

Επαναληψη

των

Θερμικών

μαθηματων

2

1. Συνθήκη συνάρτησης

$$\in \sigma_{TW} \quad f(x) = \ln(x-1) \quad , \quad x > 1$$

$$\in \sigma_{TW} \quad g(x) = \frac{x-1}{x} \quad , \quad x > 1$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln\left(\frac{x-1}{x} - 1\right)$$

$$= \ln\left(\frac{x-1-x}{x}\right) = \ln\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$= \ln 1 - \ln(-x) = -\ln(-x)$$

$$\boxed{x \in D_g \quad \text{και} \quad g(x) \in D_f}$$

$$\underline{\underline{x > 1}} \quad \frac{x-1}{x} > 1$$

$$\frac{x-1}{x} - 1 > 0$$

Δω ορίζεται

n f \circ g

$$\frac{x-1-x}{x} > 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{x} > 0$$

$$\frac{1}{x} < 0$$

$$\underline{\underline{x < 0}}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{\ln(x-1) - 1}{\ln(x-1)}$$

$$\boxed{x \in D_f \quad \text{or} \quad f(x) \in D_g}$$

$$x > 1 \quad \text{or} \quad \ln(x-1) > 1$$

$$x-1 > e$$

$$x > e+1$$

$$D_{g \circ f} = (e+1, +\infty).$$

$$2. \quad \text{COTW} \quad f(x) = e^{\frac{x-1}{x}} \quad , \underline{\underline{x > 0}}$$

$$\text{COTW} \quad \underline{f(x_1) = f(x_2)}$$

$$e^{\frac{x_1-1}{x_1}} = e^{\frac{x_2-1}{x_2}}$$

$$\frac{x_1-1}{x_1} = \frac{x_2-1}{x_2} \quad \Rightarrow \quad x_2(x_1-1) = x_1(x_2-1)$$

$$x_2 \cancel{x_1} - x_2 = \cancel{x_1} x_2 - x_1$$

$$-x_2 = -x_1$$

$$\underline{x_1 = x_2} \quad f(1) = 1 \Rightarrow \text{f ontopu.$$

$$f(x) = y$$

$$y = e^{\frac{x-1}{x}} \quad \underline{\underline{y > 0}}$$

$$\ln y = \frac{x-1}{x}$$

$$x \ln y = x - 1$$

$$x \ln y - x = -1$$

$$x(\ln y - 1) = -1$$

$$x = \frac{-1}{\ln y - 1}$$

$$\ln y - 1 \neq 0 \quad \ln y \neq 1 \quad \underline{y \neq e}$$

$$\text{Αφού } x = \frac{-1}{\ln y - 1}$$

$$x = f^{-1}(y)$$

$$f^{-1}(y) = \frac{-1}{\ln y - 1} = \frac{1}{1 - \ln y}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{1 - \ln x}$$

$$\text{Αφού } x > 0 \Rightarrow \frac{-1}{\ln y - 1} > 0$$

$$\ln y - 1 < 0$$

$$\ln y < 1$$

$$\underline{\underline{y < e}}$$

$$\bullet y > 0$$

$$\bullet y \neq e$$

$$\bullet y < e$$

$$D_{f^{-1}} = (0, e)$$

B. Enlusion opiwv

a. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - x - 6} \left(\frac{0}{0} \right) \xrightarrow{\text{L'Hôpital}} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+3)}$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & -6 \quad (2) \\ \downarrow & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{array}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2+2x+3} = \frac{4}{11}$$

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+1}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1} = 1 \cdot \infty \quad ;$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2+1}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1} = 1 \cdot (-\infty) = -\infty$$

x	+1
x+1	- 0 +

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2+1}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1} = 1(+\infty) = +\infty$$

To opio Sav vrapxu.

