

Αλγεβρα

Β' Λυκείου



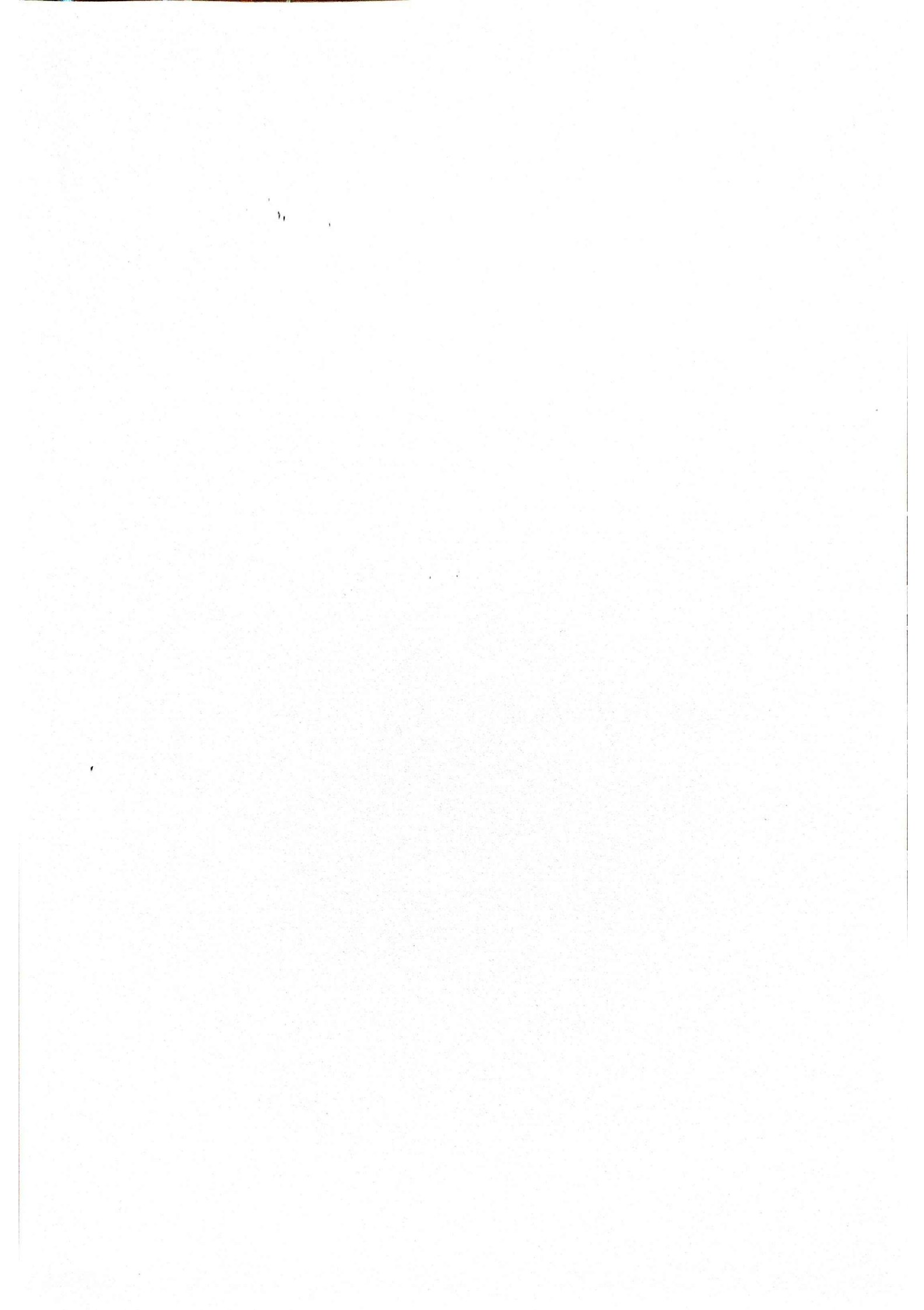
Τριγωνομετρία

Πολύωνυμα

Εκθετική συνάρτηση

Λογαριθμική συνάρτηση

2024 - 2025



Τριγωνομετρικοί αριθμοί
οξυαίς γωνίας

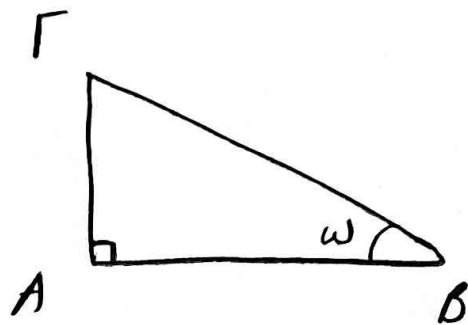
Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξυαίας γωνίας.
Ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι οι εξής:

$$\eta\mu\hat{\omega} = \frac{\text{αν. καθ. τεμ.}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΓ}{ΒΓ}$$

$$\sigma\upsilon\nu\hat{\omega} = \frac{\text{πρ. καθ. τεμ.}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{ΑΒ}{ΒΓ}$$

$$\epsilon\varphi\hat{\omega} = \frac{\text{αν. καθ. τεμ.}}{\text{πρ. καθ. τεμ.}} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ}$$

$$\sigma\varphi\hat{\omega} = \frac{\text{πρ. καθ. τεμ.}}{\text{αν. καθ. τεμ.}} = \frac{ΑΒ}{ΑΓ}$$



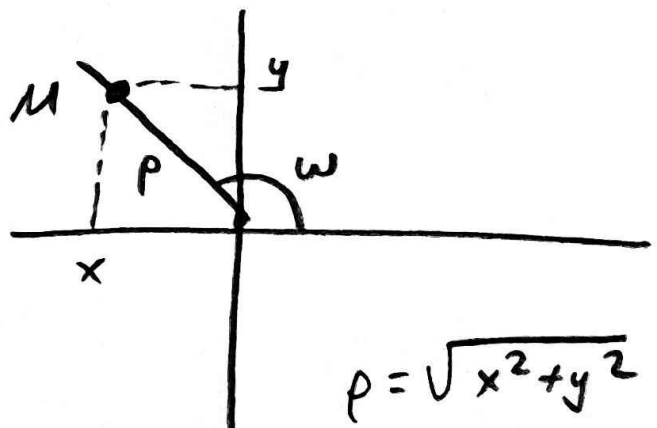
Τριγωνομετρικοί αριθμοί
οποιασδήποτε γωνίας

$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}$$

$$\sigma\upsilon\omega = \frac{x}{\rho}$$

$$\epsilon\varphi\omega = \frac{y}{x}$$

$$\sigma\varphi\omega = \frac{x}{y}$$



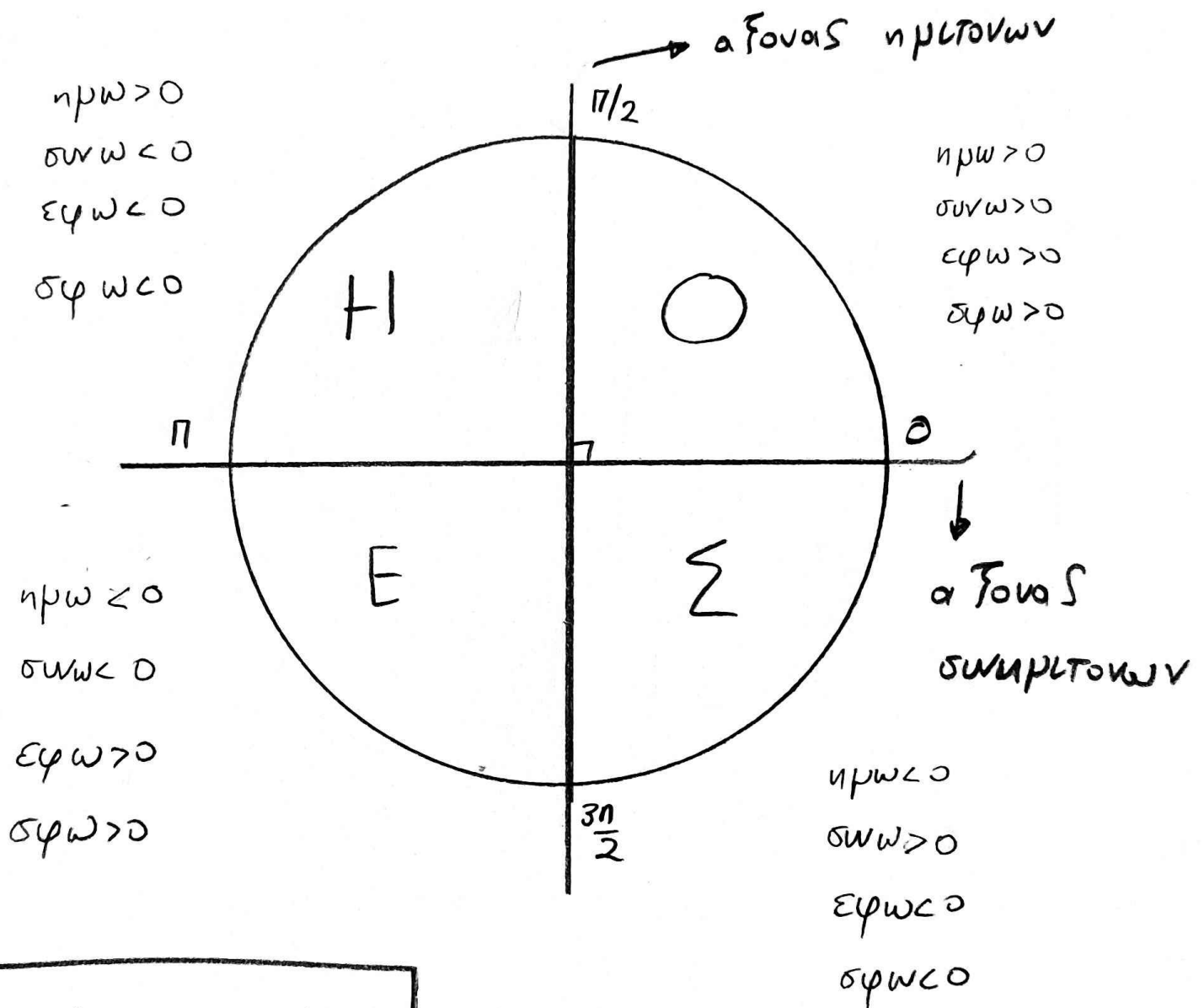
Μοίρες - rad

Μοίρες $\hat{=}$ μ

rad $\hat{=}$ α

$$\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$$

Τριγωνομετρικός κύκλος



$$-1 \leq \eta\rho\omega \leq 1$$

$$-1 \leq \sigma\upsilon\omega\omega \leq 1$$

Τριγωνομετρικός πίνακας

Βασικών γωνιών

Μοίρες	0	30	45	60	90	180	270	360
rad	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
sin	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
cos	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1
tan	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
cot	-	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	-	0	-

Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

$$1. \quad \eta\rho(k \cdot 360 + \omega) = \eta\rho\omega$$

$$\sigma\omega(k \cdot 360 + \omega) = \sigma\omega\omega$$

$$\epsilon\varphi(k \cdot 360 + \omega) = \epsilon\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi(k \cdot 360 + \omega) = \sigma\varphi\omega$$

$$2. \quad \eta\rho(-\omega) = -\eta\rho\omega$$

$$\sigma\omega(-\omega) = \sigma\omega\omega$$

$$\epsilon\varphi(-\omega) = -\epsilon\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi(-\omega) = -\sigma\varphi\omega$$

$$3. \quad \eta\rho(180 - \omega) = -\eta\rho\omega$$

$$\sigma\omega(180 - \omega) = -\sigma\omega\omega$$

$$\epsilon\varphi(180 - \omega) = \epsilon\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi(180 - \omega) = -\sigma\varphi\omega$$

$$4. \quad \eta\rho(180 + \omega) = \eta\rho\omega$$

$$\sigma\omega(180 + \omega) = \sigma\omega\omega$$

$$\epsilon\varphi(180 + \omega) = -\epsilon\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi(180 + \omega) = -\sigma\varphi\omega$$

$$5. \quad \eta\rho(90 - \omega) = \sigma\omega\omega$$

$$\sigma\omega(90 - \omega) = \eta\rho\omega$$

$$\epsilon\varphi(90 - \omega) = \sigma\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi(90 - \omega) = \epsilon\varphi\omega$$

$$6. \quad \eta\rho(90 + \omega) = \sigma\omega\omega$$

$$\sigma\omega(90 + \omega) = -\eta\rho\omega$$

$$\epsilon\varphi(90 + \omega) = \sigma\varphi\omega$$

$$\sigma\varphi(90 + \omega) = -\epsilon\varphi\omega$$

Βασικοί τύποι τριγωνομετρικά

$$1. \quad \eta\rho^2 x + \sigma\omega^2 x = 1$$

$$2. \quad (\eta\rho x)^2 = \eta\rho^2 x \quad \text{και} \quad (\sigma\omega x)^2 = \sigma\omega^2 x$$

$$3. \quad \epsilon\varphi x = \frac{\eta\rho x}{\sigma\omega x} \quad \text{και} \quad \sigma\varphi x = \frac{\sigma\omega x}{\eta\rho x}$$

$$4. \quad \epsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi x = 1$$

$$5. \quad \sigma\omega^2 x = \frac{1}{1 + \epsilon\varphi^2 x}$$

$$6. \quad \eta\rho^2 x = \frac{\epsilon\varphi^2 x}{1 + \sigma\varphi^2 x}$$

Βασικά τριγωνομετρικά συναρτήσεις

1. $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x) + c$

ωx	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	αναλόγως				
$\eta\mu\omega x$	0	1	0	-1	0
$\rho \eta\mu\omega x$	0	ρ	0	$-\rho$	0
$f(x)$	c	$\rho+c$	c	$-\rho+c$	c

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\text{Max } f \equiv |\rho| + c$$

$$\text{Min } f \equiv -|\rho| + c$$

2. $f(x) = \rho \sigma\upsilon\nu\omega x + c$

ωx	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	αναλόγως				
$\sigma\upsilon\nu\omega x$	1	0	-1	0	1
$\rho \sigma\upsilon\nu\omega x$	ρ	0	$-\rho$	0	ρ
$f(x)$	$\rho+c$	c	$-\rho+c$	c	$\rho+c$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\text{Max } f \equiv |\rho| + c$$

$$\text{Min } f \equiv -|\rho| + c$$

Βασικά τριγωνομετρικά εξισώση

$$\begin{aligned} 1. \quad \eta\mu x = \eta\mu \theta & \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{aligned} & x = 2k\pi + \theta \\ & \quad \quad \quad \downarrow \\ & x = 2k\pi + \pi - \theta \end{aligned} \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \sigma\omega x = \sigma\omega\nu \theta & \quad (\Leftrightarrow) \quad \begin{aligned} & x = 2k\pi + \theta \\ & \quad \quad \quad \downarrow \\ & x = 2k\pi - \theta \end{aligned} \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$3. \quad \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \theta \quad (\Leftrightarrow) \quad x = k\pi + \theta \quad k \in \mathbb{Z}$$

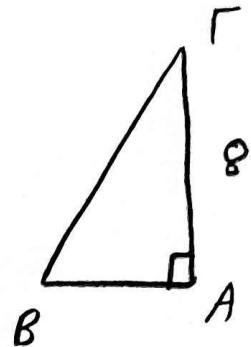
$$4. \quad \sigma\varphi x = \sigma\varphi \theta \quad (\Leftrightarrow) \quad x = k\pi + \theta \quad k \in \mathbb{Z}$$

Άσκηση 1

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$)

του οποίου σχηματίζεται λοχυσή ότι

$$A\Gamma = 8 \text{ cm} \quad \text{και} \quad \eta \mu \hat{B} = \frac{4}{5}$$



α) Να βρεις τις ηλωρη $B\Gamma, AB$

$$\begin{aligned} \text{Είναι} \quad \eta \mu \hat{B} &= \frac{8}{B\Gamma} \quad (\Rightarrow) \quad \frac{4}{5} = \frac{8}{B\Gamma} & (\Rightarrow) \quad 4 B\Gamma &= 40 \\ & & (\Rightarrow) \quad \boxed{B\Gamma &= 10} \end{aligned}$$

Απο πυθ. θεωρημα

$$AB^2 + 8^2 = 10^2$$

$$AB^2 = 100 - 64$$

$$AB^2 = 36 \quad (\Rightarrow) \quad \boxed{AB = 6}$$

β) Βρες τους τριγωνομετρικους αριθμους
της γωνιας $\hat{\Gamma}$

$$\eta \mu \hat{\Gamma} = \frac{6}{10}$$

$$\sigma \omega \hat{\Gamma} = \frac{8}{10}$$

$$\epsilon \varphi \hat{\Gamma} = \frac{6}{8}$$

$$\sigma \varphi \hat{\Gamma} = \frac{8}{6}$$

Ασκηση 2

Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 1140° και $\frac{49\pi}{6}$ και σε συνέχεια να βρεθούν τα προσήμα των τριγωνομετρικών αριθμών των γωνιών 110° και $\frac{5\pi}{3}$ rad.

$$\rightarrow 1140 = 3 \cdot 360 + 60$$

$$\text{αρα } \sin(1140) = \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(1140) = \cos 60 = \frac{1}{2}$$

$$\sin(1140) = \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos(1140) = \cos 60 = \frac{1}{2}$$

$$\rightarrow \frac{49\pi}{6} = \frac{48\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 8\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\text{αρα } \sin\left(\frac{49\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{49\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\left(\frac{49\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\left(\frac{49\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\rightarrow$ Η γωνία 110° ανήκει στο 2ο τεταρτημόριο

αρα $\sin 110 > 0$, $\cos 110 < 0$, $\tan 110 < 0$, $\cot 110 < 0$

$\rightarrow$ Η γωνία $\frac{5\pi}{3} = 300^\circ$ ανήκει στο 4ο τεταρτημόριο

αρα $\sin \frac{5\pi}{3} < 0$, $\cos \frac{5\pi}{3} > 0$, $\tan \frac{5\pi}{3} < 0$, $\cot \frac{5\pi}{3} < 0$.

