

Παύλος Σεικας
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ



ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της τότε είναι και συνεχής στο x_0 .

(7 μονάδες)

A2. Πότε μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$;

(4 μονάδες)

A3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα της Μέσης Τιμής και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.

(4 μονάδες)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις με την ένδειξη *Σωστό* ή *Λάθος*:

- i. Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, τότε η f είναι σταθερή στο $\mathbb{R}^*$.
- ii. Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μία ρίζα το πολύ στο $\mathbb{R}$.
- iii. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, τότε η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , $x_0 \in A_f$.
- iv. Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στην περιοχή του x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, τότε ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
- v. Αν f, g παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο x_0 τότε:
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f(x_0)g'(x_0) - f'(x_0)g(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x + x^2 - 3x + 3$, $x > 0$.

B1. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$.

(5 μονάδες)

B2. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 + 1) = f(5)$.

(4 μονάδες)

B3. Να λύσετε την ανίσωση $f(1 - x) < f(2)$, για $x < 0$.

(4 μονάδες)

B4. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{(x-1)(f(x)-1)}$

(4 μονάδες)

B5. Αν επιπλέον δίνεται η συνάρτηση g η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ με

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) + 3x^2}{x+1} = -4$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $N(-1, g(-1))$.

(4 μονάδες)

B6. Έστω G μία παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $(0, +\infty)$ με $G'(x) = f(x)$. Να δείξετε ότι $2G(x) - G(x-1) < G(x+1)$, για κάθε $x > 2$.

(4 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

- $f\left(\frac{x}{e}\right) \leq \ln x$, $x > 0$.
- $-f\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \leq \ln x$, $x > 0$.

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x + 1$, $x > 0$ και στη συνέχεια να μελετήσετε τη συνάρτηση f και τη συνάρτηση f' ως προς τη μονοτονία.

(5 μονάδες)

Γ2. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x}$, $x > 0$. Να μελετήσετε τη g ως προς τη μονοτονία.

(5 μονάδες)

Γ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(1+e^x)-f(e^x)}{f(1+\frac{1}{x})-f(\frac{1}{x})} = xe^x, x > 0$, έχει μοναδική λύση στο $(0, +\infty)$.

(5 μονάδες)

Γ4. Έστω T το εμβαδόν του τριγώνου AOB , με $O(0, 0)$, $A(x, 0)$ και $B(0, f(x))$, $x > 1$. Το x μεταβάλλεται με ρυθμό 2cm/sec . Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του T όταν $x=4\text{cm}$.

(5 μονάδες)

Γ5. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{f(e^{x^2})}$.

(5 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ώστε $f(1)=1$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει:
 $f'(x) \cdot f(x) > (f'(x))^2 \geq 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x) > 0$, για κάθε $x > 0$.

(5 μονάδες)

Δ2. Έστω $g(x) = \ln f(x)$, $x > 0$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

(5 μονάδες)

Δ3. Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln\left(\frac{f(a+x)}{f(a)}\right)^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}$, $a > 0$

(5 μονάδες)

Δ4. Δίνεται η συνάρτηση $F(x) = \frac{f^2(x)}{f(2x)}$, $x > 0$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση F είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$
 (5 μονάδες)

ii. Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{f(x^4)}{f(x^2)} > \sqrt{\frac{f(2x^4)}{f(2x^2)}}$, $x \neq 0$. (5 μονάδες)

A₁: Απόδειξη

A₂: Ορισμός

A₃: Ορισμός.

A₄: i) $\wedge$ ii) $\sum$ iii) $\wedge$ iv) $\wedge$ v) $\wedge$

B₁: $f(x) = x \ln x + x^2 - 3x + 3, \quad x > 0$

$$f'(x) = \ln x + 1 + 2x - 3$$

$$f'(x) = \ln x + 2x - 2 \quad f'(1) = 0$$

$$f''(x) = \frac{1}{x} + 2 > 0$$

x	0	1
f''	+	+
f'	$\nearrow$	$\searrow$
f	$\searrow$	$\nearrow$

$$x < 1 \Rightarrow f'(x) < f'(1) \Rightarrow f'(x) < 0$$

$$x > 1 \Rightarrow f'(x) > f'(1) \Rightarrow f'(x) > 0$$

$$f(x) \geq f(1)$$

$$\underline{\underline{f(x) \geq 1}}$$

B₂: $f(x^2 + 1) = f(5)$

$$\begin{aligned} & \cdot 5 > 1 \\ & \cdot x^2 + 1 > 1 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall x > 1 \quad \wedge \quad f \nearrow \Rightarrow f(5) = 1 \end{array} \right.$$

$$x^2 + 1 = 5$$

$$x^2 = 4$$

$$\boxed{x = \pm 2}$$

$$B_3: f(1-x) < f(2) \quad \forall x < 0$$

$$\bullet 2 > 1$$

$$\bullet x < 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow 1-x > 1 \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} \bullet 2 > 1 \\ \bullet x < 0 \end{matrix}} \right\} \forall x > 1 \text{ u } \nearrow$$

$$1-x < 2$$

$$-1 < x$$

$$B_4: \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{(x-1)(f(x)-1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{x-1} \cdot \frac{1}{f(x)-1} = 1 \cdot (+\infty) = +\infty$$