$$7. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 - 3} - 1}{x^2 - 4} \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2 - 3} - 1)(\sqrt{x^2 - 3} + 1)}{(x^2 - 4)(\sqrt{x^2 - 3} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3 - 1}{(x^2 - 4)(\sqrt{x^2 - 3} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{x^2 - 4}}{\cancel{(x^2 - 4)}(\sqrt{x^2 - 3} + 1)} = \frac{1}{2}$$

$$E. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2-3} - 1}{x^2-4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2(1-\frac{3}{x^2})} - 1}{x^2-4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1-\frac{3}{x^2}} - 1}{x^2-4} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\cancel{x} \left(-\sqrt{1-\frac{3}{x^2}} - \frac{1}{x} \right)}{\cancel{x^2} \left(1 - \frac{4}{x^2} \right)}$$

$$= \frac{-1}{-\infty} = 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x)}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x^2+1}}^x - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{x^2+1} - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0$$

$$h. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \rho x}{x} \quad \frac{\eta \rho \infty}{\infty}$$

$$-1 \leq \eta \rho x \leq 1$$

$$\boxed{-\frac{1}{x} \leq \frac{\eta \rho x}{x} \leq \frac{1}{x}}$$

To $x > 0$
 πολλαπλασιάζω
 με x .

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} &= 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Ans. K.O.}$$

$$θ. \lim_{x \rightarrow 0} x \eta \rho \frac{1}{x} \quad \frac{\eta \rho \infty}{\infty}$$

$$-1 \leq \eta \rho \frac{1}{x} \leq 1$$

$$\left| \eta \rho \frac{1}{x} \right| \leq 1$$

$$|x| \left| \eta \rho \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

$$\left| x \eta \rho \frac{1}{x} \right| \leq |x|$$

$$\boxed{-|x| \leq x \eta \rho \frac{1}{x} \leq |x|}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} -|x| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$$

Από κ. 11 $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln \frac{1}{x} = 0$

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$

Σχόλιο

Όταν το $\ln 0$

και έχω απροσδιοριστία

δίνει στο ημίτονο

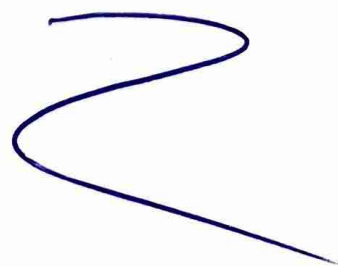
οτι θέλουμε ως

να εμφανισω

$$\frac{\ln f(x)}{f(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \quad \frac{\frac{1}{x} = t}{x \rightarrow +\infty \quad t \rightarrow 0}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln t}{t} = 1$$



4. ∞ TW $f(x) = \begin{cases} (x^2 - x)e^x, & x \leq 0 \\ \frac{4x}{x} - 1, & x > 0 \end{cases}$

a. Eiven n $f(x)$ swexul sw 0;

• $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - x)e^x = 0$

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{4x}{x} - 1 \right) = 1 - 1 = 0$

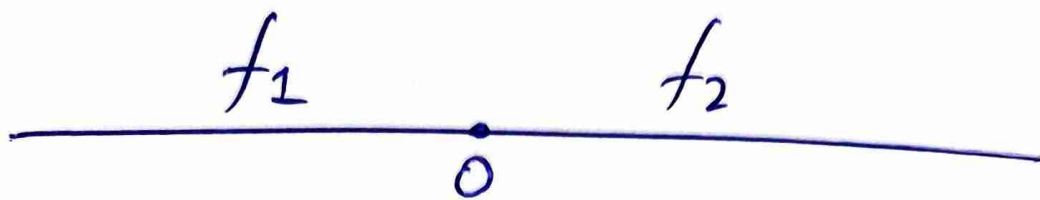
Apra $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0}$

Enew $f(0) = (0^2 - 0)e^0 = 0$

Apra $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

n $f(x)$ Eiven swexul sw 0!

Β. Είναι η $f(x)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$;



Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ και

$(0, +\infty)$ ως Π. Σ. Σ

Επειδή είναι συνεχής και στο 0

Είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$!