Άσκηση 3

Να βρεθεί η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή των παραστάσεων.

α) $A = 3\eta\rho x - 4\sigma\omega y$

Είναι $-1 \leq \eta\rho x \leq 1$

$\Leftrightarrow -3 \leq 3\eta\rho x \leq 3$

και $-1 \leq \sigma\omega y \leq 1$

$4 \geq -4\sigma\omega y \geq -4$

$-4 \leq -4\sigma\omega y \leq 4$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\textcircled{+}}$

$-7 \leq 3\eta\rho x - 4\sigma\omega y \leq 7.$

$-7 \leq A \leq 7$

β) $B = 5 - 3\eta\rho^2 x$

Είναι $-1 \leq \eta\rho x \leq 1$

$\Leftrightarrow |\eta\rho x| \leq 1$

$|\eta\rho x|^2 \leq 1^2$

$0 \leq \eta\rho^2 x \leq 1$

$0 \geq -3\eta\rho^2 x \geq -3$

$5 \geq 5 - 3\eta\rho^2 x \geq 2$

Άρα

$2 \leq B \leq 5$

Άσκηση 4

Δίνεται γωνία ω ώστε $\eta\rho\omega = \frac{5}{13}$

και $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$

Να βρείτε $\sin\omega$, $\cos\omega$, $\tan\omega$

Τυπώσας $\eta\rho^2\omega + \sigma\omega^2\omega = 1 \quad (\Rightarrow) \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \sigma\omega^2\omega = 1$

$$(\Rightarrow) \sigma\omega^2\omega = 1 - \frac{25}{169} \quad (\Rightarrow) \sigma\omega^2\omega = \frac{144}{169}$$

$$\text{αρα } \sigma\omega\omega = \frac{12}{13} \quad \text{ή} \quad \sigma\omega\omega = -\frac{12}{13}$$

οπου $\omega \in 2\pi$ τεταρτηγριο αρα $\sigma\omega\omega < 0$

$$\sigma\omega\omega\omega \quad \sigma\omega\omega = -\frac{12}{13}$$

$$\text{Τυρα } \epsilon\varphi\omega = \frac{\eta\rho\omega}{\sigma\omega\omega} = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}$$

$$\sigma\varphi\omega = -\frac{12}{5}$$

Άσκηση 5

Δίνεται γωνία ω ώστε $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$

και $4 \varepsilon\varphi\omega - 6 \sigma\varphi\omega + 5 = 0$

Να βρούμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω .

Επειδή $\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1 \quad (\Rightarrow) \quad \sigma\varphi\omega = \frac{1}{\varepsilon\varphi\omega}$

αρα $4 \varepsilon\varphi\omega - 6 \frac{1}{\varepsilon\varphi\omega} + 5 = 0$

Θέτω $\varepsilon\varphi\omega = t$ αρα $4t - 6 \frac{1}{t} + 5 = 0$

$(\Rightarrow) 4t^2 + 5t - 6 = 0$

$\Delta = 25 + 16 \cdot 6$

$\Delta = 121$

$t = \frac{-5 \pm 11}{8} \begin{cases} t = \frac{3}{4} \quad (\Rightarrow) \quad \varepsilon\varphi\omega = \frac{3}{4} \\ t = -2 \quad (\Rightarrow) \quad \varepsilon\varphi\omega = -2 \end{cases}$

οπως η γωνία $\omega \in 3^{\circ}$ τεταρτημοριο

οπω εκη $\varepsilon\varphi\omega > 0$ αρα $\varepsilon\varphi\omega = \frac{3}{4}$

$$\Sigma \omega \epsilon \omega \quad \sigma \varphi \omega = \frac{4}{3}.$$

$$T_{\text{πρα}} \quad \sigma \omega^2 \omega = \frac{1}{1 + \epsilon \varphi^2 \omega} \quad (\Rightarrow) \sigma \omega^2 \omega = \frac{1}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2}$$

$$\sigma \omega^2 \omega = \frac{1}{1 + \frac{16}{9}} \quad (\Rightarrow) \sigma \omega^2 \omega = \frac{1}{\frac{25}{9}} = \frac{9}{25}$$

$$(\Rightarrow) \sigma \omega \omega = \frac{3}{5} \quad \eta \quad \sigma \omega \omega = -\frac{3}{5}$$

$$\Delta \epsilon \kappa \tau \omicron, \tau \omicron \quad \sigma \omega \omega = -\frac{3}{5}$$

$$\omicron \mu \omega \quad \epsilon \varphi \omega = \frac{\eta \mu \omega}{\sigma \omega \omega} \quad (\Rightarrow) \frac{3}{4} = \frac{\eta \mu \omega}{-\frac{3}{5}}$$

$$(\Rightarrow) -\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{5} = \eta \mu \omega \quad (\Rightarrow) \eta \mu \omega = -\frac{9}{20}$$

Άσκηση 6

Αν ισχύει ότι $3\eta\mu\theta + 4\sigma\upsilon\eta\theta = 5$
να υπολογιστεί η παραίσταση

$$A = 5\sigma\omega\theta - 4\varepsilon\varphi\theta$$

$$\text{Επειδή } 3\eta\mu\theta = 5 - 4\sigma\upsilon\eta\theta \quad (\Rightarrow) \eta\mu\theta = \frac{5 - 4\sigma\omega\theta}{3}$$

$$\text{Επίσης } \eta\mu^2\theta + \sigma\omega^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{5 - 4\sigma\omega\theta}{3} \right)^2 + \sigma\omega^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(5 - 4\sigma\omega\theta)^2}{9} + \sigma\omega^2\theta = 1$$

$$\Rightarrow 25 - 40\sigma\omega\theta + 16\sigma\omega^2\theta + 9\sigma\omega^2\theta = 9$$

$$25\sigma\omega^2\theta - 40\sigma\omega\theta + 16 = 0$$

$$(5\sigma\omega\theta - 4)^2 = 0 \quad (\Rightarrow) 5\sigma\omega\theta - 4 = 0$$

$$\sigma\omega\theta = \frac{4}{5}$$

$$\text{Επειδή } 3\eta\mu\theta + 4\sigma\omega\theta = 5$$

$$3\eta\mu\theta + 4 \cdot \frac{4}{5} = 5$$

$$\Rightarrow 3\eta\mu\theta + \frac{16}{5} = 5$$

$$\text{Άρα } A = 5 \cdot \frac{4}{5} - 4 \cdot \frac{3}{4} = 1, \quad (\Rightarrow) \eta\mu\theta = \frac{3}{5} \quad (\Rightarrow) \varepsilon\varphi\theta = \frac{3}{4}$$

Άσκηση 7

- α) Να εξεταστεί, αν υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες ισχύει συγχρόνως ότι $\eta\rho x = \frac{2}{3}$ και $\sigma\omega x = \frac{1}{3}$

Εστω ότι υπάρχει τέτοια γωνία x .

$$\text{Τότε } \eta\rho^2 x + \sigma\omega^2 x = 1 \quad (\Rightarrow) \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$$

$$(\Rightarrow) \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = 1 \quad (\Rightarrow) \frac{5}{9} = 1 \quad \text{Απορροή!}$$

- β) Να βρεθεί το k ώστε να υπάρχει γωνία ω και να ισχύει ότι

$$\eta\rho\omega = \frac{k}{k+2} \quad \text{και} \quad \sigma\omega\omega = \frac{k+1}{k+2}$$

$$\text{Πρέπει } \eta\rho^2\omega + \sigma\omega^2\omega = 1 \quad (\Rightarrow) \left(\frac{k}{k+2}\right)^2 + \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^2 = 1$$

$$(\Rightarrow) \frac{k^2}{(k+2)^2} + \frac{(k+1)^2}{(k+2)^2} = 1 \quad (\Rightarrow) k^2 + \cancel{k^2} + 2k + 1 = \cancel{k^2} + 4k + 4$$

$$(\Rightarrow) k^2 - 2k - 3 = 0$$

$$\boxed{k=3}$$

$$\boxed{k=-1}$$

Άσκηση 8

Να αποδείξετε ότι παρακάτω ισχύει

$$\textcircled{a} \quad \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} + \frac{\eta \rho^2 x}{1 + \sigma \varphi x} = 1 - \eta \rho x \sin x$$

$$\text{Είναι} \quad \frac{\sin^2 x}{1 + \frac{\eta \rho x}{\sin x}} + \frac{\eta \rho^2 x}{1 + \frac{\sigma \omega x}{\eta \rho x}} = 1 - \eta \rho x \sin x$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\sin^2 x}{\sin x + \eta \rho x}}{\sin x} + \frac{\frac{\eta \rho^2 x}{\eta \rho x + \sigma \omega x}}{\eta \rho x} = 1 - \eta \rho x \sin x$$

$$\frac{\sin^3 x}{\sigma \omega x + \eta \rho x} + \frac{\eta \rho^3 x}{\eta \rho x + \sigma \omega x} = 1 - \eta \rho x \sin x$$

$$\frac{\sigma \omega^3 x + \eta \rho^3 x}{\sigma \omega x + \eta \rho x} = 1 - \eta \rho x \sin x$$

$$\frac{(\cancel{\sigma \omega x + \eta \rho x})(\sigma \omega^2 x - \sigma \omega x \eta \rho x + \eta \rho^2 x)}{\cancel{\sigma \omega x + \eta \rho x}} = 1 - \eta \rho x \sin x$$

$$\Rightarrow 1 - \eta \rho x \sin x = 1 - \eta \rho x \sin x$$

$$\textcircled{3} \quad \eta \rho^2 \alpha \sigma \omega^2 B + \sigma \omega^2 \alpha = 1 - \eta \rho^2 \alpha \eta \rho^2 B$$

$$\eta \rho^2 \alpha \sigma \omega^2 B + \sigma \omega^2 \alpha + \eta \rho^2 \alpha \eta \rho^2 B = 1$$

$$\eta \rho^2 \alpha (\sigma \omega^2 B + \eta \rho^2 B) + \sigma \omega^2 \alpha = 1$$

$$\eta \rho^2 \alpha + \sigma \omega^2 \alpha = 1$$

$$1 = 1$$

$$\textcircled{8} \quad A_v \quad 0 < x < \pi \quad \text{w.o.} \quad \sqrt{\frac{1-\sigma \omega x}{1+\sigma \omega x}} - \sqrt{\frac{1+\sigma \omega x}{1-\sigma \omega x}} = -2\sigma \psi x$$

$$\text{Given} \quad \frac{\sqrt{1-\sigma \omega x}}{\sqrt{1+\sigma \omega x}} - \frac{\sqrt{1+\sigma \omega x}}{\sqrt{1-\sigma \omega x}} = \frac{\sqrt{1-\sigma \omega x}^2 - \sqrt{1+\sigma \omega x}^2}{\sqrt{1-\sigma \omega^2 x}} =$$

$$= \frac{|1-\overset{+}{\sigma \omega x}| - |1+\overset{+}{\sigma \omega x}|}{\sqrt{\eta \rho^2 x}} = \frac{1-\overset{+}{\sigma \omega x} - 1-\overset{+}{\sigma \omega x}}{|\eta \rho x|} =$$

$$= \frac{-2\sigma \omega x}{\eta \rho x} = -2\sigma \psi x$$

$$\longrightarrow A_v \quad x \in (0, \pi)$$

$$\longrightarrow \sigma \omega x \leq 1 \quad \Rightarrow 1 - \sigma \omega x \geq 0$$

$$\text{to } \eta \rho x > 0$$

$$\longrightarrow \sigma \omega x \geq -1 \quad \Rightarrow \sigma \omega x + 1 \geq 0$$

Άσκηση 9

Να αποδείξετε ότι αν ισχύει

$$(a) \quad (\eta \rho x + \sigma \omega x)^2 \leq 2$$

$$\text{Είναι} \quad \eta \rho^2 x + \sigma \omega^2 x + 2\eta \rho x \sigma \omega x \leq 2$$

$$1 + 2\eta \rho x \sigma \omega x \leq 2$$

$$2\eta \rho x \sigma \omega x \leq 1$$

$$2\eta \rho x \sigma \omega x \leq \eta \rho^2 x + \sigma \omega^2 x$$

$$0 \leq \eta \rho^2 x - 2\eta \rho x \sigma \omega x + \sigma \omega^2 x$$

$$0 \leq (\eta \rho x - \sigma \omega x)^2$$

$$(b) \quad -5 \leq 3\eta \rho x + 4\sigma \omega x \leq 5$$

$$|3\eta \rho x + 4\sigma \omega x| \leq 5$$

$$(3\eta \rho x + 4\sigma \omega x)^2 \leq 25$$

$$9\eta \rho^2 x + 24\eta \rho x \sigma \omega x + 16\sigma \omega^2 x \leq 25$$

$$9(1 - \sigma \omega^2 x) + 24\eta \rho x \sigma \omega x + 16(1 - \eta \rho^2 x) \leq 25$$

$$9 - 9\sigma \omega^2 x + 24\eta \rho x \sigma \omega x + 16 - 16\eta \rho^2 x \leq 25$$

$$9\sigma \omega^2 x + 16\eta \rho^2 x - 24\eta \rho x \sigma \omega x \geq 0 \quad (\Rightarrow) (3\sigma \omega x - 4\eta \rho x)^2 \geq 0$$

Άσκηση 10

Να υπολογιστεί η παράσταση

$$A = \frac{\eta\mu(24\eta - \theta) \cdot \sigma\upsilon\nu(37\eta - \theta) \cdot \varepsilon\varphi(15\eta + \theta) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{21\eta}{2} - \theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{17\eta}{2} + \theta\right) \cdot \sigma\omega\left(\frac{23\eta}{2} - \theta\right) \cdot \varepsilon\varphi\left(\frac{27\eta}{2} + \theta\right) \varepsilon\varphi(\theta - 12\eta)}$$

$$\bullet \eta\mu(24\eta - \theta) = \eta\mu\theta$$

$$\bullet \sigma\omega(37\eta - \theta) = \sigma\omega(36\eta + \eta - \theta) = \sigma\omega(\eta - \theta) = -\sigma\omega\theta$$

$$\bullet \varepsilon\varphi(15\eta + \theta) = \varepsilon\varphi(14\eta + \eta + \theta) = \varepsilon\varphi(\eta + \theta) = \varepsilon\varphi\theta$$

$$\begin{aligned}\bullet \sigma\varphi\left(\frac{21\eta}{2} - \theta\right) &= \sigma\varphi\left(\frac{20\eta}{2} + \frac{\eta}{2} - \theta\right) = \sigma\varphi\left(10\eta + \frac{\eta}{2} - \theta\right) = \\ &= \sigma\varphi\left(\frac{\eta}{2} - \theta\right) = \varepsilon\varphi\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet \eta\mu\left(\frac{17\eta}{2} + \theta\right) &= \eta\mu\left(\frac{16\eta}{2} + \frac{\eta}{2} + \theta\right) = \eta\mu\left(8\eta + \frac{\eta}{2} + \theta\right) = \\ &= \eta\mu\left(\frac{\eta}{2} + \theta\right) = \sigma\upsilon\nu\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bullet \sigma\upsilon\nu\left(\frac{23\eta}{2} - \theta\right) &= \sigma\upsilon\nu\left(\frac{22\eta}{2} + \frac{\eta}{2} - \theta\right) = \sigma\omega\left(11\eta + \frac{\eta}{2} - \theta\right) \\ &= \sigma\omega\left(10\eta + \eta + \frac{\eta}{2} - \theta\right) = \sigma\omega\left(\eta + \frac{\eta}{2} - \theta\right) = -\sigma\omega\left(\frac{\eta}{2} - \theta\right) = \\ &= -\eta\mu\theta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet \quad \sigma\varphi\left(\frac{27n}{2} + \theta\right) &= \sigma\varphi\left(\frac{26n}{2} + \frac{n}{2} + \theta\right) = \sigma\varphi\left(13n + \frac{n}{2} + \theta\right) \\
 &= \sigma\varphi\left(12n + n + \frac{n}{2} + \theta\right) = \sigma\varphi\left(n + \frac{n}{2} + \theta\right) = \sigma\varphi\left(\frac{n}{2} + \theta\right) = -\varepsilon\varphi\theta \\
 \bullet \quad \varepsilon\varphi\left(\theta - 12n\right) &= -\varepsilon\varphi\left(12n - \theta\right) = -\varepsilon\varphi(-\theta) = \varepsilon\varphi\theta.
 \end{aligned}$$

$$\text{Αρα} \quad A = \frac{(-np\theta)(-\sigma\omega\theta)\varepsilon\varphi\theta\varepsilon\varphi\theta}{\sigma\omega\theta(-np\theta)(-\varepsilon\varphi\theta)\varepsilon\varphi\theta} = 1.$$

