < 2B \Rightarrow 2B - 4 > 0$

• $\alpha < B \Rightarrow \alpha - B < 0$

• $\alpha < 2 \Rightarrow 3\alpha < 6 \Rightarrow 6 > 3\alpha$
 $2 < B \Rightarrow -4 > -2B \Rightarrow -8 > -2B - 4$ } $\oplus$

$$-2 > 3\alpha - 2B - 4$$

Συνολικά, $A = -\alpha + 2 + 2B - 4 - (-\alpha + B) - (-3\alpha + 2B + 4)$

$$A = \cancel{-\alpha} + 2 + \cancel{2B} - 4 + \cancel{\alpha} - B + \cancel{3\alpha} - \cancel{2B} - 4$$

$$A = 3\alpha - B - 6$$

$$\textcircled{\delta} \quad A = 2 - |x-2|$$

Εδώ θα γυρίσω το πρόσημο του $x-2$ όπως

x	2
$x-2$	$- \oplus +$

$$1. \text{ Αν } x \leq 2 \text{ τότε } A = 2 - |x-2|^{\ominus} = 2 - (-x+2) = 2+x-2$$

$$\Rightarrow A = x$$

$$2. \text{ Αν } x > 2 \text{ τότε } A = 2 - |x-2|^{\oplus} = 2 - (x-2) = 2-x+2$$

$$\Rightarrow A = 4-x$$

Τελικά,
$$A = \begin{cases} x, & x \leq 2 \\ 4-x, & x > 2 \end{cases}$$

$$\textcircled{\epsilon} \quad A = 2x + |x+3| - |2-x|$$

x	-3	2
$x+3$	$- \oplus +$	$+$
$2-x$	$+$	$+ \oplus -$

$$1. \text{ Αν } x < -3 \text{ τότε } A = 2x + |x+3|^{\ominus} - |2-x|^{\oplus}$$

$$A = 2x - x - 3 - 2 + x = 2x - 5.$$

$$2. \quad A \checkmark \quad -3 \leq x \leq 2 \quad \text{TOTC} \quad A = 2x + |x+3|^{\oplus} - |2-x|^{\oplus}$$

$$A = 2x + x + 3 - 2 + x = 4x + 1$$

$$3. \quad A \checkmark \quad x > 2 \quad \text{TOTC} \quad A = 2x + |x+3|^{\oplus} - |2-x|^{\ominus}$$

$$A = 2x + x + 3 + 2 - x = 2x + 5$$

$$\text{Terima, } A = \begin{cases} 2x - 5, & x \in (-\infty, -3) \\ 4x + 1, & x \in [-3, 2] \\ 2x + 5, & x \in (2, +\infty) \end{cases}$$

$$\textcircled{J} \quad A = |x| |x^3 + 2x^2 + x| = |x| \cdot |x(x^2 + 2x + 1)| =$$

$$= |x| |x| |x^2 + 2x + 1| = |x|^2 |x+1|^2 = x^2 (x+1)^2$$

$$= x^2 (x^2 + 2x + 1) = x^4 + 2x^3 + x^2$$

$$\textcircled{n} \quad A = \frac{|x^5 + x^3|}{|x^3 + x|} = \frac{|x^3(x^2 + 1)|}{|x(x^2 + 1)|} = \frac{|x|^3 |x^2 + 1|}{|x| |x^2 + 1|} =$$

$$= |x|^2 = x^2$$

Άσκηση 20

Να αποδείξετε ότι $|a-2b|^2 + |2a+b|^2 = 5(|a|^2 + |b|^2)$

$$(a-2b)^2 + (2a+b)^2 = 5(a^2 + b^2)$$

$$a^2 - 4ab + 4b^2 + 4a^2 + 4ab = 5a^2 + 5b^2$$

$$5a^2 + 5b^2 = 5a^2 + 5b^2$$

$$0=0$$

Άσκηση 21

Αν $b \neq 0$ και $|a-b| = |a| + |b|$ τότε $a \leq 0$

$$\text{Λοιπόν, } |a-b|^2 = (|a| + |b|)^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a|b| + |b|^2 = |a|^2 + |b|^2 + 2|a||b|$$