5. α. Νδο η εξίσωση $3x + \ln x^4 = x^2 + 4$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα

στο $(1, e)$

$$\underbrace{3x + \ln x^4 - x^2 - 4 = 0}_{f(x)}$$

Η $f(x)$ συνεχώς στο $[1, e]$ μ. σ. σ

$$f(1) = -2 < 0$$

$$\begin{aligned} f(e) &= 3e + \ln e^4 - e^2 - 4 = 3e + 4\ln e - e^2 - 4 \\ &= 3e + 4 - e^2 - 4 \\ &= 3e - e^2 = \\ &= e(3 - e) > 0 \end{aligned}$$

$$f(1)f(e) < 0$$

Bolzano $\exists \xi \in (1, e)$ π.σ. $f(\xi) = 0$,

$$3\xi + \ln \xi^4 = \xi^2 + 4$$

B.

Νδο η εξίσωση $e^x = 3 - 2x$
 έχει μοναδική ρίζα στο $(0, 1)$

$$\underbrace{e^x - 3 + 2x}_{f(x)} = 0$$

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[0, 1]$
 ως η.δ.σ.

$$f(0) = e^0 - 3 + 2 \cdot 0 = 1 - 3 = -2 < 0$$

$$f(1) = e - 3 + 2 = e - 1 > 0$$

$$f(0) \cdot f(1) < 0$$

Βολτανο $\exists \xi \in (0, 1)$

$$\text{τ.ω } f(\xi) = 0$$

$$e^\xi = 3 - 2\xi$$

Μονotonia $f(x)$

$$\bullet x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$$

$$\bullet x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 - 3 < 2x_2 - 3$$

⊕

$$f(x_1) < f(x_2)$$

f αυξ. το
 ξ μοναδικό!

8. Δίνονται $f(x) = 3x - e^x$

και $g(x) = x^2 - 4$

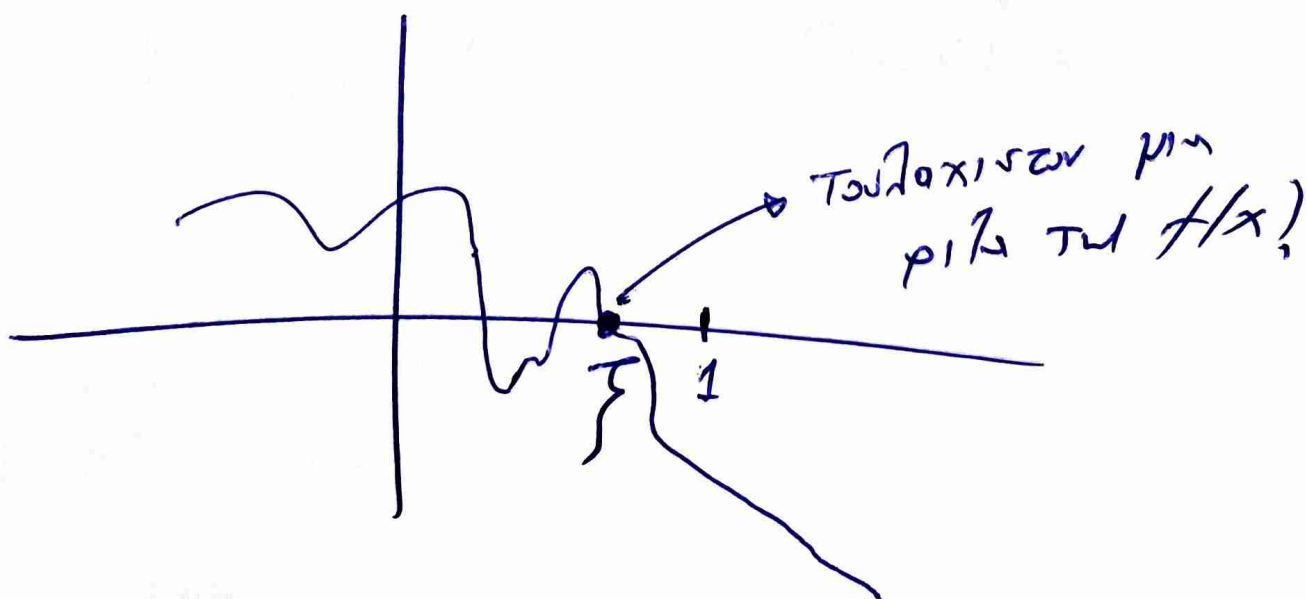
i) ΝΔΟ η f τερνι τον x ' x σε τουλάχιστο
ένα σημείο με τεττημένη στο $(0,1)$

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ w.l.s.s

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = -1 \\ f(1) = 3 - e > 0 \end{array} \right\} f(0)f(1) < 0$$

Βόλταις $\exists \xi \in (0,1)$ τ.μ $f'(\xi) = 0$

αρα η f τερνι τον x ' x στο
μ($\xi, 0$) τουλάχιστον μια φορά.