Άσκηση 11

Να αποδειχθούν οι ισότητες.

$$\textcircled{a} \quad \eta \rho^2 \left(\frac{5\eta}{6} - \omega \right) + \eta \rho^2 \left(\frac{\eta}{3} - \omega \right) = 1$$

$$\begin{aligned} \text{Είναι } \eta \rho \left(\frac{5\eta}{6} - \omega \right) &= \eta \rho \left(\frac{6\eta}{6} - \frac{\eta}{6} - \omega \right) = \eta \rho \left(\eta - \frac{\eta}{6} - \omega \right) \\ &= \eta \rho \left(\eta - \left(\frac{\eta}{6} + \omega \right) \right) = \eta \rho \left(\frac{\eta}{6} + \omega \right) \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } \eta \rho^2 \left(\frac{\eta}{6} + \omega \right) + \eta \rho^2 \left(\frac{\eta}{3} - \omega \right) = 1$$

$$\text{Παρατηρώ ότι } \left(\frac{\eta}{6} + \omega \right) + \left(\frac{\eta}{3} - \omega \right) = \frac{\eta}{2}$$

$$\text{Άρα } \eta \rho^2 \left(\frac{\eta}{2} - \left(\frac{\eta}{3} - \omega \right) \right) + \eta \rho^2 \left(\frac{\eta}{3} - \omega \right) = 1$$

$$\delta \omega^2 \left(\frac{\eta}{3} - \omega \right) + \eta \rho^2 \left(\frac{\eta}{3} - \omega \right) = 1$$

$$1 = 1$$

$$\textcircled{b} \quad \text{Αν } A, B, \Gamma \text{ γωνίες τριγώνου τότε } \delta \omega \frac{A}{2} = \eta \rho \frac{B+\Gamma}{2}$$

$$\text{Γνωρίζω ότι } A+B+\Gamma=180 \Leftrightarrow \frac{A}{2} + \frac{B+\Gamma}{2} = 90 \Leftrightarrow \frac{B+\Gamma}{2} = 90 - \frac{A}{2}$$

$$\text{άρα } \delta \omega \frac{A}{2} = \eta \rho \left(90 - \frac{A}{2} \right) \Leftrightarrow \delta \omega \frac{A}{2} = \delta \omega \frac{A}{2}$$

Άσκηση 12

Να γίνει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων

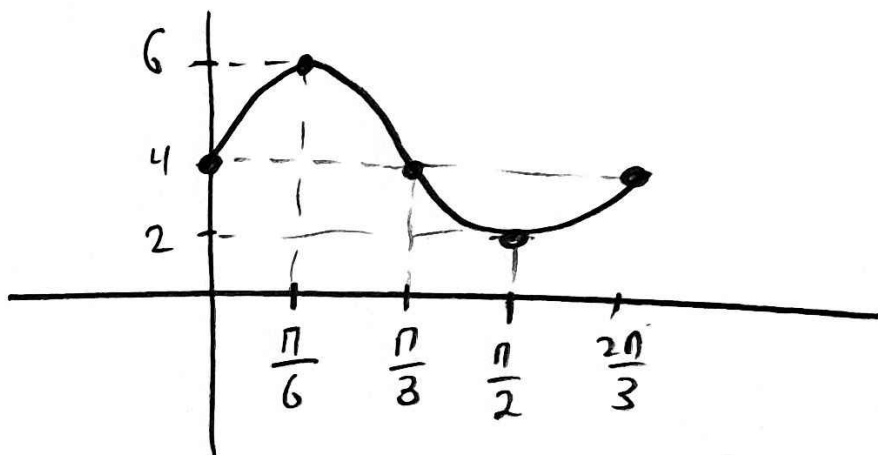
α) $f(x) = 4 + 2 \eta \rho 3x$, $x \in [0, \frac{2\pi}{3}]$

Περίοδος: $T = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{3}$

Μαx: $|p| + c = |2| + 4 = 2 + 4 = 6$

Μιn: $-|p| + c = -|2| + 4 = 2$

$3x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
x	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$
$\eta \rho 3x$	0	1	0	-1	0
$2\eta \rho 3x$	0	2	0	-2	0
$f(x)$	4	6	4	2	4

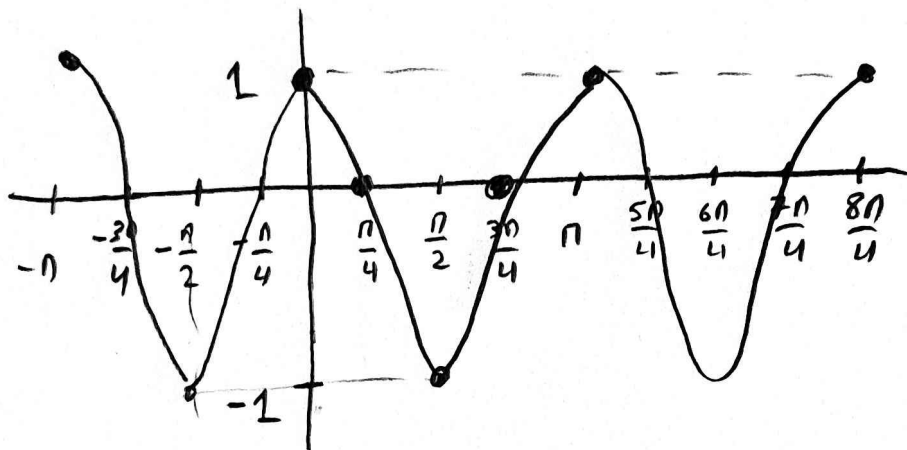


β) $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ στο $[-\pi, 2\pi]$

Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x) = \sin 2x$

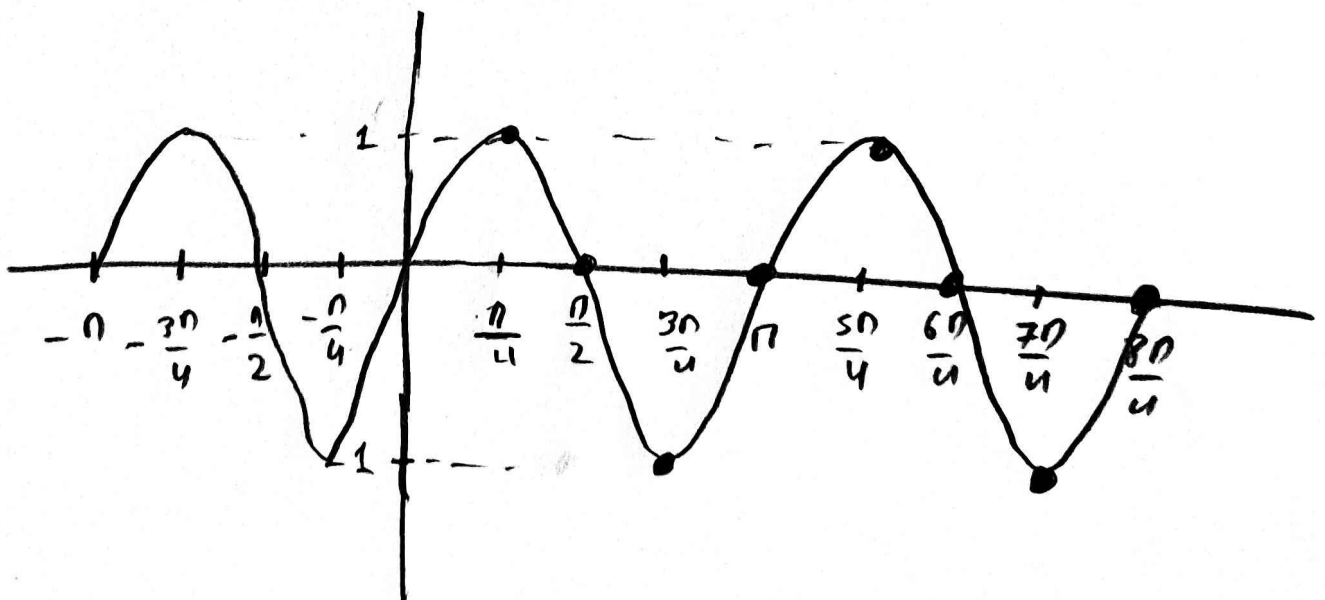
$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Ενώσω $-1 \leq \sin 2x \leq 1$ από $-1 \leq h(x) \leq 1$



$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\sin 2x$	1	0	-1	0	1
$h(x)$	1	0	-1	0	1

Συνεπώς η γραφική παράσταση της $g(x)$ είναι μετατόνιση κατά $\frac{\pi}{4}$ δεξιά.



Άσκηση 13

Η συνάρτηση $f(x) = a + B \eta \mu \omega x$, $B > 0$

έχει περίοδο $T = 4\pi$, μέγιστη τιμή 5

και η γραφική της παράσταση διέρχεται

από το $A\left(\frac{\pi}{3}, \frac{7}{2}\right)$

Να βρεθούν οι αριθμοί ω, a, B

Γνωρίζουμε ότι $T = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow 4\pi = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2}$

$\text{Max} = |B| + a \Leftrightarrow 5 = |B| + a \Leftrightarrow \boxed{a + B = 5}$

Ενώσει $\frac{7}{2} = a + B \eta \mu \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3}$

$\frac{7}{2} = a + B \eta \mu \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \frac{7}{2} = a + B \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \boxed{7 = 2a + B}$

$$\begin{cases} a + B = 5 \\ 2a + B = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a - B = -5 \\ 2a + B = 7 \end{cases} \quad (*) \quad \begin{cases} \boxed{a = 2} \\ \boxed{B = 3} \end{cases}$$

Άσκηση 14

α) Αν $\frac{n}{4} < x_1 < x_2 < \frac{n}{2}$ να συγκρίνουν οι αριθμοί $\sin\left(\frac{3n}{4} + x_1\right)$ και $\sin\left(\frac{3n}{4} + x_2\right)$

$$\text{Είναι } \frac{n}{4} < x_1 < \frac{n}{2} \Leftrightarrow \frac{3n}{4} + \frac{n}{4} < \frac{3n}{4} + x_1 < \frac{n}{2} + \frac{3n}{4}$$

$$\Leftrightarrow n < \frac{3n}{4} + x_1 < \frac{5n}{4}$$

$$\text{Είναι } \frac{n}{4} < x_2 < \frac{n}{2} \Leftrightarrow n < \frac{3n}{4} + x_2 < \frac{5n}{4}$$



$$\text{Επειδή } \frac{3n}{4} + x_1 < \frac{3n}{4} + x_2 \text{ αφού } x_1 < x_2$$

και η $\sin x$ στο $\left[n, \frac{5n}{4}\right]$ το $\sin$

$$\sin\left(\frac{3n}{4} + x_1\right) < \sin\left(\frac{3n}{4} + x_2\right).$$

Ⓑ Αν $x \in \left[\frac{n}{8}, \frac{n}{4} \right]$ να ληθεί η ανίσωση

$$\sin 4x < \sin \left(2x + \frac{n}{3} \right)$$

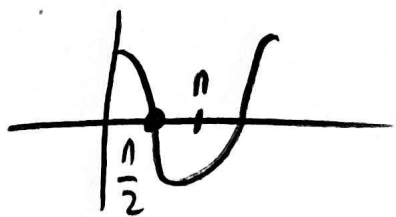
$$\cdot \frac{n}{8} \leq x \leq \frac{n}{4} \Rightarrow \frac{n}{2} \leq 4x \leq \pi$$

$$\cdot \frac{n}{8} \leq x \leq \frac{n}{4} \Rightarrow \frac{n}{4} \leq 2x \leq \frac{n}{2} \quad (=)$$

$$\frac{n}{4} + \frac{n}{3} \leq 2x + \frac{n}{3} \leq \frac{n}{2} + \frac{n}{3}$$

$$\frac{7n}{12} \leq 2x + \frac{n}{3} \leq \frac{5n}{6}$$

$$\text{Το } \left[\frac{7n}{12}, \frac{5n}{6} \right] \subseteq \left[\frac{n}{2}, \pi \right].$$

και στο $\left[\frac{n}{2}, \pi \right]$ είναι 

η $\sin x$ ↓

$$\text{Αρα } \sin 4x < \sin \left(2x + \frac{n}{3} \right) \Rightarrow 4x > 2x + \frac{n}{3}$$

$$2x > \frac{n}{3}$$

$$x > \frac{n}{6}$$

Ασκηση 15

Η Θερμοκρασία σε Βαθμούς Κελσίου
μιας ημερας σε ένα χρόνο περιγράφεται
κατά προσέγγιση από τη συνάρτηση

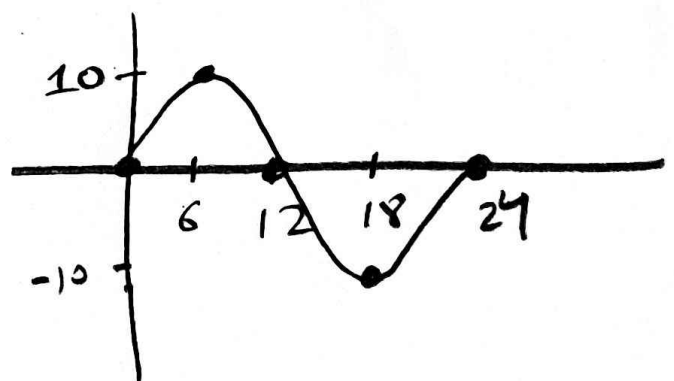
$$\theta = 10 \sin \frac{\pi t}{12}, \text{ όπου } t \text{ χρονos σε ημερ.}$$

α) Ποση είναι η μέγιστη μεταβολή
της θερμοκρασίας κατά τη διάρκεια
ως 24 ημερ.;

$$\begin{aligned} \text{Max} & \approx |10| = 10 \\ \text{Min} & \approx -|10| = -10 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{Max} & \approx |10| = 10 \\ \text{Min} & \approx -|10| = -10 \end{aligned}} \right\} \text{ μέγιστη μεταβολή} \approx 20$$

β) Να γίνει η γραφική παράσταση της
συνάρτησης για $0 \leq t \leq 24$

$\frac{\pi t}{12}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
t	0	6	12	18	24
$\sin \frac{\pi t}{12}$	0	1	0	-1	0
θ	0	10	0	-10	0



⑧ Να βρεις γραφικά ποια χρονικά σημεία
η θερμοκρασία ήταν:

i) 0°C

Τις χρονικά σημεία : 0, 12, 24

Στην ουσία στα 12 τη νύχτα

και στα 12 το μεσημέρι.

ii). κάτω από 0°C .

$t \in (12, 24)$.

Άσκηση 16

Δίνεται η συνάρτηση

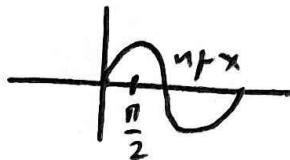
$$f(x) = \frac{1}{x} - \eta\mu x + 1, \quad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

α) Να μελετήσετε την $f(x)$ ως προς τη μονotonία της

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \quad \xrightarrow{\oplus} \quad \begin{array}{l} f(x_1) > f(x_2) \\ \quad \quad \quad \downarrow \end{array}$$

$$\bullet \quad x_1 < x_2 \quad (\Rightarrow) \quad \eta\mu x_1 < \eta\mu x_2 \quad (\Rightarrow) \quad -\eta\mu x_1 + 1 > -\eta\mu x_2 + 1.$$

$\hookrightarrow$ η $g(x) = \eta\mu x$ $\nearrow$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$



β) Να λύσει η ανίσωση

$$\frac{1}{x} - \eta\mu x + 1 > \frac{2}{\pi}$$

$$(\Rightarrow) \quad f(x) > f\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{γιατι} \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{\pi}$$

$\downarrow$

$$x < \frac{\pi}{2}$$

Άσκηση 17

Να λυθούν οι τριγωνομετρικές εξισώσεις.

α) $\eta \pi x = \frac{1}{2}$

Είναι $\eta \pi x = \eta \pi \frac{\pi}{6}$

$$\Leftrightarrow \boxed{x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}}$$

ή

$$x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$$

$$\boxed{x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}}$$

β) $3\eta \pi x - 5 = 0$

Είναι $\eta \pi x = \frac{5}{3}$ Αδυνατείται αφού $-1 \leq \eta \pi x \leq 1$

γ) $\sigma \omega \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - \sigma \omega \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$

Είναι $\sigma \omega \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = \sigma \omega \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$

$$\cancel{x} - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \cancel{x} + \frac{\pi}{4} \quad \text{ή} \quad x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi - x - \frac{\pi}{4}$$

Αδυνατεί!