$$\cancel{a^2} - 2a|b| + \cancel{|b|^2} = \cancel{a^2} + \cancel{|b|^2} + 2|a||b|$$

$$-2a|b| = 2|a||b| \quad \begin{matrix} b \neq 0 \\ \Leftrightarrow \end{matrix} -a = |a|$$

$$\Rightarrow a \leq 0.$$

$$\textcircled{0} \quad A = |x-y| + |y-x| - |2y-2x|$$

$$A = |x-y| + |x-y| - 2|y-x|$$

$$A = 2|x-y| - 2|x-y| = 0$$

$$\textcircled{i} \quad A = |a - |a|| - ||a| + a|$$

$$\text{En cas } |a| \geq a \Rightarrow a - |a| \leq 0$$

$$\text{En cas } |a| \geq -a \Rightarrow |a| + a \geq 0$$

$$A = -a + |a| - |a| - a = -2a$$

Άσκηση 22

Αν ισχύει $|2x-y| + |2x-6| = |3-x|$

να βρωθούν οι $x, y \in \mathbb{R}$.

Λοιπόν, $|2x-y| + 2|x-3| = |x-3|$

$$|2x-y| + |x-3| = 0$$

πρέπει $2x-y=0$ και $x-3=0$

$$6-y=0$$

$$\boxed{y=6}$$

$$\boxed{x=3}$$

Άσκηση 23

Αν ισχύει ότι $|2\alpha - 2\beta + 5| = 5$ να βρεθεί $\alpha = \beta$ ή $\alpha = \beta - 5$

Λοιπόν, $2\alpha - 2\beta + 5 = 5$ ή $2\alpha - 2\beta + 5 = -5$

$$2\alpha - 2\beta = 0$$

$$2\alpha - 2\beta = -10$$

$$\alpha - \beta = 0$$

$$\alpha - \beta = -5$$

$$\boxed{\alpha = \beta}$$

$$\boxed{\alpha = \beta - 5}$$

Άσκηση 24

Αν ισχύει $|a+b| = |2a-7b|$ ισχύει $a=8b$ ή $a=2b$

Εξω ου, $a+b = 2a-7b$ ή $a+b = -2a+7b$

$$\boxed{8b = a}$$

$$3a = 6b$$

$$\boxed{a = 2b}$$

Άσκηση 25

Ισχύει $|x+y| \leq |x+2| + |y-2|$.

Από την τριγωνική ανισότητα ισχύει ότι

$$\left| (x+2) + (y-2) \right| \leq |x+2| + |y-2|$$

$$|x+y| \leq |x+2| + |y-2|$$

Άσκηση 26

Αν ισχύει ότι $d(a, 2b) - d(2a, b) = d(5, 8) - d(2, -1)$
όσο a και b είναι ωσκι ή αντιστοι.

$$\text{Λοιπών, } |a-2b| - |2a-b| = |5-8| - |2+1|$$

$$|a-2b| - |2a-b| = 3-3$$

$$|a-2b| = |2a-b|$$

$$a-2b = 2a-b \quad \text{ή} \quad a-2b = -2a+b$$

$$\boxed{-b = a}$$

$$3a = 3b$$

$$\boxed{a = b}$$

Άσκηση 27

$$\text{Αν } |a-2b| < |2a-b| \quad \text{όσο} \quad |b| < |a|$$

$$\text{Έχω ότι } |a-2b|^2 < |2a-b|^2$$

$$(a-2b)^2 < (2a-b)^2 \quad (\Rightarrow) a^2 - 4ab + 4b^2 < 4a^2 - 4ab + b^2$$

$$3b^2 < 3a^2 \quad (\Rightarrow) b^2 < a^2 \quad (\Rightarrow) |b| < |a|$$

Άσκηση 28

Αν ισχύει ότι $|x| \leq 1$ και $|y| \leq 2$

Τότε ισχύει

$$\textcircled{a} \quad |7x - 2y| \leq 11$$

$$\bullet |x| \leq 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (\Rightarrow) \quad -7 \leq 7x \leq 7 \quad (\Rightarrow) \quad 7 \geq 7x \geq -7$$

$$\bullet |y| \leq 2 \quad (\Leftrightarrow) \quad -2 \leq y \leq 2 \quad (\Rightarrow) \quad 4 \geq -2y \geq -4 \quad \text{---} \textcircled{+}$$