11). Νόο η $(f$ τέρνει τη $(g$
τουλάχιστον μια φορά στο $(-1, 0)$

$f(x) = g(x)$ Τα καλά σημάσι των
 $(f$ και $(g$ προκύπτει
από την εξίσωση
αυτή

$$3x - e^x = x^2 - 4$$

$$\underbrace{3x - e^x - x^2 + 4}_{h(x)} = 0$$

Η $h(x)$ συνεχής στο $[-1, 0]$ ως η.δ.σ

$$h(-1) = -3 - e^{-1} - 1 + 4 = -\frac{1}{e} < 0$$

$$h(0) = -1 + 4 = 3 > 0$$

$h(-1)h(0) < 0$ Bolzano $\exists \xi \in (-1, 0)$

$$\text{T.W } h(\xi) = 0 \Rightarrow f(\xi) = g(\xi) = 0$$

δ.

$\subseteq_{\sigma TW}$

συναρτ.

$$f: [0, 1] \rightarrow (-1, 0)$$

$$\text{Νδo } \exists x_0 \in (0, 1) \text{ τ.υ } f^2(x_0) = 2f(x_0) + 3x_0$$

T_c σημαίνει το $f: [0, 1] \rightarrow (-1, 0)$;

D_f

$[0, 1]$

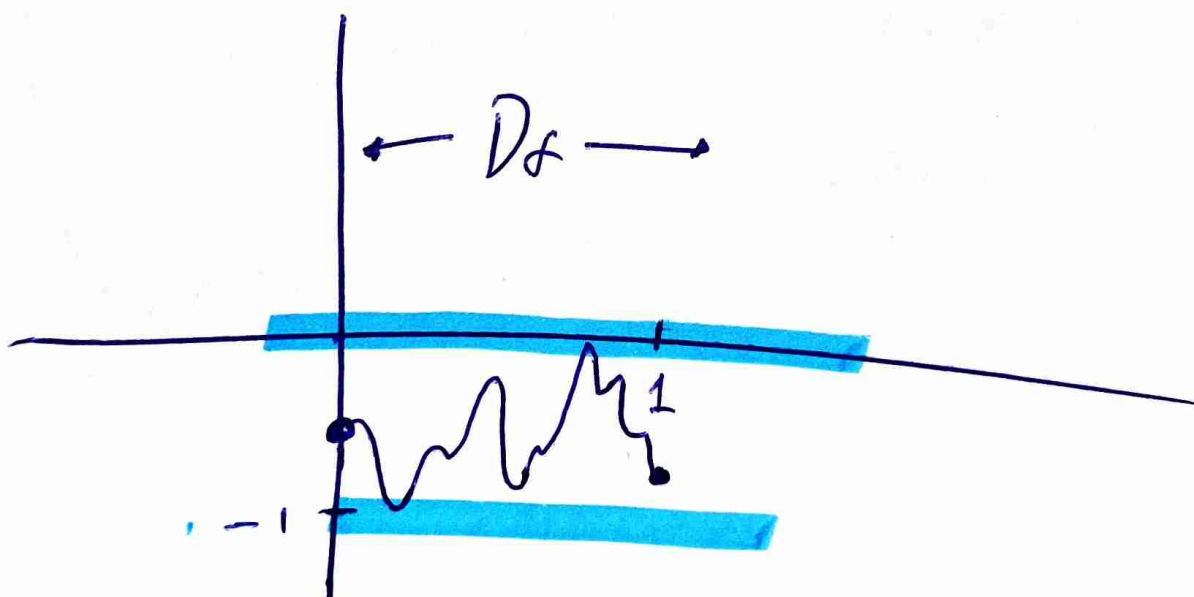
Πεδω

ορισμου

$\sum T_f$

$(-1, 0)$

$$\hookrightarrow -1 < f(x) < 0$$



$$f^2(x_0) = 2f(x_0) + 3x_0$$

$$f^2(x) = 2f(x) + 3x$$

$$f^2(x) - 2f(x) - 3x = 0$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{g(x)}$$