(+)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln x}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\frac{x}{1}} = 1$$

$$\bullet f(x) > 1 \Rightarrow f(x)-1 > 0$$

$$B_5: \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) + 3x^2}{x+1} = -4$$

$$\text{Осн } h(x) = \frac{g(x) + 3x^2}{x+1}$$

$$g(x) = h(x)(x+1) - 3x^2$$

$$\text{Ако } \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} h(x)(x+1) - 3x^2 \quad \text{проверим } \lim_{x \rightarrow -1} h(x) = -4$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -3 \quad \text{ако } g(x) \text{ свече } \Rightarrow \underline{\underline{g(-1) = -3}}$$

$$g'(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{h(x)(x+1) - 3x^2 + 3}{x+1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{h(x)(\cancel{x+1})}{\cancel{x+1}} - \frac{3(x-1)(\cancel{x+1})}{\cancel{x+1}} = -4 - 3(-2) = 2$$

$| g'(-1) = 2$

$$y - g(-1) = g'(-1)(x+1)$$

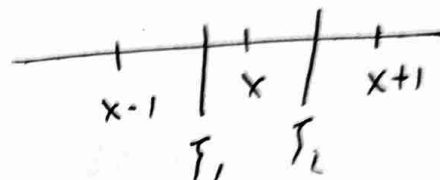
$$y - (-3) = 2(x+1)$$

$$y + 3 = 2x + 2$$

$$\boxed{y = 2x - 1}$$

B6:

$$G'(\xi_1) = \frac{G(x) - G(x-1)}{x - (x-1)} = G(x) - G(x-1)$$



$$G'(\xi_2) = \frac{G(x+1) - G(x)}{x+1 - x} = G(x+1) - G(x)$$

$$\xi_1 < \xi_2 \quad \begin{matrix} G' \\ \Rightarrow \\ f \end{matrix} \quad G'(\xi_1) < G'(\xi_2)$$

$$G(x) - G(x-1) < G(x+1) - G(x)$$

$$2G(x) < G(x+1) + G(x-1)$$

$$f_1: f\left(\frac{x}{e}\right) \leq \ln x, \quad x > 0$$

$$-f\left(\frac{1}{x}\right) + 1 \leq \ln x, \quad x > 0$$

$$\frac{x}{e} = t \Rightarrow x = t \cdot e$$

$$f(t) \leq \ln(t \cdot e)$$

$$f(t) \leq \ln t + \ln e$$

$$f(t) \leq \ln t + 1$$

$$\boxed{f(x) \leq \ln x + 1}$$

$$\frac{1}{x} = t \Rightarrow x = \frac{1}{t}$$

$$-f(t) + 1 \leq \ln \frac{1}{t}$$

$$-f(t) + 1 \leq \ln 1 - \ln t$$

$$-f(t) + 1 \leq -\ln t$$

$$\ln t + 1 \leq f(t)$$

$$\boxed{f(x) \geq \ln x + 1}$$

$$\underline{\underline{f(x) = \ln x + 1}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad f \nearrow$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad f' \searrow$$

$$f_2: g(x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x}, \quad x > 0$$

$$g'(x) = \frac{[f'(x+1) - f'(x)]x - f(x+1) + f(x)}{x^2} < 0$$

$$\bullet \quad x < x+1$$

$f \nearrow$

$$f(x) < f(x+1) \Rightarrow f(x) - f(x+1) < 0$$

$g \searrow$

$$\bullet \quad x < x+1$$

$$f'(x) > f'(x+1)$$

$$f'(x+1) - f'(x) < 0$$

$$\sqrt{3}: \frac{f(1+e^x) - f(e^x)}{f(1+\frac{1}{x}) - f(\frac{1}{x})} = x e^x$$

$$g(x) = \frac{f(x+1) - f(x)}{x}$$

$$\frac{f(1+e^x) - f(e^x)}{e^x} = \frac{f(1+\frac{1}{x}) - f(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$$

$$g(e^x) = g\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$g \approx 1-1$$

$$e^x = \frac{1}{x}$$

$$e^x - \frac{1}{x} = 0$$

$$\underbrace{\hspace{1cm}}_{h(x)}$$

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = e^{1/2} - 2 = \sqrt{e} - 2 < 0$$

$$h(1) = e - 1 > 0$$

$$h\left(\frac{1}{2}\right) h(1) < 0$$

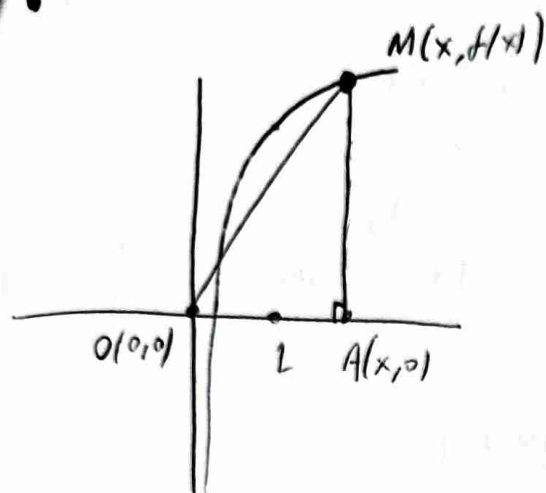
Bolzano $\exists x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ s.t. $h(x_0) = 0$

$$h(x_0) = 0$$

$$h'(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$$

$\nearrow$ to x_0 positive.