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

$$x = k\pi + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8}$$

$$\boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{24}}$$

$$\textcircled{8} \quad \sigma\psi\left(x - \frac{n}{4}\right) + \sigma\psi x = 0$$

$$\text{Einau} \quad \sigma\psi\left(x - \frac{n}{4}\right) = -\sigma\psi x$$

$$\sigma\psi\left(x - \frac{n}{4}\right) = \sigma\psi(-x)$$

$$x - \frac{n}{4} = kn - x$$

$$2x = kn + \frac{n}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{kn}{2} + \frac{n}{8}}$$

$$\textcircled{9} \quad \sigma w(2x) + \sigma w\left(x - \frac{n}{3}\right) = 0$$

$$\sigma w(2x) = -\sigma w\left(x - \frac{n}{3}\right)$$

$$\sigma w(2x) = \sigma w\left(n - x + \frac{n}{3}\right)$$

$$2x = 2kn + n - x + \frac{n}{3}$$

$$3x = 2kn + \frac{4n}{3}$$

$$\boxed{x = \frac{2kn}{3} + \frac{4n}{9}}$$

$$\therefore 2x = 2kn - n + x - \frac{n}{3}$$

$$\boxed{x = 2kn - \frac{4n}{3}}$$

$$(5) \quad n p \left(2x - \frac{n}{4} \right) + o w \left(\frac{n}{4} + x \right) = 0$$

$$\text{Given } o w \left(\frac{n}{4} + x \right) = - n p \left(2x - \frac{n}{4} \right)$$

$$o w \left(\frac{n}{4} + x \right) = n p \left(\frac{n}{4} - 2x \right)$$

$$o w \left(\frac{n}{4} + x \right) = o w \left(\frac{n}{2} - \frac{n}{4} + 2x \right)$$

$$o w \left(\frac{n}{4} + x \right) = o w \left(\frac{n}{4} + 2x \right)$$

$$\frac{n}{4} + x = 2kn + \frac{n}{4} + 2x \quad \text{or} \quad \frac{n}{4} + x = 2kn - \frac{n}{4} - 2x$$

$$-x = 2kn$$

$$\boxed{x = -2kn}$$

$$3x = 2kn - \frac{n}{2}$$

$$\boxed{x = \frac{2kn}{3} - \frac{n}{6}}$$

$$(n) \quad 2np x \sigma w x - \underline{1} = 2\sigma w x - np x$$

$$2np x \sigma w x - 2\sigma w x = 1 - np x$$

$$2\sigma w x (np x - 1) + np x - 1 = 0 \quad (=)$$

$$(np x - 1)(2\sigma w x + 1) = 0$$

$$np x = 1$$

$$\boxed{x = 2kn + \frac{n}{2}}$$

or

$$\sigma w x = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{x = 2kn \pm \frac{2n}{3}}$$

$$\textcircled{\theta} \quad \eta \rho x \cdot \epsilon \varphi x = 1 + \sigma \omega x + \frac{1}{\sigma \omega x}, \quad \sigma \omega x \neq 0$$

$$\text{Είχα} \quad \sigma \omega x \eta \rho x \epsilon \varphi x = \sigma \omega x + \sigma \omega^2 x + 1$$

$$\sigma \omega x \eta \rho x \frac{\eta \rho x}{\sigma \omega x} = \sigma \omega x + \sigma \omega^2 x + 1$$

$$\eta \rho^2 x = \sigma \omega x + \sigma \omega^2 x + 1 \quad (\Rightarrow 1 - \sigma \omega x^2 x)$$

$$1 - \sigma \omega x^2 x = \sigma \omega x + \sigma \omega^2 x + 1$$

$$0 = 2\sigma \omega^2 x + \sigma \omega x \quad (\Rightarrow \sigma \omega x / (2\sigma \omega x + 1) = 0$$

$$(\Rightarrow \sigma \omega x = 0 \quad \vee \quad 2\sigma \omega x + 1 = 0$$

απορ/ται

$$\sigma \omega x = -\frac{1}{2}$$

$$x = 2\kappa\eta \pm \frac{2\rho}{3}$$

$$\textcircled{i} \quad \eta \rho x - \sqrt{3} \sigma \omega x = 0$$

Εστω ότι $\eta \rho x = 0$ τότε $\sigma \omega x = 0$ που είναι άτολο!

Άρα $\eta \rho x \neq 0$

$$\text{Συνεπώς} \quad 1 - \sqrt{3} \sigma \varphi x = 0 \quad (\Rightarrow \sigma \varphi x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$(\Rightarrow x = \kappa\eta + \frac{\rho}{3}$$

$$\textcircled{\text{F}} \quad 4 \sigma \omega^2 x + 8 \eta \rho x - 7 = 0$$

$$\text{Είναι} \quad 4(1 - \eta \rho^2 x) + 8 \eta \rho x - 7 = 0$$

$$4 - 4 \eta \rho^2 x + 8 \eta \rho x - 7 = 0$$

$$-4 \eta \rho^2 x + 8 \eta \rho x - 3 = 0$$

$$\text{ΘΕΤΩ} \quad \eta \rho x = t \quad \text{αρα} \quad -4t^2 + 8t - 3 = 0$$

$$\Delta = 64 - 48 = 16$$

$$t = \frac{-8 \pm 4}{-8} \quad \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ t = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{αρα} \quad \eta \rho x = \frac{1}{2} \quad \text{ή} \quad \eta \rho x = \frac{3}{2}$$

Απολο!

$$\boxed{x = 2\kappa\eta + \frac{5\eta}{6}}$$

Άσκηση 18

Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$
σε $(-\pi, \pi)$.

Αρχικοί λύω την εξίσωση τριγωνομετρικά

αρα $x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} - x$ ή $x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3} + x$

$$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3}$$

Αδυσχ.

$$\boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{6}} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Για $k=0$ έχω $x = \frac{\pi}{6}$ δακτυ!

Για $k=1$ έχω $x = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} > \pi$. Απορ/τον.

Για $k=-1$ έχω $x = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}$ Δακτυ

Για $k=-2$ έχω $x = -2\pi + \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = -\frac{11\pi}{6}$
Απορ/τον.

Βασικές αρχές πολυωνύμων

1. Μονώνυμο του x καλούμε κάθε παράσταση της μορφής ax^v , $a \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{N}$
2. Πολυώνυμο του x καλούμε κάθε παράσταση της μορφής $a_n x^v + a_{n-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$ όπου $a_i \in \mathbb{R}$ και $v \in \mathbb{N}$.
3. Τα $a_n x^v$, $a_{n-1} x^{v-1}$, $\dots$, $a_1 x$, a_0 λέγονται όροι του πολυωνύμου ενώ οι αριθμοί a_n , a_{n-1} , $\dots$, a_1 , a_0 λέγονται συντελεστές του πολυωνύμου ενώ ο a_0 λέγεται και σταθερός όρος του πολυωνύμου.
4. Ο αριθμός v λέγεται βαθμός του πολυωνύμου, τα σταθερά πολυώνυμα έχουν βαθμό μηδέν ενώ το μηδενικό πολυώνυμο δεν έχει βαθμό.

5. Δύο πολυώνυμα είναι ίσα αν έχουν ίδιο βαθμό και ίδιους συντελεστές
6. Ο αριθμός p είναι ρίζα ενός πολυωνύμου αν το μηδενίζει δηλαδή αν $P(p) = 0$.
7. Ο σταθερός όρος του πολυωνύμου $P(x)$ είναι το $P(0)$ ενώ το γινόμενο των συντελεστών του πολυωνύμου είναι $P(1)$.

Ταυτότητα εκτελεστικής διαίρεσης

$$1. \Delta(x) = \delta(x) \pi(x) + \upsilon(x)$$

ο βαθμός του υπολοίπου πρέπει να είναι μικρότερος του διαιρέτη.

$$2. \text{ Αν το } \upsilon(x) = 0 \text{ δηλαδή } \Delta(x) = \delta(x) \pi(x)$$

τότε η διαίρεση λήγει τέλεια. Τότε λήγουμε:

→ Το $\Delta(x)$ διαιρείται από το $\delta(x)$

→ Το $\delta(x)$ διαιρεί το $\Delta(x)$

→ Το $\delta(x)$ είναι διαιρετής ή παρουνόμος του $\Delta(x)$

Η Διαίρεση $P(x) : (x-p)$

Στην ουσία μετράμε για διαίρεση όπου
ο διαιρέτης είναι πολυώνυμο 1ου βαθμού.

Εδώ γνωρίζουμε ότι :

1. $P(x) = (x-p) \eta(x) + \upsilon$ όπου $\upsilon = P(p)$.

2. Αν $P(x) = (x-p) \eta(x)$ δηλαδή το $x-p$
είναι παραγοντικό του $P(x)$ τότε $P(p) = 0$

Τότε την ουκρίβια όλα τα παρακάτω είναι
ωσολύτως.

- Το $x-p$ διαιρεί το $P(x)$
 - Η διαίρεση $P(x) : (x-p)$ είναι τέλεια.
 - Το $x-p$ είναι παραγοντικό του $P(x)$
 - Το p είναι ρίζα του $P(x)$
 - Το $P(x)$ διαιρείται με το $x-p$
 - Το $x-p$ είναι διαιρέσιμ του $P(x)$
- } $P(p) = 0.$

Προσοχή

1. Εάν το $P(x)$ έχει παραγοντα το $(x-\alpha)(x-\beta)$ αν και μόνο αν το $P(x)$ έχει παραγοντα το $x-\alpha$ και το $x-\beta$.
2. Εάν πολυώνυμο $P(x)$ με βαθμό V έχει το πολυ V ρίζες. Εάν κάποια από αυτές τις ρίζες είναι ακέραιος αριθμός τότε σίγουρα διαιρεί τον σταθερό όρο του $P(x)$. Εάν ο σταθερός όρος δεν έχει ακέραιους διαιρέτες τότε το $P(x)$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

Άσκηση 19

Δίνεται το πολυώνυμο

$$P(x) = (\lambda^3 - 4\lambda)x^3 + (\lambda^2 - 2\lambda)x + \lambda - 2$$

Να βρούμε το βαθμό του $P(x)$ για τις διαφορές τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\text{Είναι } \lambda^3 - 4\lambda = 0 \quad (\Leftrightarrow) \lambda(\lambda^2 - 4) = 0$$

$$\lambda = 0 \quad \text{ή} \quad \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 = 4$$

$$\lambda = 2 \quad \text{ή} \quad \lambda = -2$$

1. Αν $\lambda = 0$ τότε $P(x) = -2$ είναι σταθερό πολυώνυμο με βαθμό μηδέν.

2. Αν $\lambda = 2$ τότε $P(x) = 0$ είναι μηδενικό πολυώνυμο και δεν έχει βαθμό.

3. Αν $\lambda = -2$ τότε $P(x) = 8x - 4$ είναι 1ου βαθμού πολυώνυμο.

Ασκηση 20

Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x) = x^2 - 2x$

και $Q(x) = x^3 + 3x - 1$. Να βρεθούν τα

πολυώνυμα $A(x) = xP(x) - 2Q(x)$ και $B(x) = P(x+2)Q(x^2)$

$$\text{Είναι } A(x) = x(x^2 - 2x) - 2(x^3 + 3x - 1)$$

$$A(x) = x^3 - 2x^2 - 2x^3 - 6x + 2$$

$$A(x) = -x^3 - 2x^2 - 6x + 2$$

$$\text{Είναι } B(x) = (x^2 + 2x)(x^6 + 3x^2 - 1) \quad \underline{\underline{\textcircled{+}}}$$

$$\rightarrow P(x+2) = (x+2)^2 - 2(x+2) = x^2 + 4x + 4 - 2x - 4 = x^2 + 2x$$

$$\rightarrow Q(x^2) = (x^2)^3 + 3x^2 - 1 = x^6 + 3x^2 - 1$$

$$\underline{\underline{\textcircled{+}}} \quad x^8 + 3x^4 - x^2 + 2x^7 + 6x^3 - 2x$$

Άσκηση 21

Να βρεθεί το πολυώνυμο $P(x)$ αν

$$(3x-2) P(x) = 3x^3 - 14x^2 + 17x - 6$$

πολυώνυμο

πολυώνυμο 3ου βαθμού

Για να είναι ίσα τα δύο πολυώνυμα πρέπει το $P(x)$ να είναι 2ου βαθμού.

$$\text{Έστω } P(x) = ax^2 + bx + \gamma$$

$$(3x-2)(ax^2 + bx + \gamma) = 3x^3 - 14x^2 + 17x - 6$$

$$3ax^3 + 3bx^2 + 3\gamma x - 2ax^2 - 2bx - 2\gamma = 3x^3 - 14x^2 + 17x - 6$$

$$3ax^3 + (3b - 2a)x^2 + (3\gamma - 2b)x - 2\gamma = 3x^3 - 14x^2 + 17x - 6$$

$$\begin{cases} 3a = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a=1}$$

$$\begin{cases} 3b - 2a = -14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 3b = -12 \quad \boxed{b=-4}$$

$$\begin{cases} 3\gamma - 2b = 17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\gamma=3}$$

$$\begin{cases} -2\gamma = -6 \end{cases}$$

Άσκηση 22

Να βρεθεί το πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο
ώστε $P(2x-1) = 4x^2 - 8x + 1$

Θέτω $2x-1 = t$
 $2x = t+1 \quad \Leftrightarrow x = \frac{t+1}{2}$

Αρα $P(t) = 4 \left(\frac{t+1}{2} \right)^2 - 8 \cdot \frac{t+1}{2} + 1$

$$P(t) = 4 \frac{(t+1)^2}{4} - 4(t+1) + 1$$

$$P(t) = t^2 + 2t + 1 - 4t - 4 + 1$$

$$P(t) = t^2 - 2t - 2$$

$$P(x) = x^2 - 2x - 2$$

Άσκηση 23

Να γίνουν οι παρακάτω διαιρέσεις

α) $(2x^4 - 7x^3 + 18x + 2) : (x^2 - 3x + 1)$

Καθαρή Διαίρεση

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 - 7x^3 + 18x + 2 & x^2 - 3x + 1 \\ - [2x^4 - 6x^3 + 2x^2] & 2x^2 - x - 5 \\ \hline -x^3 - 2x^2 + 18x + 2 & \\ - [-x^3 + 3x^2 - x] & \\ \hline -5x^2 + 19x + 2 & \\ - [-5x^2 + 15x - 5] & \\ \hline 4x + 7 & \end{array}$$

Ταυτότητα Ευκλείδειας Διαιρέσης

$$2x^4 - 7x^3 + 18x + 2 = (x^2 - 3x + 1)(2x^2 - x - 5) + 4x + 7$$

Η συγκεκριμένη διαίρεση δεν γίνεται να γίνει με άλλο τρόπο.

$$\textcircled{B} (x^3 - 5x + 3) : (x + 2)$$

Σε αυτή τη διαίρεση ο διαυρετής $\delta(x) = x + 2$ είναι 1ου βαθμού. Εννοείται ότι μπορούμε να εκτελέσουμε κάθετη διαίρεση. Όταν ο διαυρετής είναι της μορφής $x - \rho$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το σχήμα Horner.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & -5 & 3 & \textcircled{-2} & & \\ \downarrow & -2 & 4 & 2 & & & \\ 1 & -2 & -1 & 5 & & & \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{πηλίκο}} \quad \underbrace{\hspace{2em}}_{\text{υπόλοιπο.}}$

$$\text{Είναι} \quad \underbrace{x^3 - 5x + 3}_{\delta(x)} = \underbrace{(x + 2)}_{\delta(x)} \cdot \underbrace{(x^2 - 2x - 1)}_{\pi(x)} + \underbrace{5}_\upsilon$$

$$\textcircled{1} \quad (x^4 - 2x^3 - x^2 + 8x - 12) : (x^2 - 4)$$

Μπορούμε να εκτελέσουμε καθεστη διαίρεση

Επειδή όπως $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ και το

2 και -2 είναι ρίζα του διαυρετέου
μπορώ να κάνω κλίμακωπα δυο φορές Horner.

$$\begin{array}{r}
 1 \quad -2 \quad -1 \quad 8 \quad -12 \quad \textcircled{2} \\
 \downarrow 2 \quad 0 \quad -2 \quad 12 \\
 1 \quad 0 \quad -1 \quad 6 \quad 0 \\
 \downarrow -2 \quad 4 \quad -6 \\
 1 \quad -2 \quad 3 \quad 0
 \end{array}$$




$$\text{Άρα} \quad x^4 - 2x^3 - x^2 + 8x - 12 = (x^2 - 4)(x^2 - 2x - 3)$$

Άσκηση 24

Δίνεται $P(x) = 2x^3 + x^2 - 22x + 24$

α) Να το $2x-3$ είναι παραγοντάς του $P(x)$

Αρκεί να ή $P(x) : (2x-3)$ είναι τίλος.

$$\begin{array}{rrrr} 2 & 1 & -22 & 24 \\ \downarrow & 3 & 6 & -24 \\ 2 & 4 & -16 & 0 \end{array} \quad \left(\frac{3}{2}\right)$$

β) Να παραγοντοποιηθεί το $P(x)$

$$\text{Είναι } P(x) = (2x-3)(2x^2+4x-16)$$

σύμφωνα με την ταυτότητα της

εξάσκησης διαίρεση.

Άσκηση 25

Δίνεται $P(x) = x^4 - 3x^3 + ax^2 + (a^2 - 4a - 8)x + a^2 - 21$

Να βρεθεί το a ον η διαίρεση $P(x) : (x^2 + 1)$ είναι τέλεια.