H $g(x)$ swachet $[0,1]$ ni n.s.d

$$g(0) = f^2(0) - 2f(0) = \underbrace{f(0)}_{-} (\underbrace{f(0)-2}_{-})$$

grupirw on $-1 < f(0) < 0$

$$-3 < f(0) - 2 < -2$$

$g(0) > 0$

$$g(1) = f^2(1) - 2f(1) - 3 = \underbrace{(f(1)-3)}_{-} \underbrace{(f(1)+1)}_{+}$$

• $-1 < f(1) < 0$

• $-1 < f(1) < 0$

$-4 < f(1) - 3 < -3$

$0 < f(1) + 1 < 1$

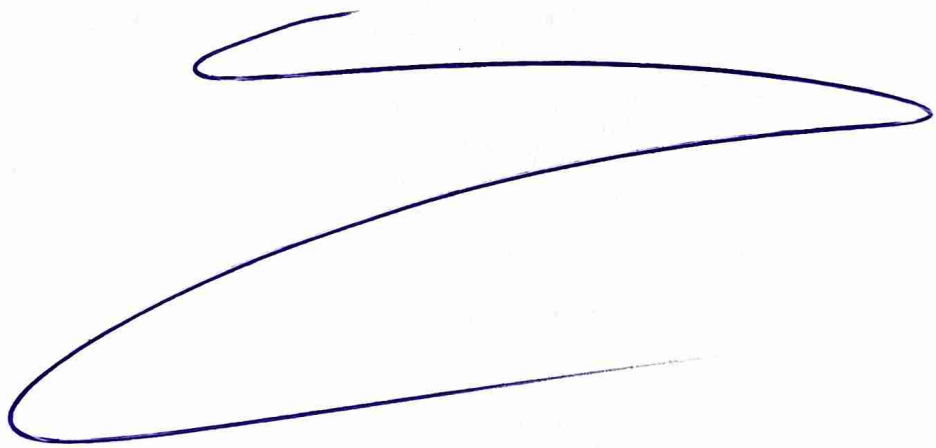
$g(1) < 0$

$$\text{А} \text{ } \forall x \quad g(0) \cdot g(1) < 0$$

$$\text{Bolzano} \quad \exists x_0 \in (0, 1)$$

$$\text{т.у} \quad g(x_0) = 0$$

$$f^2(x_0) = 2f(x_0) + 3x_0$$



Σημειώσεις

1. Η $f(x)$ είναι συνεχής στο x_0

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

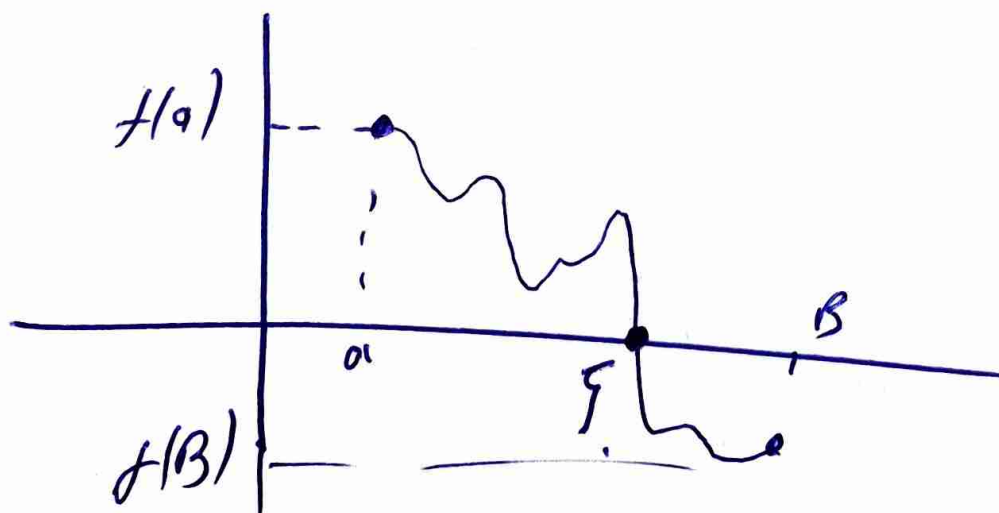
2. Bolzano

Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$
και $f(a)f(b) < 0$ τότε

$$\exists \xi \in (a, b) \text{ τ.ω } f(\xi) = 0$$

Δηλαδή η f τέρνει τον x

ταυτοχρόνως με φορά στο (a, b) .