$$11 \geq 7x - 2y \geq -11$$

$$|7x - 2y| \leq 11$$

$$\textcircled{b} \quad \text{ισχύει} \quad |1 - 3x + 4y| \leq 12$$

Από τριγωνική ανισότητα έχω

$$|1 - 3x + 4y| \leq |1| + |-3x| + |4y|$$

$$|1 - 3x + 4y| \leq 1 + 3|x| + 4|y|$$

$$\text{οπώς} \quad \left. \begin{array}{l} |x| \leq 1 \quad (\Rightarrow) \quad 3|x| \leq 3 \\ |y| \leq 2 \quad (\Rightarrow) \quad 4|y| \leq 8 \end{array} \right\} \textcircled{+}$$

$$3|x| + 4|y| \leq 11$$

$$1 + 3|x| + 4|y| \leq 12$$

Άσκηση 29

Να αντιστοιχισθούν οι παραστάσεις

$$\textcircled{\alpha} \sqrt{37}^2 = 37$$

$$\textcircled{\beta} \sqrt{23^2} = |\overset{+}{23}| = 23$$

$$\textcircled{\gamma} \sqrt{(-29)^2} = | \overset{-}{-29} | = 29$$

$$\textcircled{\delta} \sqrt{-8}^2 \text{ δεν ορίζεται. αφού } -8 < 0$$

$$\textcircled{\epsilon} \sqrt{-5}^2 \text{ δεν ορίζεται αφού } -5^2 < 0$$

$$\textcircled{\zeta} \sqrt{2} \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6$$

$$\textcircled{\eta} \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{27}{3}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\textcircled{\theta} \sqrt{x^2 - 2x + 1} = \sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = \begin{cases} x-1, & x \geq 1 \\ -x+1, & x < 1 \end{cases}$$

$$\textcircled{\iota} \sqrt[3]{7}^3 = |\overset{+}{7}| = 7$$

$$\textcircled{\kappa} \sqrt[6]{(-5)^6} = | \overset{-}{-5} | = 5$$

$$\textcircled{\lambda} \sqrt[4]{x^4} = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Άσκηση 30

Αν ισχύει ότι $2 < x < 3$ να υπολογιστεί η παράσταση

$$A = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 4}}{x-2} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x-3}$$

Λοιπόν, $A = \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{x-2} - \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}$

$$A = \frac{\overset{+}{|x-2|}}{x-2} - \frac{\overset{-}{|x-3|}}{x-3}$$

οπω $x > 2 \Rightarrow x-2 > 0$

$$x < 3 \Rightarrow x-3 < 0$$

$$A = \frac{x-2}{x-2} - \frac{-(x-3)}{x-3}$$

$$A = 1 + 1$$

$$A = 2.$$

Άσκηση 31

Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις.

$$\textcircled{a} \quad A = \sqrt{9a^2B} + \sqrt{a^2B} - 2a\sqrt{B}$$

Προφανώς $B \geq 0$ και $a \in \mathbb{R}$.

$$A = 3|a|\sqrt{B} + |a|\sqrt{B} - 2a\sqrt{B}$$

$$A = 4|a|\sqrt{B} - 2a\sqrt{B}$$

$$\bullet \text{ αν } a \geq 0 \text{ τότε } A = 4a\sqrt{B} - 2a\sqrt{B} = 2a\sqrt{B}$$

$$\bullet \text{ αν } a < 0 \text{ τότε } A = -4a\sqrt{B} - 2a\sqrt{B} = -6a\sqrt{B}$$

$$\textcircled{b} \quad B = \sqrt[3]{8a^3B^2} - a\sqrt[3]{B^2}$$

προφανώς $a \geq 0$ και $B \in \mathbb{R}$.