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 3x^3 + ax^2 + (a^2 - 4a - 8)x + a^2 - 21 & x^2 + 1 \\ - [x^4 + x^2] & \\ \hline -3x^3 + (a-1)x^2 + (a^2 - 4a - 8)x + a^2 - 21 & \\ - [-3x^3 - 3x] & \\ \hline (a-1)x^2 + (a^2 - 4a - 5)x + a^2 - 21 & \\ - [(a-1)x^2 + a-1] & \\ \hline (a^2 - 4a - 5)x + a^2 - a - 20 & \end{array}$$

Για να είναι τέλεια η διαίρεση πρέπει

$$\begin{cases} a^2 - 4a - 5 = 0 & (\Leftrightarrow) \boxed{a=5} \text{ ή } \boxed{a=-1} \\ a^2 - a - 20 = 0 & \boxed{a=5} \quad \boxed{a=-4} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Άρα} \\ \underline{\underline{a=5}} \end{array}$$

Άσκηση 26

Δίνεται το πολώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 - 14x + B$.

Το $x-3$ είναι παραγοντα του $P(x)$ και
το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με

το $x+1$ είναι 36.

Να βρεθούν τα a, B και να παραγοντοποιηθεί
το $P(x)$

Αφού το $x-3$ είναι παραγοντα είναι $P(3) = 0$

Αφού το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με

το $x+1$ είναι 36 είναι $P(-1) = 36$.

$$\text{Άρα } \begin{cases} P(3) = 0 & \Leftrightarrow 27 + 9a - 42 + B = 0 \Leftrightarrow 9a + B = 15 \\ P(-1) = 36 & \Leftrightarrow -1 + a + 14 + B = 36 \Leftrightarrow a + B = 23 \end{cases}$$

$$\text{Λύνοντας } a = -1 \text{ και } B = 24$$

$$\text{Άρα } P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$$

Αφού το $x-3$ είναι παραγοντα το 3 είναι ρίζα
του $P(x)$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & -1 & -14 & 24 \\ \downarrow & 3 & 6 & -24 \\ 1 & 2 & -8 & 0 \end{array} \quad (3)$$

$$P(x) = (x-3)(x^2 + 2x - 8)$$

$$P(x) = (x-3)(x+4)(x-2)$$

Άσκηση 27

- α) Δίνεται το $P(x) = x^3 + 4x^2 + ax + b$ το οποίο
έχει παραγοντάρι το $x^2 + 2x - 3$
Να βρεθούν τα a, b

Είναι $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$

$$\begin{aligned} \text{Αρα } P(-3) &= 0 \quad (\Rightarrow) -3a + b = -9 \\ \text{και } P(1) &= 0 \quad (\Rightarrow) a + b = -5 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \text{Αρα } P(-3) &= 0 \\ \text{και } P(1) &= 0 \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} a &= 1 \\ b &= -6 \end{aligned}$$

- β) Δίνεται το $P(x) = x^3 + ax^2 + b$ το οποίο
έχει παραγοντάρι το $x^2 - 4x + 4$.
Να βρεθούν τα a, b .

Είναι $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

Εδώ δεν δοθηκε
ο προηγούμενος
τρόπος.

$$\begin{array}{r} 1 \quad a \quad 0 \quad b \quad (2) \\ \downarrow \quad 2 \quad 2a+4 \quad 4a+8 \\ 1 \quad a+2 \quad 2a+4 \quad \boxed{4a+b+8} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad a+2 \quad 2a+4 \quad (2) \\ \downarrow \quad 2 \quad 2a+8 \\ 1 \quad a+4 \quad 4a+12 \end{array}$$

Προτιμώ

$$\begin{cases} 4a + b + 8 = 0 \\ 4a + 12 = 0 \end{cases}$$

$$\boxed{a = -3}$$

$$\boxed{b = 4}$$

Άσκηση 28

Το υπόλοιπο της $P(x) : (x-2)$ είναι 1

και με το $P(x) : (x+3)$ είναι -14

Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης
του $P(x)$ με το x^2+x-6 .

Δίνεται ότι $P(2)=1$ και $P(-3)=-14$

Συμπεραίνει με την ταυτότητα εκτελεστικής διαίρεσης

$$P(x) = \underbrace{(x^2+x-6)}_{\text{2ου βαθμού από } u(x) \text{ 1ου βαθμού}} n(x) + u(x).$$

Συνεπώς

$$P(x) = (x^2+x-6)n(x) + ax+B.$$

$$P(2) = 2a+B = 1$$

$$P(-3) = -3a+B = -14$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+B=1 \\ -3a+B=-14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} a=3 \\ B=-5 \end{matrix}$$

Άσκηση 29

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) : (x^2 - 3x - 10)$

είναι $-2x + 7$. Να βρεις το υπόλοιπο

της διαίρεσης $P(x) : (x + 2)$

καταρχάς $P(x) = (x^2 - 3x - 10) \pi(x) + 7 - 2x$

Το υπόλοιπο της $P(x) : (x + 2)$ είναι $u = P(-2)$

$$\text{Είναι } P(-2) = (4 + 6 - 10) \pi(-2) + 7 - 2(-2)$$

$$P(-2) = 11 \quad \text{άρα } u = 11.$$

Άσκηση 30

Εστω $P(x)$, 3ου βαθμού, πολυώνυμο το οποίο
διαιρείται με το x^2+3 , έχει ρίζα το -1
και και $P(-2)=14$. Να βρεθεί το $P(x)$.

κατ'αρχάς ισχύει ότι $P(x) = (x^2+3) \eta(x)$
↓
3ου βαθμού άρα ↪ 1ου βαθμού

$$\text{Είναι } P(x) = (x^2+3)(ax+B).$$

$$P(-1)=0 \quad (\Rightarrow) \quad 4(-a+B)=0 \quad (\Rightarrow) \quad -a+B=0$$

$$P(-2)=14 \quad (\Rightarrow) \quad 7(-2a+B)=14 \quad (\Rightarrow) \quad -2a+B=2$$

$$\begin{cases} -a+B=0 \\ -2a+B=2 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad a=B=-2.$$

$$\text{Άρα } P(x) = (x^2+3)(-2x-2)$$

$$P(x) = -2x^3 - 2x^2 - 6x - 6$$

Άσκηση 31

Αν η εξίσωση $x^3 - (\lambda + 2)x^2 + 2\lambda x - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{Z}$
έχει ακέραια ρίζα, Βρί το λ .

Καταρχάς η εξίσωση έχει το πολύ 3 ρίζες.

Η ακέραια ρίζα θα είναι το 1 ή το -1.

Αν είναι το $x=1$ τότε $1 - (\lambda + 2) + 2\lambda - 1 = 0$

$$1 - \lambda - 2 + 2\lambda - 1 = 0$$

$$\boxed{\lambda = 2}$$

Αν είναι το $x=-1$ τότε $-1 - (\lambda + 2) - 2\lambda - 1 = 0$

$$-1 - \lambda - 2 - 2\lambda - 1 = 0 \quad (\Rightarrow) \quad -3\lambda = 4$$

$$\lambda = -\frac{4}{3} \notin \mathbb{Z}$$

Επεξήγηση

Η ακέραια ρίζα πρέπει να είναι το 1 ή το -1

γιατί η ακέραια ρίζα πρέπει να είναι

διαρστής του σταθερού όρου -1.

Άσκηση 32

Να λύσουμε οι εξισώσεις

$$\textcircled{\alpha} \quad x^3 - 12 = 4x - 3x^2$$

$$x^3 - 12 - 4x + 3x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x+3) - 4(x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x^2-4) = 0$$

$$x+3=0$$

$$\boxed{x=-3}$$

ή

$$x^2-4=0$$

$$x^2=4$$

$$\boxed{x=2}$$

$$\text{ή} \quad \boxed{x=-2}$$

$$\textcircled{\beta} \quad (2x+1)^3 = 27$$

$$(2x+1)^3 = 3^3$$

$$\Leftrightarrow 2x+1=3$$

$$\Leftrightarrow 2x=2 \quad \Leftrightarrow \boxed{x=1}$$

$$\textcircled{\gamma} \quad (x^2-11)^5 + 32 = 0$$

$$(x^2-11)^5 = -32$$

$$\Leftrightarrow (x^2-11)^5 = (-2)^5$$

$$x^2-11=-2$$

$$\Leftrightarrow x^2=9$$

$$\Leftrightarrow x^2=3^2$$

$$\boxed{x=3}$$

$$\text{ή} \quad \boxed{x=-3}$$

$$\textcircled{\delta} \quad (x^2-2)^4 - 16 = 0$$

$$(x^2-2)^4 = 2^4$$

$$x^2-2=2 \quad \vee \quad x^2-2=-2$$

$$x^2=4$$

$$x^2=0$$

$$x^2=2^2$$

$$\boxed{x=0}$$

$$\boxed{x=2}$$

$$\boxed{x=-2}$$

$$\textcircled{\epsilon} \quad (5x-3)^6 + 4 = 0$$

$$(5x-3)^6 = -4$$

αδυναται

$$\textcircled{\zeta} \quad x^3 - 7x + 6 = 0$$

Οι διαιρετές του σταθερού όρου είναι οι
 $6 \text{ ή } \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

Παρατηρώ ότι το 1 είναι λύση της εξίσωσης
 οπότε δοκιμάζω Horner με το 1.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ \downarrow & 1 & 1 & -6 & \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array} \quad \textcircled{1}$$

$$\text{Η εξίσωση γίνεται} \\ (x-1)(x^2+x-6)=0$$

$$x-1=0$$

$$\vee \quad x^2+x-6=0$$

$$\boxed{x=1}$$

$$\boxed{x=-3} \quad \boxed{x=2}$$

$$\textcircled{n} \quad 6x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4 = 0$$

Διαγμένα του 4: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

$$\begin{array}{rrrrrr} 6 & -5 & -15 & 0 & 4 & \textcircled{-1} \\ \downarrow & & & & & \\ & -6 & 11 & 4 & -4 & \\ 6 & -11 & -4 & 4 & 0 & \end{array}$$

$$(x+1)(6x^3 - 11x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$x+1=0$$

$$\boxed{x = -1}$$

ή

$$6x^3 - 11x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\begin{array}{rrrrrr} 6 & -11 & -4 & 4 & \textcircled{2} \\ \downarrow & & & & & \\ & 12 & 2 & -4 & & \\ 6 & 1 & -2 & 0 & & \end{array}$$

$$(x-2)(6x^2 + x - 2) = 0$$

$$x-2=0$$

$$\boxed{x = 2}$$

$$\text{ή} \quad 6x^2 + x - 2 = 0$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}} \quad \boxed{x = -\frac{2}{3}}$$

⑨

$$\sqrt{x+2} + x = 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{x+2} = 4-x$$

$$x+2 = (4-x)^2$$

$$x+2 = 16 - 8x + x^2 \quad (=)$$

$$x^2 - 9x + 14 = 0$$

$$\boxed{x=2}$$

$$\boxed{x=7}$$

$$x+2 \geq 0 \quad \text{και} \quad 4-x \geq 0$$

$$x \geq -2 \quad x \leq 4$$

$$x \in [-2, 4]$$

⑩

$$\sqrt{3x+1} - \sqrt{x+4} = 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{3x+1} = 1 + \sqrt{x+4}$$

$$3x+1 = 1 + 2\sqrt{x+4} + x+4$$

$$2x-4 = 2\sqrt{x+4}$$

$$x-2 = \sqrt{x+4}$$

$$(x-2)^2 = x+4$$

$$x^2 - 4x + 4 = x+4$$

$$x^2 - 5x = 0$$

$$x(x-5) = 0$$

$$\boxed{x=0}$$

$$\boxed{x=5}$$

$$3x+1 \geq 0 \quad \text{και} \quad x+4 \geq 0$$

$$x \geq -\frac{1}{3} \quad x \geq -4$$

$$x \in [-\frac{1}{3}, +\infty)$$

$$\text{πρπ} \quad x-2 \geq 0$$

$$x \geq 2$$

$$\text{αρα} \quad x \in [2, +\infty)$$

$$(K) \quad \sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{4x-4} - 5x + 13 = 0$$

$$x-1 \geq 0$$

$$\boxed{x \geq 1}$$

$$\sqrt{x-1}^3 + \sqrt{4(x-1)} - 5x + 13 = 0$$

$$\sqrt{x-1}^3 + 2\sqrt{x-1} - 5x + 13 = 0$$

$$\left[\text{ΘΣΤΩ} \quad \sqrt{x-1} = t \quad \text{αρα} \quad x-1 = t^2 \quad (\Rightarrow) \quad x = t^2 + 1 \right]$$

$$(t \geq 0)$$

$$t^3 + 2t - 5(t^2 + 1) + 13 = 0$$

$$t^3 + 2t - 5t^2 - 5 + 13 = 0$$

$$t^3 - 5t^2 + 2t + 8 = 0,$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & -5 & 2 & 8 \end{array} \quad (-1)$$

$$\downarrow \quad -1 \quad 6 \quad -8$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & -6 & 8 & 0 \end{array}$$

$$(t+1)(t^2 - 6t + 8) = 0$$

$$t+1=0$$

$$\vee \quad t^2 - 6t + 8 = 0$$

$$\boxed{t = -1}$$

$$\boxed{t = 2}$$

ή

$$\boxed{t = 4}$$

$$\sqrt{x-1} = 2$$

$$x-1 = 4$$

$$\boxed{x = 5}$$

$$\sqrt{x-1} = 4$$

$$x-1 = 16$$

$$\boxed{x = 17}$$

$$(2) \quad 4 \sigma \omega^4 x + 4 \sigma \omega^3 x + 9 \eta \rho^2 x - \sigma \omega x - 7 = 0$$

$$4 \sigma \omega^4 x + 4 \sigma \omega^3 x + 9(1 - \sigma \omega^2 x) - \sigma \omega x - 7 = 0$$

$$4 \sigma \omega^4 x + 4 \sigma \omega^3 x + 9 - 9 \sigma \omega^2 x - \sigma \omega x - 7 = 0$$

$$\exists \epsilon \text{ тв } \sigma \omega x = t$$

$$4 t^4 + 4 t^3 - 9 t^2 - t + 2 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 4 & -9 & -1 & 2 & (1) \\ \downarrow & 4 & 8 & -1 & -2 & \\ 4 & 8 & -1 & -2 & 0 & \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow (t-1)(4t^3 + 8t^2 - t - 2) = 0$$

$$t-1=0$$

$$\boxed{t=1}$$

$$\sigma \omega x = 1$$

$$\boxed{x = 2k\pi}$$

$$\text{и } 4t^3 + 8t^2 - t - 2 = 0$$

$$4t^2(t+2) - (t+2) = 0$$

$$(t+2)(4t^2 - 1) = 0$$

$$t+2=0$$

$$\boxed{t=-2}$$

$$\sigma \omega x = -2$$

Абсолютно

$$\text{и } (2t+1)(2t+1) = 0$$

$$\boxed{t = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{t = -\frac{1}{2}}$$

$$\sigma \omega x = \frac{1}{2}$$

$$\sigma \omega x = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{x = 2k\pi \pm \frac{\rho}{3}}$$

$$\boxed{x = 2k\pi \pm \frac{2\rho}{3}}$$

$$\textcircled{p} \quad x^6 - 7x^2 - 6 = 0$$

$$(x^2)^3 - 7x^2 - 6 = 0$$

$$x^2 = t$$

$$t^3 - 7t - 6 = 0$$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 0 & -7 & -6 & \textcircled{-1} \\ \downarrow & & & & \\ & -1 & 1 & 6 & \\ 1 & -1 & -6 & 0 & \end{array}$$

$$(t+1)(t^2 - t - 6) = 0$$

$$t+1=0 \quad \vee \quad t^2 - t - 6 = 0$$

$$t = -1$$

$$t = 3$$

$$t = -2$$

$$x^2 = -1$$

$$x^2 = 3$$

$$x^2 = -2$$

Αδυνατι

$$\boxed{x = \pm\sqrt{3}}$$

Αδυνατι

$$\textcircled{v} \quad 1 - \frac{2x-1}{x+2} = \frac{3x^2}{x^2-4} + \frac{3}{2-x}$$

$$1 - \frac{2x-1}{x+2} = \frac{3x^2}{(x-2)(x+2)} - \frac{3}{x-2}$$

$$\text{Εκπ} \frac{3}{(x-2)(x+2)}$$

Προσοψηρι

$$x \neq 2$$

$$x \neq -2$$

$$(x-2)(x+2) - (2x-1)(x-2) = 3x^2 - 3(x+2)$$

$$x^2 - 4 - (2x^2 - 4x - x + 2) = 3x^2 - 3x - 6$$

$$x^2 - 4 - 2x^2 + 4x + x - 2 = 3x^2 - 3x - 6$$

$$-x^2 + 5x - 6 = 3x^2 - 3x - 6 \quad (\Rightarrow) \quad 4x^2 - 8x = 0$$

$$4x(x-2) = 0$$

$$\boxed{x=0}$$

$$\boxed{x=2}$$

Άσκηση 33

Να λυθούν οι ανισώσεις

α. $x^2 - 2x - 3 \geq 0$

x	-1	3
$x^2 - 2x - 3$	$+$	$-$

$$x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$$

β. $4x^2 + 4x + 1 > 0$

x	$-\frac{1}{2}$
$4x^2+4x+1$	$+0+$

$$x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

γ. $x^2 - 3x + 4 \leq 0$

x	
$x^2 - 3x + 4$	+

Αδυνατά!