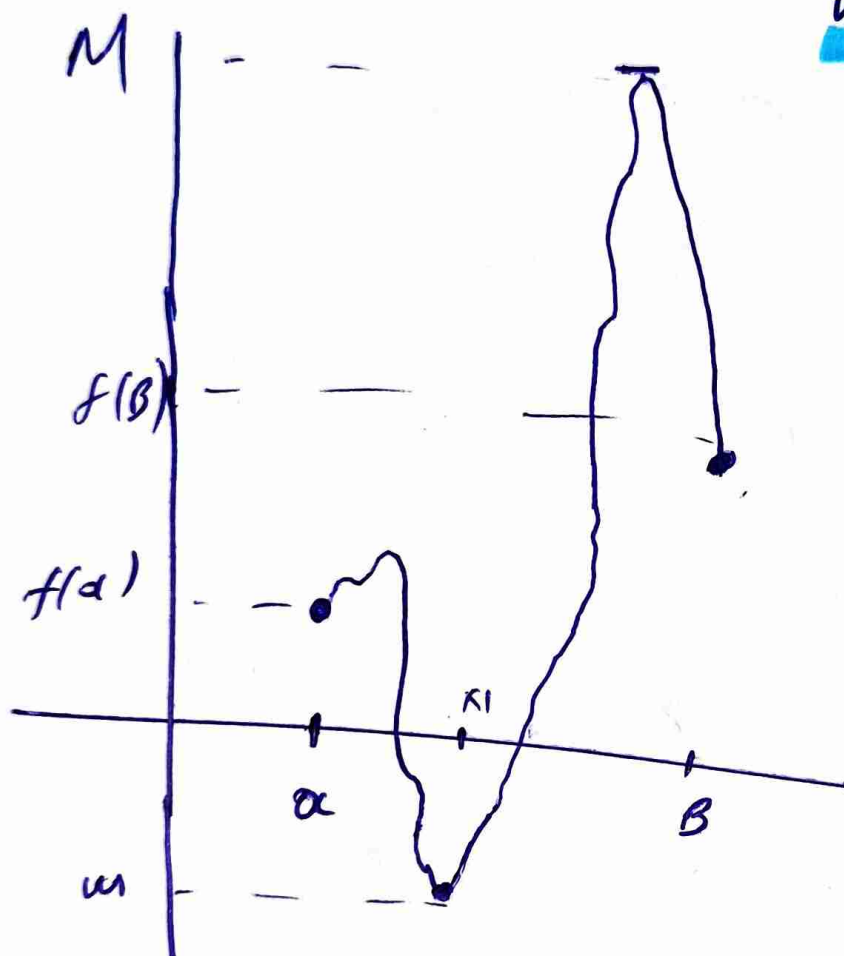


3. Θεωρημα Μεγιστης & Ελαχιστης Τιμης (ΘΜΕΤ)

Αν η $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, b]$
Τότε υποχρεωτικά έχει ελαχιστική
και μεγιστική τιμή