$$4: f(x) = \ln x + 1$$



$$y = \ln x + 1$$

$$\boxed{x'(t) = 2}$$

Τη χρονική στιγμή

$$t_1 \text{ το } \boxed{x(t_1) = 4}$$

$$\boxed{y(t_1) = \ln 4 + 1}$$

$$y'(t) = \frac{1}{x(t)} x'(t)$$

$$\underline{t = t_1}$$

$$y'(t_1) = \frac{x'(t_1)}{x(t_1)}$$

$$y'(t_1) = \frac{2}{4}$$

$$\boxed{y'(t_1) = \frac{1}{2}}$$

$$E_{OMA} = \frac{\beta \cdot U}{2}$$

$$E = \frac{x \cdot f(x)}{2}$$

$$E = \frac{1}{2} xy$$

$$E(t) = \frac{1}{2} x(t) y(t)$$

$$E'(t) = \frac{1}{2} [x'(t) y(t) + x(t) y'(t)]$$

$$\underline{t = t_1}$$

$$E'(t_1) = \frac{1}{2} [x'(t_1) y(t_1) + x(t_1) y'(t_1)]$$

$$E'(t_1) = \frac{1}{2} [2 \cdot (\ln 4 + 1) + 4 \cdot \frac{1}{2}]$$

$$E'(t_1) = \ln 4 + 1 + 1$$

$$\boxed{E'(t_1) = \ln 4 + 2}$$

$$S: \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx}{f(e^{x^2})} = l \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx}{x^2+1}$$

$$f(e^{x^2}) = \ln e^{x^2} + 1 = x^2 + 1$$

$$-1 \leq nx \leq 1$$

$$-\frac{1}{x^2+1} \leq \frac{nx}{x^2+1} \leq \frac{1}{x^2+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x^2+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x^2+1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0 \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx}{x^2+1} = 0$$

$$\Delta: f''(x) \cdot f(x) > (f'(x))^2 \gg 0$$

$$f''(x) f(x) > 0$$

$$f''(x) f(x) \neq 0$$

$$f''(x) \neq 0$$

von

$$f(x) \neq 0$$

von swcxw

$$f(x) > 0 \vee f(x) < 0$$

$$f(1) = 1$$

$$\underline{\underline{f(x) > 0}}$$

D2:

$$g(x) = \ln f(x)$$

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$g''(x) = \frac{f''(x)f(x) - f'(x)f'(x)}{f^2(x)} = \frac{f''(x)f(x) - (f'(x))^2}{f^2(x)} \quad (+)$$

g'

D3:

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln \left(\frac{f(a+x)}{f(a)} \right)^{\frac{1}{x}}} = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}}, \quad a > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln \frac{f(a+x)}{f(a)}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(f(a+x)) - \ln f(a)}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{g(x+a) - g(a)}{x+a - a}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} e^{g'(a)} = e^{g'(a)} = e^{\frac{f'(a)}{f(a)}} =$$

$$g'(a) = \frac{g(x+a) - g(a)}{x+a - a}$$

$$\Delta_4: F(x) = \frac{f^2(x)}{f(2x)}, \quad x > 0$$

$$i) F'(x) = \frac{[f^2(x)]' f(2x) - f^2(x) \cdot (f(2x))'}{f^2(2x)}$$

$$F'(x) = \frac{2f(x)f'(x)f(2x) - 2f^2(x)f'(2x)}{f^2(2x)}$$

$$F'(x) = \frac{2f(x) \left(\overset{\oplus}{f'(x)f(2x)} - \overset{\ominus}{f(x)f'(2x)} \right)}{f^2(2x)} < 0$$

• Ayou $x > 0 \Rightarrow x < 2x$
 $g' \nearrow$

F ↓

$$g'(x) < g'(2x)$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} < \frac{f'(2x)}{f(2x)}$$

$$f'(x)f(2x) < f(x)f'(2x)$$

$$f'(x)f(2x) - f(x)f'(2x) < 0$$

$$ii). \quad \frac{f(x^4)}{f(x^2)} > \sqrt{\frac{f(2x^4)}{f(2x^2)}}$$

$$\frac{f^2(x^4)}{f^2(x^2)} > \frac{f(2x^4)}{f(2x^2)}$$

$$\frac{f^2(x^4)}{f(2x^4)} > \frac{f^2(x^2)}{f(2x^2)}$$

$$F(x^4) > F(x^2)$$

$$F \downarrow$$

$$x^4 < x^2$$

$$x^2 < 1$$

$$x^2 - 1 < 0$$

$$x \in (0, 1).$$