δ. $(x-2)(x^2 - 3x - 4)(x^2 + 6x + 9)(x^2 - x + 2) < 0$
(2) (4) (-1) (-3)

x	-3	-1	2	4	
$x-2$	-	-	-	+	+
x^2-3x-4	+	+	-	-	+
x^2+6x+9	+	+	+	+	+
x^2-x+2	+	+	+	+	+
$P(x)$	-	-	+	-	+

$$x \in (-\infty, -3) \cup (-3, -1) \cup (2, 4)$$

$$\textcircled{\varepsilon} \quad x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30 < 0$$

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & -3 & -15 & 19 & 30 & \textcircled{-1} \\ \downarrow & -1 & 4 & 11 & -30 & \\ 1 & -4 & -11 & 30 & 0 & \end{array}$$

$$\rightarrow (x+1)(x^3 - 4x^2 - 11x + 30) < 0$$

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & -4 & -11 & 30 & \textcircled{2} \\ \downarrow & 2 & -4 & -30 & \\ 1 & -2 & -15 & 0 & \end{array}$$

$$\rightarrow (x+1)(x-2)(x^2 - 2x - 15) < 0$$

$\textcircled{-1} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{5} \quad \textcircled{-3}$

x	-3	-1	2	5
$x+1$	-	- 0 +	+	+
$x-2$	-	-	- 0 +	+
$x^2-2x-15$	+ 0 -	-	- 0 +	+
$P(x)$	+	-	+	-

$$x \in (-3, -1) \cup (2, 5)$$

$$\textcircled{\gamma} \quad \frac{(x+2)(x^2-9)}{-x^2-2x+3} \geq 0$$

Βρίσκω τις ρίζες κάθε παραγοντα
και ψαχνω πινακακι.

x	-3	-2	1	3
x+2	-	0	+	+
x ² -9	+	0	-	+
-x ² -2x+3	-	0	+	-
P(x)	+	+	-	-

$$x \in (-\infty, -3) \cup (-3, -2] \cup (1, 3]$$

$$\textcircled{\eta} \quad \frac{x^3+6x^2-x}{x^2-x+3} < 2$$

Εδώ προχωρώ να κάνω
"χιαστί" αφού το

x^2-x+3 είναι θετική
ποσότητα αφού $\Delta < 0$
και $a > 0$

$$x^3+6x^2-x < 2(x^2-x+3)$$

$$x^3+6x^2-x < 2x^2-2x+6$$

$$x^3+4x^2+x-6 < 0$$

$$(x-1)(x^2+5x+6) < 0$$

$$x \in (-\infty, -3) \cup (-2, 1).$$

x	-3	-2	1
x-1	-	-	0
x ² +5x+6	+	0	+
P(x)	-	+	+

$$\textcircled{8} \quad \sqrt{2x+6} - \sqrt{9-x} \leq 0$$

Προση
 $2x+6 \geq 0$
 $x \geq -3$

$$\sqrt{2x+6} \leq \sqrt{9-x}$$

και

$$2x+6 \leq 9-x$$

$$9-x \geq 0$$

$$x \leq 9$$

$$3x \leq 3$$

$$\Leftrightarrow x \in [-3, 9]$$

$$x \leq 1 \quad \text{αρα} \quad x \in [-3, 1]$$

$$\textcircled{i} \quad \sqrt{x+10} \geq x-2$$

προση $x+10 \geq 0$
 $x \geq -10$

1. Αν $x-2 < 0$ δηλαδή $x < 2$

τότε η ανίσωση είναι αόριστη δηλαδή $x \in [-10, 2)$

2. Αν $x-2 \geq 0$ δηλαδή $x \geq 2$ τότε

$$x+10 \geq (x-2)^2 \Leftrightarrow x+10 \geq x^2-4x+4$$

$$0 \geq x^2-5x-6$$

*	-1 6
x^2-5x-6	+ 0 - 0 +

$$x \in [-1, 6]$$

$$\text{Συνολικά} \quad x \in [-10, 6]$$

$$\textcircled{1} \quad \sqrt{x+7} \leq x+1$$

$$\text{οπου } x+7 \geq 0$$

$$x \geq -7$$

$$x+7 \leq (x+1)^2$$

$$x+7 \leq x^2+2x+1$$

$$0 \leq x^2+x-6$$

x	-3	2
x^2+x-6	+	-
	+	-

$$x \in (-\infty, -3] \cup [2, +\infty)$$

και

$$x+1 \geq 0$$

$$x \geq -1$$

$$\text{αρα } x \geq -1$$

Συνολικη δεκτη ειναι $x \in [2, +\infty)$

$$\textcircled{2} \quad x \geq \frac{x+8}{x-1}$$

Εδω το $x-1$ δεν εχει

σταθμο προσημο συνολικη

δεν επιτρεπεται το "χιωσι"

$$\text{Ειναι } x - \frac{x+8}{x-1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-x}{x-1} - \frac{x+8}{x-1} \geq 0$$

$$\frac{x^2-x-x+8}{x-1} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-2x+8}{x-1} \geq 0$$

x	-2	1	4
x^2-2x+8	+	-	+
$x-1$	-	+	+
$P(x)$	-	+	+

$$x \in [-2, 1) \cup [4, +\infty)$$

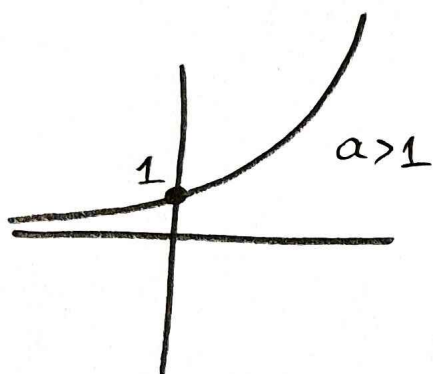
Εκθετική συνάρτηση

Η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = a^x$, $a \neq 1$, $a > 0$

λεγεται εκθετική με βάση το a .

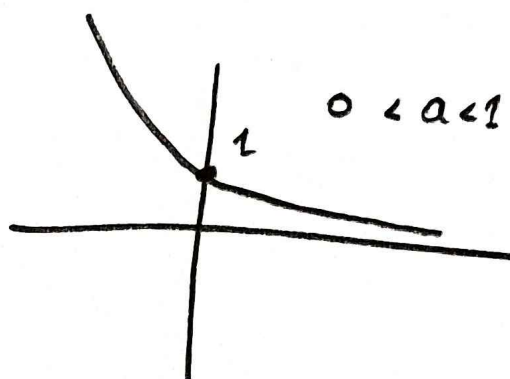
Υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

1.



- $D_f = \mathbb{R}$
- $f(x) > 0$ αφού $\Sigma T_f = (0, +\infty)$
- $f \uparrow$

2.



- $D_f = \mathbb{R}$
- $f(x) > 0$ αφού $\Sigma T_f = (0, +\infty)$
- $f \downarrow$

Προσοχή

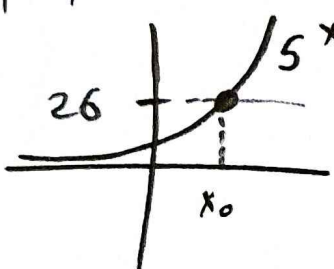
Η πιο σημαντική εκθετική συνάρτηση

είναι η $f(x) = e^x$ όπου $e \approx 2,7$

Λογαριθμοί

Εστω ότι θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $a^x = \theta$
Στις ευκολές περιπτώσεις τα πράγματα είναι απλά
π.χ $5^x = 25 \quad (\Rightarrow) x = 2$

Αν όμως θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση $5^x = 26$
τότε προφανώς η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα
αλλά ποια είναι αυτή;



Ορίζουμε λοιπόν ότι η λύση της
εξίσωσης $a^x = \theta$ είναι $x = \log_a \theta$

όπου $\theta > 0$ και $a \neq 1$
 $a > 0$

Βασικές ιδιότητες

1. $\log_a a^x = x$
2. $\log_a 1 = 0$
3. $a^{\log_a x} = x$
4. $\log_a a = 1$

Προσοχή

$$1. \log_a (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$$

$$2. \log_a (\theta^k) = k \log_a \theta$$

$$3. \log_a \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right) = \log_a \theta_1 - \log_a \theta_2$$

Προσοχή

Οι δύο πιο βασικοί λογαριθμοί είναι.

$$1. \log x = \log_{10} x$$

$$2. \ln x = \log_e x$$

Συνεπώς ισχύουν τα παρακάτω

$$\rightarrow \ln(\theta_1 \theta_2) = \ln \theta_1 + \ln \theta_2$$

$$\rightarrow \ln 1 = 0$$

$$\rightarrow \ln(\theta^k) = k \ln \theta$$

$$\rightarrow \ln e = 1$$

$$\rightarrow \ln \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right) = \ln \theta_1 - \ln \theta_2$$

$$\rightarrow \ln e^x = x$$

$$\rightarrow e^{\ln x} = x$$

Άσκηση 34

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{x+4}{2-x}\right)^x$

Να βρούμε το $x \in \mathbb{R} - \{2\}$ ώστε η $f(x)$ να είναι:

α) να έχει παρόμοιο πρόσημο το $\mathbb{R}$.

Προσέχουμε $\frac{x+4}{2-x} > 0$

$$x \in (-4, 2)$$

x	-4	2
$x+4$	$-$	$+$
$2-x$	$+$	$-$
$\frac{x+4}{2-x}$	$-$	$+$

β) να είναι εκθετική

προσέχουμε $\frac{x+4}{2-x} > 0$

$$x \in (-4, 2)$$

και $\frac{x+4}{2-x} \neq 1$

$$x+4 \neq 2-x$$

$$2x \neq -2$$

$$x \neq -1$$

Άρα $x \in (-4, -1) \cup (-1, 2)$

⑧ να είναι γενική αύξουσα

$$\text{πρέπει } \frac{\lambda+4}{2-\lambda} > 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad \frac{\lambda+4}{2-\lambda} - 1 > 0$$

$$(\Rightarrow) \frac{\lambda+4}{2-\lambda} - \frac{2-\lambda}{2-\lambda} > 0 \quad (\Rightarrow) \quad \frac{\lambda+4-2+\lambda}{2-\lambda} > 0$$

$$(\Rightarrow) \frac{2\lambda+2}{2-\lambda} > 0 \quad (\Rightarrow) \quad 2 \cdot \frac{\lambda+1}{2-\lambda} > 0$$

λ	-1	2
$\lambda+1$	-	+
$2-\lambda$	+	-
$P(\lambda)$	-	-

$$\lambda \in (-1, 2)$$

⑨ να είναι γενική φθίνουσα.

$$\text{πρέπει } 0 < \frac{\lambda+4}{2-\lambda} < 1$$

$$\text{προφανώς } \lambda \in (-4, -1).$$

Άσκηση 35

Να λύσουν οι εξισώσεις

$$\textcircled{\alpha} \quad 2^x = 32 \quad (\Rightarrow) \quad 2^x = 2^5 \quad (\Rightarrow) \quad \boxed{x=5}$$

$$\textcircled{\beta} \quad 7^{x^2-3x-10} = 1 \quad (\Rightarrow) \quad 7^{x^2-3x-10} = 7^0$$

$$(\Rightarrow) x^2 - 3x - 10 = 0 \quad (\Rightarrow) \quad \boxed{x=-2} \quad \vee \quad \boxed{x=5}$$

$$\textcircled{\gamma} \quad 9^{|x|-5} = \frac{1}{27} \quad (\Rightarrow) \quad 3^{2|x|-10} = 3^{-3} \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) \quad 2|x| - 10 = -3 \quad (\Rightarrow) \quad 2|x| = 7 \quad (\Rightarrow) \quad |x| = \frac{7}{2}$$

$$\boxed{x = \frac{7}{2}} \quad \vee \quad \boxed{x = -\frac{7}{2}}$$

$$\textcircled{\delta} \quad 5^{x+3} + 25 = 0 \quad (\Rightarrow) \quad 5^{x+3} = -25 \quad \text{αδυνατη!}$$

$$\textcircled{\epsilon} \quad 13^{x-1} = 0 \quad \text{αδυνατη!}$$

$$\textcircled{\zeta} \quad 7^{2x-5} - 7^{4-x} = 0 \quad (\Rightarrow) \quad 7^{2x-5} = 7^{4-x}$$

$$(\Rightarrow) \quad 2x - 5 = 4 - x \quad (\Rightarrow) \quad 3x = 9 \quad (\Rightarrow) \quad \boxed{x=3}$$

(ii) $3^{8-|x|} = 9^{|x|-2} \Rightarrow 3^{8-|x|} = 3^{2|x|-4}$

$$8 - |x| = 2|x| - 4 \quad (\Rightarrow) 12 = 3|x| \quad (\Rightarrow) |x| = 4 \quad (\Rightarrow) \boxed{|x| = 4}$$
$$\qquad\qquad\qquad \downarrow$$
$$\qquad\qquad\qquad \boxed{x = -4}$$

$$\textcircled{0} \quad 8^{x^2-x} = 4^{x^2+2} \quad (\Rightarrow) \quad 2^{3x^2-3x} = 2^{2x^2+4}$$

$$\Rightarrow 3x^2 - 3x = 2x^2 + 4 \quad \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$$

$$\textcircled{i} \left(\frac{1}{4}\right)^{x+5} = \sqrt{2}^{x-4} \quad \Rightarrow \quad 2^{-2x-10} = 2^{\frac{x-4}{2}}$$

$$\Rightarrow -2x - 10 = \frac{x-4}{2} \quad \Rightarrow -4x - 20 = x - 4$$

$$\Leftrightarrow -5x = 16 \quad \Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{16}{5}}$$

$$(1c) \quad 4^{x+1} - 9 \cdot 2^x + 2 = 0 \quad (\Rightarrow) \quad 4^x \cdot 4 - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$$

$$4 \cdot (2^x)^2 - 9 \cdot 2^x + 2 = 0$$

$$2^x = t$$

$$4t^2 - 9t + 2 = 0$$

$$t=2 \quad \text{vs} \quad t=\frac{1}{4}$$

$$2^x = 2$$

$$x=1$$

$$2^x = \frac{1}{4}$$

$$2^x = 2^{-2}$$

$$x = -2$$

$$\textcircled{1} \quad 3^x - 7 = \frac{63}{3^{x+1}} - 3^{3-2x}$$

$$3^x - 7 = \frac{63}{3 \cdot 3^x} - 3^3 \cdot 3^{-2x} \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) \quad 3 \cdot 3^{2x} - 21 \cdot 3^x = 63 - 3^4 \cdot 3^{-x}$$

$$3^{2x} - 7 \cdot 3^x = 21 - 3^3 \cdot 3^{-x}$$

$$3^{3x} - 7 \cdot 3^{2x} = 21 \cdot 3^x - 27$$

$$(3^x)^3 - 7 \cdot (3^x)^2 - 21 \cdot 3^x + 27 = 0$$

$$\boxed{3^x = t}$$

$$t^3 - 7t^2 - 21t + 27 = 0$$

$$(t-1)(t^2 - 6t - 27) = 0$$

$$t=1 \quad \vee \quad t=9 \quad \vee \quad t=-3$$

$$3^x = 1$$

$$3^x = 9$$

$$3^x = -3$$

$$\boxed{x=0}$$

$$\boxed{x=2}$$

Adwaru.

$$(14) \quad 9^{x+1} - 4^{x+2} = 44 \cdot 4^{x-1} + 3^{2x}$$

Αναλύω την κάθε δύναμη σε 3^x , 5^x ή 2^x
 ανα παράθεση

$$3^{2x+2} - 2^{2x+4} = 44 \cdot 2^{2x-2} + (3^x)^2$$

$$(3^x)^2 \cdot 9 - (2^x)^2 \cdot 16 = 44 \cdot (2^x)^2 \cdot \frac{1}{4} + (3^x)^2$$

$$9 \cdot (3^x)^2 - (3^x)^2 = 16 \cdot (2^x)^2 + 11 \cdot (2^x)^2$$

$$\text{ΘΕΤΩ } 3^x = a \quad \text{και } 2^x = b$$

$$9a^2 - a^2 = 16b^2 + 11b^2$$

$$8a^2 = 27b^2$$

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{27}{8} \quad \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{27}{8}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3^x}{2^x}\right)^2 = \frac{3^3}{2^3} \quad \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = \left(\frac{3}{2}\right)^3$$

$$2x = 3$$

$$\boxed{x = \frac{3}{2}}$$

$$\textcircled{v} \quad 4^{x+2} - 13 \cdot 6^x + 9^{x+2} = 0$$

$$2^{2x+2} - 13 \cdot 2^x \cdot 3^x + 3^{2x+2} = 0$$

$$4 \cdot (2^x)^2 - 13 \cdot 2^x \cdot 3^x + (3^x)^2 \cdot 9 = 0$$

$$\text{Set } 2^x = a \quad \text{and } 3^x = b$$

$$4a^2 - 13ab + 9b^2 = 0$$

$$4a^2 - 13ba + 9b^2 = 0$$

$$\Delta = (-13b)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9b^2$$

$$\Delta = 169b^2 - 144b^2 = 25b^2$$

$$a = \frac{13b \pm 5b}{8} \quad \begin{matrix} \nearrow \frac{18b}{8} \\ \searrow b \end{matrix}$$

$$\Rightarrow a = \frac{9b}{4} \quad \text{and} \quad a = b$$

$$\frac{a}{b} = \frac{9}{4}$$

$$\text{and} \quad 2^x = 3^x$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = 1$$

$$\boxed{x=0}$$

$$\boxed{x=2}$$

Asmon 36

Na jawab ol answer.

$$\textcircled{a} \quad 3^{12-5x} < 9 \quad (\Rightarrow) \quad 3^{12-5x} < 3^2 \quad (\Rightarrow) \quad 12-5x < 2$$

$$(\Rightarrow) \quad 10 < 5x \quad (\Rightarrow) \quad \boxed{x > 2}$$

$$\textcircled{b} \quad \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2-2x} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x+10}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2-4x} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-x+10}$$

$$2x^2-4x \leq x^2-x+10 \quad (\Rightarrow) \quad x^2-3x-10 \leq 0$$

x	-2	5
$x^2-3x-10$	+	+
	0	0
	-	+

$$x \in [-2, 5]$$

$$\textcircled{c} \quad e^{|2x-1|-5} \geq 1 \quad (\Rightarrow) \quad e^{|2x-1|-5} \geq e^0$$

$$|2x-1|-5 \geq 0 \quad (\Rightarrow) \quad |2x-1| \geq 5$$

$$2x-1 \geq 5 \quad \vee \quad 2x-1 \leq -5$$

$$2x \geq 6 \quad 2x \leq -4$$

$$x \geq 3 \quad x \leq -2$$

⑤ $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-9} < -1$ είναι αδύνατο γιατί
η "ποσοότητα" a^x είναι
θετική.