$$m \leq f(x) \leq M$$

$$\forall x \in [a, b]$$



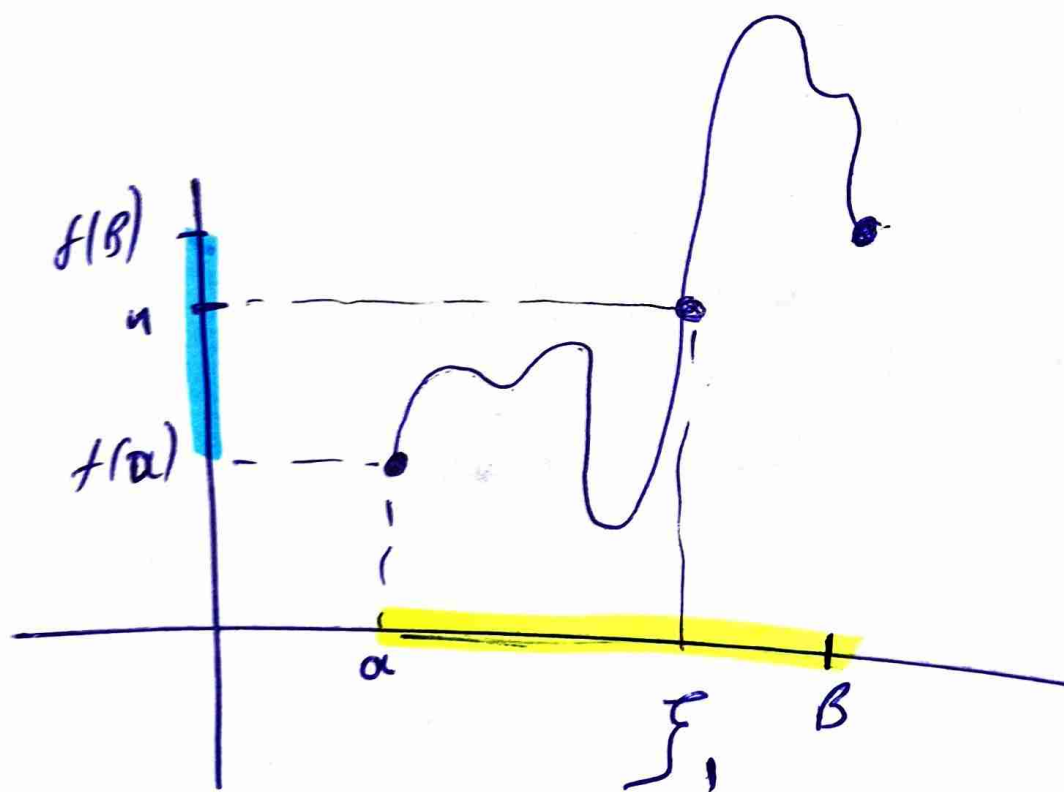
4. Θεωρημα Ενδιαμεσων Τυπων
($\Theta \in T$)

Αν η $f(x)$ συνεχής στο $[a, b]$

Το $f(a) \neq f(b)$

Τότε $\forall$ αριθμό η μεταξύ των $f(a)$ και $f(b)$:

$\exists \xi \in (a, b)$ τ.υ $f(\xi) = \eta$



η προφανώς

$f(a) < \eta < f(b)$

Anodun

Θεωρούμε $\exists \xi \in (a, b)$ T.W. $f(\xi) = \eta$

$$f(x) = \eta$$

$$\underbrace{f(x) - \eta}_{g(x)} = 0$$

H $g(x)$ συνεχής στο $[a, b]$ w.l.o.s.

$$g(a) = f(a) - \eta < 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} g(a)g(b) < 0 \\ \text{Bolzano} \\ \exists \xi \in (a, b) \\ \text{T.W. } \underline{g(\xi) = 0} \end{array} \right.$$