$$B = 2a\sqrt[3]{B^2} - a\sqrt[3]{B^2}$$

$$B = a \cdot \sqrt[3]{B^2}$$

Άσκηση 32

Να απλοποιήσουν οι παραστάσεις

$$\textcircled{\alpha} \quad 25^{1/2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\textcircled{\beta} \quad 16^{\frac{3}{4}} = (2^4)^{\frac{3}{4}} = 2^3 = 8$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\gamma} \quad \frac{9^{\frac{3}{4}} \cdot 9^{\frac{5}{2}}}{9^{\frac{7}{4}}} &= \frac{9^{\frac{3}{4} + \frac{5}{2}}}{9^{\frac{7}{4}}} = \frac{9^{\frac{13}{4}}}{9^{\frac{7}{4}}} = 9^{\frac{13}{4} - \frac{7}{4}} \\ &= 9^{\frac{6}{4}} = 9^{\frac{3}{2}} = 9^1 = 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\delta} \quad \sqrt{50} - \sqrt{18} - \sqrt{8} &= \sqrt{2}\sqrt{25} - \sqrt{2}\sqrt{9} - \sqrt{2}\sqrt{4} = \\ &= 5\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{\epsilon} \quad \left(\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}} \right)^2 &= \overset{+}{|3+\sqrt{5}|} - 2\sqrt{3+\sqrt{5}}\sqrt{3-\sqrt{5}} + \overset{+}{|3-\sqrt{5}|} \\ &= 3+\sqrt{5} - 2\sqrt{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})} + 3-\sqrt{5} = \\ &= 6 - 2\sqrt{9-5} = 6 - 2\sqrt{4} = 2 \end{aligned}$$

$$\textcircled{7} \quad \sqrt{11+6\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(3+\sqrt{2})^2} - \sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$$

$$= |3+\overset{+}{\sqrt{2}}| - |1-\overset{-}{\sqrt{2}}| = 3+\sqrt{2} - (-1+\sqrt{2}) =$$

$$= 3+\sqrt{2}+1-\sqrt{2} = 4.$$

Άσκηση 33

Να βρούμε οι τιμές των x, y ώστε να ορίζονται οι παραστάσεις

$$\textcircled{\alpha} \quad A = \sqrt{2x+6}$$

$$\text{πρέπει } 2x+6 \geq 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad 2x \geq -6 \quad (\Leftrightarrow) \quad x \geq -3$$

Η A ορίζεται αν $x \in [-3, +\infty)$.

$$\textcircled{\beta} \quad B = \frac{x+2}{\sqrt[3]{x-4}}$$

$$\text{πρέπει } x-4 > 0 \quad \Rightarrow x > 4$$

Η B ορίζεται αν $x \in (4, +\infty)$.

$$\textcircled{\gamma} \quad \Gamma = \sqrt[3]{x+3} + \sqrt{5-x}$$

$$\text{πρέπει } x+3 \geq 0 \quad \text{και } 5-x \geq 0$$

$$x \geq -3$$

$$x \leq 5$$

$$x \in [-3, 5].$$

$$\textcircled{\delta} \Delta = \sqrt[5]{x+1} - \frac{1}{x-2}$$

$$\text{πρέπει } x+1 \geq 0 \quad \text{και } x-2 \neq 0$$

$$x \geq -1$$

$$x \neq 2$$

$$x \in [-1, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$\textcircled{\epsilon} E = \sqrt{x^2+1}$$

$$\text{πρέπει } x^2+1 \geq 0 \quad \text{που είναι!}$$

$$x \in \mathbb{R}.$$

$$\textcircled{\delta\zeta} Z = \frac{1}{\sqrt[6]{x^2-6x+9}}$$

$$\text{πρέπει } x^2-6x+9 > 0$$

$$(x-3)^2 > 0$$

$$\text{Αρα } x \in \mathbb{R} - \{3\}.$$

Ασκηση 34

Να βρεθούν οι αριθμοί x, y ώστε

$$\sqrt{2x+6} + \sqrt[3]{x-2y+7} = 0$$

πρέπει $2x+6 = 0$ και $x-2y+7 = 0$

$$2x = -6$$

$$-3 - 2y + 7 = 0$$

$$x = -3$$

$$-4 = 2y$$

$$y = -2$$

Ασκηση 35

Αν $a, b \geq 0$ και $a \neq b$ τότε

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} + \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} + \frac{\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})} = \frac{a+b}{a-b}$$

$$\frac{a - \sqrt{a}\sqrt{b}}{a-b} + \frac{\sqrt{b}\sqrt{a} + b}{a-b} = \frac{a+b}{a-b} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{a+b}{a-b}$$