⑥ $5^{3-4x} \geq -25$ είναι αόριστη για τον
ίδιο λόγο.
 $x \in \mathbb{R}$.

$$\textcircled{7} \left(\frac{1}{27}\right)^{x^2-4x} - \left(\frac{1}{9}\right)^{x^2-3x-4} \geq 0$$

$$\left(\frac{1}{27}\right)^{x^2-4x} \geq \left(\frac{1}{9}\right)^{x^2-3x-4}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{3x^2-12x} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{2x^2-6x-8}$$

$$3x^2-12x \leq 2x^2-6x-8$$

$$x^2-6x+8 \leq 0$$

x	2	4
x^2-6x+8	+ 0 -	0 +

$$x \in (2, 4).$$

$$\textcircled{n} \quad 4 \cdot 2^{x-3} + \frac{16}{2^{x+2}} > 3$$

$$4 \cdot 2^x \cdot 2^{-3} + \frac{16}{2^x \cdot 2^2} > 3 \quad (\Rightarrow) \quad \frac{4}{8} \cdot 2^x + \frac{4}{2^x} > 3$$

$$\text{ОСТН} \quad 2^x = a, \quad a > 0$$

$$\frac{1}{2}a + \frac{4}{a} > 3 \quad (\Rightarrow) \quad \frac{1}{2}a^2 + 4 > 3a$$

$$(\Rightarrow) a^2 - 6a + 8 > 0$$

a	2	4
$a^2 - 6a + 8$	+ 0 -	- 0 +

$$a < 2 \quad \vee \quad a > 4$$

$$2^x < 2 \quad \vee \quad 2^x > 4$$

$$x < 1 \quad \vee \quad x > 2$$

$$x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$$

$$\textcircled{a} \quad 2^{x-1} - 15 \cdot 3^{x-6} \leq 4 \cdot 2^{x-5} + 3^{x-4}$$

$$2^x \cdot 2^{-1} - 15 \cdot 3^x \cdot 3^{-6} \leq 4 \cdot 2^x \cdot 2^{-5} + 3^x \cdot 3^{-4}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2^x - \frac{15}{729} \cdot 3^x \leq \frac{4}{32} \cdot 2^x + 3^x \cdot \frac{1}{81}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2^x - \frac{5}{243} \cdot 3^x \leq \frac{1}{8} \cdot 2^x + 3^x \cdot \frac{1}{81}$$

$$\begin{array}{l} \text{ОСТН} \\ 2^x = a \\ 3^x = b \end{array}$$

$$\frac{1}{2}a - \frac{1}{8}a \leq \frac{5}{243}b + \frac{1}{81}b \quad (\Rightarrow) \quad \frac{3}{8}a \leq \frac{8}{243}b$$

$$\frac{1}{64} 2^x \leq \frac{1}{729} 3^x \quad (\Rightarrow) \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x \leq \frac{64}{729} \quad (\Rightarrow) \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x \leq \left(\frac{2}{3}\right)^6 \quad (\Rightarrow) \quad x \geq 6$$

$$① \quad 5 \cdot 9^x < 2 \cdot 4^x + 3 \cdot 6^x$$

$$5 \cdot (3^x)^2 < 2 \cdot (2^x)^2 + 3 \cdot (2^x)(3^x)$$

$$5b^2 < 2a^2 + 3ab$$

$$\begin{cases} \text{ΘΕΤΩ } 2^x = a \\ 3^x = b \end{cases}$$

$$2a^2 + 3ab - 5b^2 > 0$$

$$\Delta = 9b^2 + 40b^2 = 49b^2$$

$$a = \frac{-3b \pm 7b}{4}$$

$$\begin{aligned} &\swarrow b \quad \Leftrightarrow a = b \\ &\searrow -\frac{10b}{4} \quad \Leftrightarrow a = -\frac{10}{4}b \end{aligned}$$

$$2(a-b)\left(a + \frac{10}{4}b\right) > 0$$

$$2(2^x - 3^x)\left(2^x + \frac{10}{4}3^x\right) > 0$$

⊕

$$\Leftrightarrow 2^x - 3^x > 0 \Rightarrow 2^x > 3^x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x > 1 \Rightarrow \underline{\underline{x < 0}}$$

$$② \quad (x^2 - 2x - 3)(e^x - 1)(2^x - 8)\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x - \frac{4}{9}\right) \geq 0$$

x	-1	0	2	3
$x^2 - 2x - 3$	+ 0 -	-	- 0 +	
$e^x - 1$	-	- 0 +	+	+
$2^x - 8$	-	-	- 0 +	
$\left(\frac{2}{3}\right)^x - \frac{4}{9}$	+	+	+	0 -
$P(x)$	+	-	+	-

$$x \in (-\infty, -1] \cup [0, 2]$$

Άσκηση 37

Να λυθούν τα συστήματα

$$\textcircled{a} \begin{cases} 8^{x-y} \cdot 4^{2y-1} = 4 \cdot 2^x \\ 100^{x-2} = 10 \cdot 100^{x+y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^{3x-3y} \cdot 2^{4y-2} = 4 \cdot 2^x \\ 10^{3x-6} = 10 \cdot 10^{2x+2y} \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} 2^{3x+y-2} = 2^{x+2} \\ 10^{3x-6} = 10^{2x+2y+1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x+y-2 = x+2 \\ 3x-6 = 2x+2y+1 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} 2x+y = 4 \\ x-2y = 7 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} 2x+y = 4 \\ -2x+4y = -14 \end{cases} \quad \textcircled{+}$$

$$5y = -10 \quad (\Rightarrow) \quad \boxed{y = -2} \quad \boxed{x = 3}$$

$$\textcircled{b} \begin{cases} 2^{x+1} - 15 \cdot 3^{y-1} = 3 \\ 2^{x+2} - 3^{y+1} = 13 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} 2 \cdot 2^x - 15 \cdot 3^y \cdot \frac{1}{3} = 3 \\ 2^x \cdot 4 - 3^y \cdot 3 = 13 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 2^x = a \\ (\Rightarrow) \\ 3^y = b \end{matrix} \quad \begin{cases} 2a - 5b = 3 \\ 4a - 3b = 13 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{matrix} a = 4 \\ b = 1 \end{matrix} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{matrix} 2^x = 4 & \boxed{x = 2} \\ 3^y = 1 & \boxed{y = 0} \end{matrix}$$

$$\textcircled{8} \begin{cases} 2^x = 3y & (\Rightarrow) y = \frac{1}{3} 2^x \\ y \cdot 3^x = 12 \end{cases}$$

$$\frac{1}{3} \cdot 2^x \cdot 3^x = 12 \quad (\Rightarrow) 6^x = 36 \quad (\Rightarrow) \boxed{x=2}$$

$$\boxed{y = \frac{4}{3}}$$

$$\textcircled{8} \begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 108 \\ 2^y \cdot 3^x = 72 \end{cases}$$

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη

$$2^x 3^y \cdot 2^y 3^x = 108 \cdot 72$$

$$2^{x+y} \cdot 3^{x+y} = 3 \cdot 36 \cdot 2 \cdot 36$$

$$6^{x+y} = 6 \cdot 36^2$$

$$6^{x+y} = 6 \cdot 6^4$$

$$6^{x+y} = 6^5$$

$$\boxed{x+y=5}$$

Εάν διαιρέσουμε κατά μέλη

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^y = \frac{108}{72}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{36}{24} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x-y=-1}$$

$$\text{Αρα } \underline{x=2} \quad \underline{y=3}$$

Άσκηση 38

Ένα ραδιενεργό υλικό διασπάζεται σύμφωνα με το νόμο της εκθετικής αποσβέσης. Ο χρόνος ημίωσης του υλικού αυτού είναι 3 χρόνια.

α) Νόο η ποσότητα $Q(t)$ του υλικού που απομένει μετά από t χρόνια είναι

$$Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{3}}$$

Γενικά η ποσότητα $Q(t)$ του ραδιενεργού υλικού μετά από t χρόνια είναι $Q(t) = Q_0 e^{ct}$ όπου Q_0 η αρχική ποσότητα τη στιγμή $t=0$

Αφού ο χρόνος ημίωσης είναι 3 χρόνια

$$\text{τότε } Q(3) = \frac{Q(0)}{2} \quad (\Rightarrow) \quad Q(0) \cdot e^{3c} = \frac{Q(0)}{2}$$

$$(\Rightarrow) e^{3c} = \frac{1}{2} \quad (\Rightarrow) (e^c)^3 = \frac{1}{2} \quad (\Rightarrow) e^c = \sqrt[3]{\frac{1}{2}} \quad (\Rightarrow) e^c = 2^{-\frac{1}{3}}$$

$$\text{Άρα } Q(t) = Q_0 e^{ct} \quad (\Rightarrow) \quad Q(t) = Q_0 (e^c)^t \quad (\Rightarrow) \quad Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{3}}$$

② Αν αρχικά υπήρχαν 8 kg ραδίου-226 υλικού, να βρούμε μετά από πόσα χρόνια θα έχουμε απομείνει 250 g .

$$\text{Είναι } 250 = 8000 \cdot 2^{-\frac{t}{5}} \quad (\Rightarrow) 2^{\frac{t}{5}} = 32$$

$$(\Rightarrow) 2^{\frac{t}{5}} = 2^5 \quad (\Rightarrow) \frac{t}{5} = 5 \quad (\Rightarrow) t = 15$$

Μετά από 15 χρόνια.

Άσκηση 39

Εστω η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$.

α) Να μελετηθεί η $f(x)$ ως προς τη μονοτονία

$$D_f = \mathbb{R}.$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \\ \bullet x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \end{array} \right\} \oplus \quad \begin{array}{l} e^{x_1} + x_1 - 1 < e^{x_2} + x_2 - 1 \\ f(x_1) < f(x_2) \end{array}$$

β) Βρίτ το $f(0)$ και λύσε την εξίσωση $f(x) = 0$ $f \nearrow$

$$f(0) = e^0 + 0 - 1 = 0$$

$$\text{Είναι } f(x) = 0 \quad (\Rightarrow) \quad f(x) = f(0) \quad (\Rightarrow) \quad \boxed{x = 0}$$

γ) Να λύσει η ανίσωση $e^x + x < 1$

$$e^x + x < 1 \quad (\Rightarrow) \quad e^x + x - 1 < 0 \quad (\Rightarrow) \quad f(x) < 0$$

$$f(x) < f(0) \quad (\stackrel{f \nearrow}{\Rightarrow}) \quad x < 0$$

δ) Αν $a < b$ νδσ $e^a - e^b < b - a$

$$\text{Είναι } a < b \quad (\Rightarrow) \quad f(a) < f(b) \quad (\Rightarrow) \quad e^a + a - 1 < e^b + b - 1$$

$$\Rightarrow e^a + a < e^b + b \quad (\Rightarrow) \quad e^a - e^b < b - a.$$

Άσκηση 40

Να υπολογιστούν οι παρακάτω παραστάσεις

$$\begin{aligned}\textcircled{a} \log_4 \frac{1}{32} &= \log_4 1 - \log_4 32 = -\log_4 2^5 = -\log_4 2^{2 \cdot \frac{5}{2}} = \\ &= -\log_4 4^{\frac{5}{2}} = -\frac{5}{2}\end{aligned}$$

$$\textcircled{b} \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{27} = \log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3^3} = \log_{\frac{1}{3}} 3^{\frac{3}{2}} = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}$$

$$\textcircled{c} \log_7 7 = 1$$

$$\textcircled{d} \log_3 9^{15} = \log_3 (3^2)^{15} = \log_3 3^{30} = 30$$

$$\textcircled{e} \log_5 \sqrt{5} = \log_5 5^{1/2} = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{f} \log_{13} 1 = 0$$

$$\textcircled{g} 5^{\log_5 3} = 3$$

$$\textcircled{h} \log 10 = 1$$

$$\textcircled{i} \log 10.000 = \log 10^4 = 4$$

$$\textcircled{k} \log (\ln e^{100}) = \log(100) = \log 10^2 = 2$$

$$\textcircled{l} \log 20 + \log 50 = \log (20 \cdot 50) = \log(1000) = \\ = \log 10^3 = 3$$

$$\textcircled{m} \ln(e^4 - e^3) - \ln(e - 1) = \ln(e^3(e - 1)) - \ln(e - 1) \\ = \ln \frac{e^3(e - 1)}{e - 1} = \ln e^3 = 3$$

$$\textcircled{n} 2 \log 5 + \frac{1}{2} \log 16 = \log 5^2 + \log 16^{1/2} = \log 25 + \log 4 \\ = \log 100 = 2.$$

$$\textcircled{o} \frac{\ln 25 - \log 9}{\ln \sqrt{5} - \log \sqrt{3}} = \frac{2 \ln 5 - 2 \log 3}{\frac{1}{2} \ln 5 - \frac{1}{2} \log 3} = \\ = \frac{2(\ln 5 - \log 3)}{\frac{1}{2}(\ln 5 - \log 3)} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4.$$

$$\textcircled{p} \frac{2 - \log 4}{\frac{1}{2} + \log \sqrt{\frac{5}{2}}} = \frac{\log 10^2 - \log 4}{\log 10^{1/2} + \log \sqrt{\frac{5}{2}}} = \frac{\log \frac{100}{4}}{\log \sqrt{10} \sqrt{\frac{5}{2}}} \\ = \frac{\log 25}{\log 25} = 1.$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{n} \quad & \frac{1 + 4 \log 2 - 3 \log 4 + \frac{1}{3} \log 8}{\log 75 - 2 \log \sqrt{3}} = \\
 & = \frac{\log 10 + \log 16 - \log 64 + \log 2}{\log 75 - \log 3} = \frac{\log 160 - \log 32}{\log 25} \\
 & = \frac{\log 5}{\log 25} = \frac{\log 5}{2 \log 5} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{p} \quad & e^{\frac{1}{2} \ln 9 - \frac{2}{3} \ln 8 + \ln 12} = e^{\ln 3 - \ln 8^{2/3} + \ln 12} \\
 & = e^{\ln 3 - \ln 2^{3 \cdot \frac{2}{3}} + \ln 12} = e^{\ln 3 - \ln 4 + \ln 12} = \\
 & = e^{\ln 3 - \ln \frac{1}{3}} = e^{\ln \frac{3}{1/3}} = e^{\ln 9} = 9.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{r} \quad & \frac{\log^2 20 - \log^2 5}{\log \sqrt{2}} = \frac{(\log 20 - \log 5)(\log 20 + \log 5)}{\log \sqrt{2}} \\
 & = \frac{\log 4 \log 100}{\log \sqrt{2}} = \frac{\log 4 \cdot 2 \log 10}{\log 2^{1/2}} \\
 & = \frac{2 \log 2 \cdot 2}{\frac{1}{2} \log 2} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8.
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{7} \log_2 6 - \log_4 9 = \log_2 6 - \frac{\log_2 9}{\log_2 4} =$$

Тунд агаард
Багас $\therefore \log_B 9 = \frac{\log_a 9}{\log_a B}$

$$= \log_2 6 - \frac{\log_2 9}{2 \log_2 2} = \frac{2 \log_2 6 - \log_2 9}{2}$$

$$= \frac{\log_2 36 - \log_2 9}{2} = \frac{\log_2 4}{2} = \frac{2 \log_2 2}{2} = 1$$

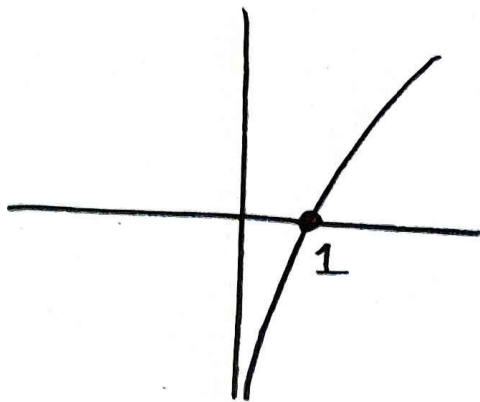
$$\textcircled{8} \frac{\log 45}{\log 3} - \frac{\log 5}{\log 3} = \frac{\frac{\log 45}{\log 10}}{\frac{\log 3}{\log 10}} - \frac{\log 5}{\log 3} =$$

$$= \frac{\log 45}{\log 3} - \frac{\log 5}{\log 3} = \frac{\log 45 - \log 5}{\log 3} = \frac{\log 9}{\log 3}$$

$$= \frac{2 \log 3}{\log 3} = 2.$$

Η λογαριθμική συνάρτηση

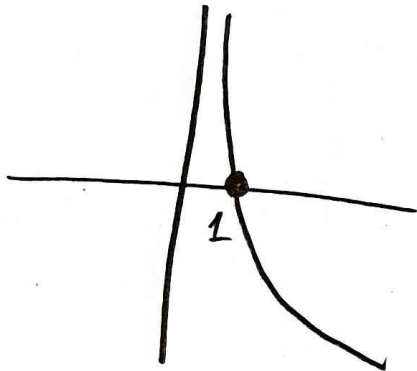
1.



$$f(x) = \log_a x \quad \text{όπου } a > 1$$

- $D_f = (0, +\infty)$
- $\Sigma T_f = \mathbb{R}$
- $f \nearrow$

2.



$$f(x) = \log_a x \quad \text{όπου } 0 < a < 1$$

- $D_f = (0, +\infty)$
- $\Sigma T_f = \mathbb{R}$
- $f \searrow$

Βασική πρόταση

$$1. \log_a \theta_1 = \log_a \theta_2 \quad (\Rightarrow) \quad \theta_1 = \theta_2$$

Βασικές λογαριθμικές συναρτήσεις

$$1. f(x) = \log x$$

$$2. f(x) = \ln x$$

Άσκηση 41

Να εξετάσεις αν οι συναρτήσεις είναι
αρτίς ή περιττές.

α) $f(x) = x \cdot \log\left(\frac{2-x}{x+2}\right)$

πρέπει $\frac{2-x}{x+2} > 0$

x	-2	2
2-x	+	+
x+2	-	+
p(x)	-	+

$x \in (-2, 2)$

δηλαδή $D_f = (-2, 2)$ σύμφωνα το πεδίο ορισμού
είναι συμμετρικό.

$$\begin{aligned} f(-x) &= -x \log\left(\frac{2+x}{2-x}\right) = -x \log\left(\frac{2-x}{x+2}\right)^{-1} = \\ &= x \log \frac{2-x}{x+2} = f(x) \text{ άρτις.} \end{aligned}$$

β) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

πρέπει $x^2+1 \geq 0$
που είναι!

και $x + \sqrt{x^2+1} > 0$

$$\sqrt{x^2+1} > -x$$

• αν $x \geq 0$ τότε αβρίσκει δηλαδή

$x \in [0, \infty)$

• αν $x < 0$ τότε

$$x^2+1 > x^2 \Leftrightarrow 1 > 0 \text{ που ισχύει.}$$

$x \in (-\infty, 0)$ άρα $D_f = \mathbb{R}$.

$$f(-x) = \ln(-x + \sqrt{(-x)^2 + 1}) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

$$= \ln \left[\frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \right] =$$

$$= \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1}^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \right) = \ln \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} =$$

$$= \ln 1 - \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) = -f(x) \text{ и факт.}$$

Άσκηση 42

Να λύσουμε οι εξισώσεις

α) $\log(|2x-5|-15) = 2$

πρέπει $|2x-5|-15 > 0$

$\log(|2x-5|-15) = \log 10^2$

$$|2x-5|-15 = 100 \quad (\Rightarrow) |2x-5| = 115$$

$$2x-5 = 115$$

$$\vee \quad 2x-5 = -115$$

$$2x = 120$$

$$2x = -110$$

$$\boxed{x=60} \quad \checkmark$$

$$\boxed{x=-55} \quad \checkmark$$

β) $\ln(x^2-4x+4) = 0$

πρέπει $x^2-4x+4 > 0$

$$\ln(x^2-4x+4) = \ln 1$$

$$(\Rightarrow) x^2-4x+4 = 1$$

$$x^2-4x+3 = 0$$

$$\boxed{x=1} \quad \checkmark$$

$$\boxed{x=3} \quad \checkmark$$

$$\textcircled{7} \quad \ln(3x-1) = \ln(9-x^2)$$

$$\downarrow \quad \text{при } 3x-1 > 0 \quad \text{и} \quad 9-x^2 > 0$$

$$3x-1 = 9-x^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0$$

$$\boxed{x=2}$$

✓

$$\boxed{x=-5}$$

✗

$$\textcircled{8} \quad \log(x+8) + \log(8-x) = 1 + \log(x+4)$$

$$\log(x+8)(8-x) = \log 10 + \log(x+4)$$

$$\log[(x+8)(8-x)] = \log 10(x+4)$$

$$(x+8)(8-x) = 10(x+4)$$

$$8x - x^2 + 64 - 8x = 10x + 40$$

$$x^2 + 10x - 24 = 0$$

$$\boxed{x=2}$$

✓

$$\boxed{x=-12}$$

✗

$$\textcircled{\varepsilon} \quad \frac{\log x + 3}{\log x} + \frac{\log x^2 - 3}{\log x - 2} = 5$$

$$\frac{\log x + 3}{\log x} + \frac{2 \log x - 3}{\log x - 2} = 5$$

$$\boxed{\log x = t}$$

$$\frac{t+3}{t} + \frac{2t-3}{t-2} = 5$$

$$(t+3)(t-2) + t(2t-3) = 5t(t-2)$$

$$t^2 - 2t + 3t - 6 + 2t^2 - 3t = 5t^2 - 10t$$

$$3t^2 - 2t - 6 = 5t^2 - 10t$$

$$0 = 2t^2 - 8t + 6$$

$$0 = t^2 - 4t + 3$$

$$t=1 \quad t=3$$

$$\log x = 1$$

$$\log x = 3$$

$$\boxed{x=10}$$

✓

$$\boxed{x=1000}$$

✓

εδω ενρση

$$x > 0, \log x \neq 0, \log x - 2 \neq 0$$

$$\textcircled{I} \quad \log^2 x^2 + \log x^4 - 8 = 0$$

$$\text{прим } x^2 > 0$$

$$\Rightarrow x \neq 0$$

$$[\log x^2]^2 + 4 \log x - 8 = 0$$

$$\text{или } x^4 > 0$$

$$\Rightarrow x \neq 0$$

$$[2 \log x]^2 + 4 \log x - 8 = 0$$

$$4 \log^2 x + 4 \log x - 8 = 0$$

$$\log^2 x + \log x - 2 = 0$$

$$\boxed{\log x = t}$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$t = -2 \quad \text{или} \quad t = 1$$

$$\log x = -2$$

$$\log x = 1$$

$$\boxed{x = 10}$$

$$x = 10^{-2} \quad \text{и} \quad \boxed{x = \frac{1}{100}}$$

$$\textcircled{II} \quad 2^{x+4} = 5^{2-x}$$

$$\log 2^{x+4} = \log 5^{2-x}$$

$$\Rightarrow (x+4) \log 2 = (2-x) \log 5$$

$$x \log 2 + 4 \log 2 = 2 \log 5 - x \log 5$$

$$x(\log 2 + \log 5) = 2 \log 5 - 4 \log 2$$

$$x \log 10 = \log 25 - \log 16 \quad \Rightarrow \boxed{x = \log \frac{25}{16}}$$

$$\textcircled{e} \quad x^{\log x} = \sqrt{10x}$$

нрину $x > 0$ или $x \geq 0$

Апа $x \in (0, +\infty)$.

$$\log x^{\log x} = \log \sqrt{10x}$$

$$\log x \cdot \log x = \log \sqrt{10} \sqrt{x} \quad (\Rightarrow) \log^2 x = \log 10^{1/2} + \log x^{1/2}$$

$$(\Rightarrow) \log^2 x = \frac{1}{2} \log 10 + \frac{1}{2} \log x \quad (\Rightarrow)$$

$$2 \log^2 x - \log x - 1 = 0$$

$$\boxed{\log x = t}$$

$$2t^2 - t - 1 = 0$$

$$t = 1 \quad \text{и} \quad t = -\frac{1}{2}$$

$$\log x = 1$$

$$\log x = -\frac{1}{2}$$

$$\boxed{x = 10}$$

$$x = 10^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{и} \quad \boxed{x = \frac{1}{\sqrt{10}}}$$

$$\textcircled{i} \quad (x^2 - 3x + 1)^{3x-5} = 1$$

$$\ln (x^2 - 3x + 1)^{3x-5} = \ln 1 \quad (\Rightarrow) (3x-5) \ln (x^2 - 3x + 1) = 0$$

$$3x-5=0$$

и

$$x^2 - 3x + 1 = 1$$

$$\boxed{x = \frac{5}{3}}$$

$$x^2 - 3x = 0$$

$$\boxed{x = 0}$$

$$\boxed{x = 3}$$

Asignu 43

Na zodow ol answeru!

$$\textcircled{a} \log(2x+4) < \log(13-x)$$

$$\text{pricu } 2x+4 > 0 \\ x > -2$$

$$2x+4 < 13-x$$

ku

$$13-x > 0$$

$$3x < 9$$

$$x < 13$$

$$x < 3$$

$$\text{apa } x \in (-2, 13)$$



$$x \in (-2, 3)$$



$$\textcircled{b} \log(x-20) < 2$$

$$\text{pricu } x-20 > 0 \\ x > 20$$

$$\log(x-20) < \log 10^2$$

$$x-20 < 100$$

$$x < 120$$

$$\text{apa } x \in (20, 120)$$

$$\textcircled{c} \ln(|x|-3) < 0$$

$$\ln(|x|-3) < \ln 1$$

$$|x|-3 < 1$$

$$|x| < 4$$

$$x \in (-4, 4)$$

$$\textcircled{d} \log(7-x) \geq 1 - \log x$$

$$7-x > 0 \Leftrightarrow x < 7$$

$$\text{sau } x > 0$$

$$\log(7-x) \geq \log 10 - \log x$$

$$\text{apa } x \in (0, 7)$$

$$\log(7-x) \geq \log\left(\frac{10}{x}\right)$$

$$7-x \geq \frac{10}{x} \quad (\Leftrightarrow) \quad 7x - x^2 \geq 10$$

$$0 \geq x^2 - 7x + 10$$

x	2	5
$x^2 - 7x + 10$	+ 0 - 0 +	

$$x \in [2, 5]$$

$$\textcircled{e} (\log x)^2 - \log x^2 \geq 3$$

$$\log^2 x - 2 \log x - 3 \geq 0$$

$$\text{apoiu } x > 0$$

$$\text{Osetu } \log x = t$$

$$t^2 - 2t - 3 \geq 0$$

t	-1	3
$t^2 - 2t - 3$	+ 0 - 0 +	

$$t \leq -1$$

$$\text{si } t \geq 3$$

$$\log x \leq -1$$

$$\log x \geq 3$$

$$x \leq \frac{1}{10}$$

$$x \geq 1000$$

$$\text{apa } x \in (0, \frac{1}{10}] \cup [1000, +\infty).$$

$$(5) \quad x^{2-\ln x} \geq \frac{1}{e^{15}} \quad \text{при } x > 0$$

$$\ln x^{2-\ln x} \geq \ln \frac{1}{e^{15}}$$

$$\Leftrightarrow (2-\ln x) \ln x \geq \ln 1 - \ln e^{15}$$

$$\Leftrightarrow 2 \ln x - \ln^2 x \geq -15$$

$$\ln x = t$$

$$2t - t^2 \geq -15$$

$$t^2 - 2t - 15 \leq 0$$

t	-3	5
$t^2 - 2t - 15$	+ 0	- 0 +

$$-3 \leq t \leq 5$$

$$-3 \leq \ln x \leq 5$$

$$\frac{1}{e^3} \leq x \leq e^5$$

Άσκηση 44

Να λυθούν τα συστήματα.

$$\textcircled{a} \quad \begin{cases} \log(20x+10y)=2 \\ \log(x+1)+\log y=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \log(20x+10y) = \log 10^2 \\ \log((x+1)y) = \log 10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 20x+10y=100 \\ y(x+1)=10 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \begin{cases} 2x+y=10 \\ yx+y=10 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \boxed{y=10-2x}$$

$$\text{Αρα} \quad (10-2x)x + 10-2x = 10$$

$$10x - 2x^2 - 2x = 0 \quad (\Rightarrow) \quad -x^2 - x + 5x = 0$$

$$-x^2 + 4x = 0 \quad (\Rightarrow) \quad -x(x-4) = 0$$

$$\boxed{x=0}$$

$$\boxed{x=4}$$

$$\boxed{y=10}$$

$$\boxed{y=2}$$

$$\textcircled{B} \begin{cases} \log x^2 - \log y^4 = -10 \\ \log^2 x + \log^2 y = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\log x - 4\log y = -10 \\ \log^2 x + \log^2 y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \log x = a \\ \log y = b \end{array}$$

$$\begin{cases} 2a - 4b = -10 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \begin{cases} a - 2b = -5 \quad (\Rightarrow) a = 2b - 5 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases} \quad \checkmark$$

$$(2b - 5)^2 + b^2 = 5$$

$$4b^2 - 20b + 25 + b^2 = 5$$

$$5b^2 - 20b + 20 = 0 \quad (\Rightarrow) \quad b^2 - 4b + 4 = 0$$

$$(b - 2)^2 = 0$$

$$b = 2 \quad \text{car} \quad a = -1$$

$$\text{apa} \quad \log x = -1$$

$$\text{car} \quad \log y = 2$$

$$\boxed{x = \frac{1}{10}}$$

$$\boxed{y = 100}$$

$$\textcircled{8} \begin{cases} x^{\log y} = \frac{1}{100} \\ 2^{\log y} \cdot 4^{\log x} = 1 \end{cases} \quad (\Rightarrow)$$

$$(\Rightarrow) \begin{cases} \log x^{\log y} = \log \frac{1}{100} \\ 2^{\log y} + 2^{2\log x} = 1 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \begin{cases} \log y \cdot \log x = -2 \\ 2^{\log y + 2\log x} = 2^0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log y \cdot \log x = -2 \\ \log y + 2\log x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \log x &= a \\ \log y &= b \end{aligned}$$

$$\begin{cases} ab = -2 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \boxed{b = -2a}$$

$$a(-2a) = -2$$

$$-2a^2 = -2 \quad (\Rightarrow) a^2 = 1$$

$$\begin{aligned} &\rightarrow a = 1 \quad (\Rightarrow) b = -2 \\ &\rightarrow a = -1 \quad (\Rightarrow) b = 2 \end{aligned}$$

Apa $\log x = 1$ kai $\log y = -2$ ' $\log x = -1$ kai $\log y = 2$

$$\boxed{x = 10}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{100}}$$

$$\text{ ' } \boxed{x = \frac{1}{10}}$$

$$\boxed{y = 100}$$

Άσκηση 45

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - \log x$

α) Να βρεθεί η f ↓

$$D_f = (0, +\infty)$$

$$\bullet x_1 < x_2 \quad (\Rightarrow) \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} \quad (+)$$

$$\bullet x_1 < x_2 \quad (\Rightarrow) \log x_1 < \log x_2 \quad (\Rightarrow) -\log x_1 > -\log x_2$$

↓

β) Να βρεθεί η συνάρτηση

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2+3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+12} < \log \frac{2x^2+3}{x^2+12}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2+3} - \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+12} < \log(2x^2+3) - \log(x^2+12)$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2+3} - \log(2x^2+3) < \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+12} - \log(x^2+12)$$

$$f(2x^2+3) < f(x^2+12)$$

↓

$$2x^2+3 > x^2+12 \quad (\Rightarrow) x^2 - 9 > 0 \quad x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$$

Άσκηση 46

α) Να λυθεί η εξίσωση $2^{x-8} = 5 - \log x$

$$2^{x-8} - 5 + \log x = 0$$

Θεωρώ συνάρτηση $f(x) = 2^{x-8} - 5 + \log x$

$$D_f = (0, +\infty).$$

$$\bullet x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1 - 8 < x_2 - 8 \quad (\Rightarrow) \quad 2^{x_1-8} < 2^{x_2-8}$$
$$2^{x_1-8} - 5 < 2^{x_2-8} - 5$$

$$\bullet x_1 < x_2 \quad (\Rightarrow) \quad \log x_1 < \log x_2 \quad \xrightarrow{\textcircled{+}} \quad f \nearrow$$

→ Η εξίσωση γίνεται $f(x) = 0$

η οποία αφού η f είναι γνησίως αύξουσα

έχει το πολύ μία λύση. Την $x = 10$.

Ⓑ Να λυθεί η ανίσωση $\ln x < \frac{1}{x} - 1$

Είναι $\ln x - \frac{1}{x} + 1 < 0$

Θεωρώ συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + 1$.

$$D_f = (0, +\infty)$$

• $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \ln x_1 < \ln x_2$

• $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow -\frac{1}{x_1} < -\frac{1}{x_2} \quad] \oplus$

$$-\frac{1}{x_1} + 1 < -\frac{1}{x_2} + 1$$

$f \nearrow$

Η ανίσωση γίνεται

$$f(x) < 0$$

$$f(x) < f(1)$$

$f \nearrow$

$$x < 1$$