$$g(b) = f(b) - \eta > 0$$

Γνωρίζουμε ότι $f(a) < \eta < f(b)$

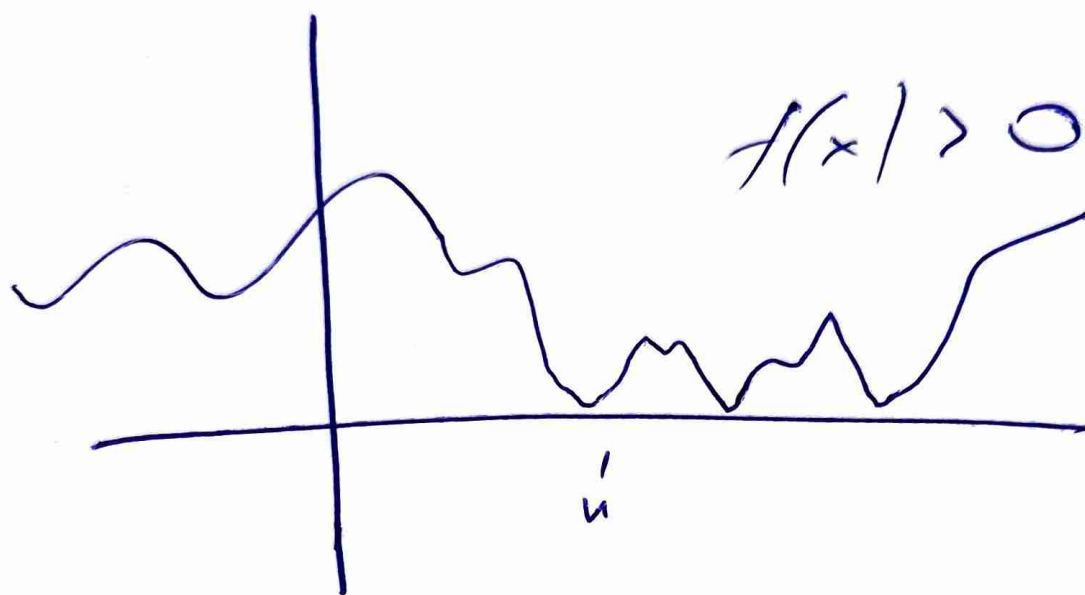
$$f(a) < \eta$$

$$f(b) > \eta$$

$$f(a) - \eta < 0$$

$$f(b) - \eta > 0$$

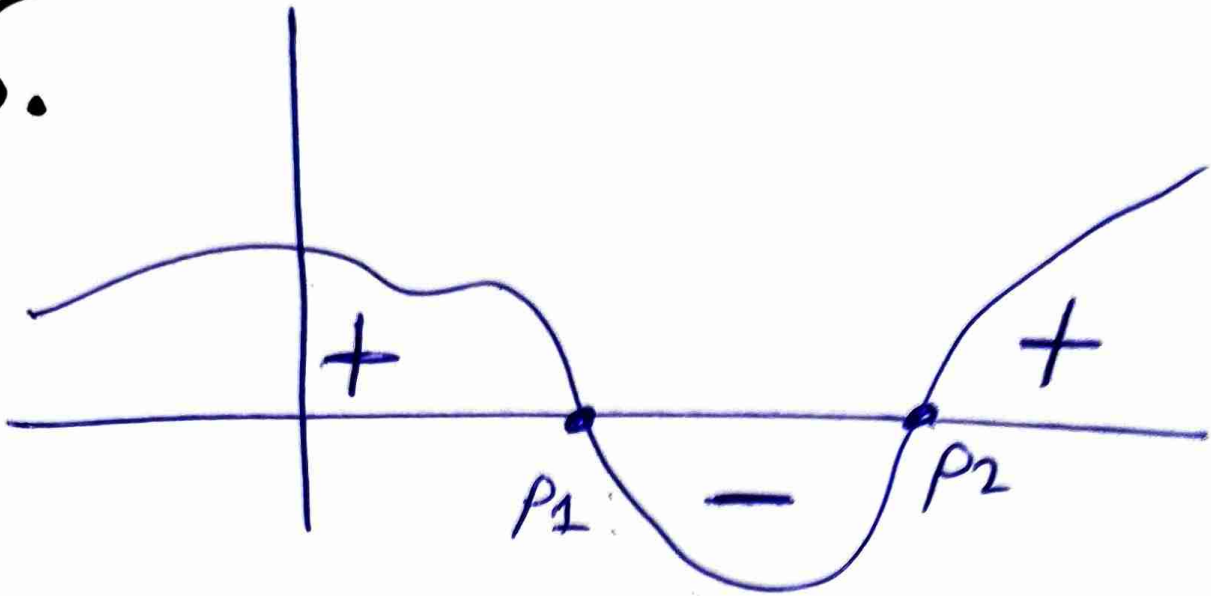
5. Έστω ότι u $f(x) \neq 0$
 και συνεχής $\forall x \in \mathbb{R}$.



Διατηρεί συνεχή

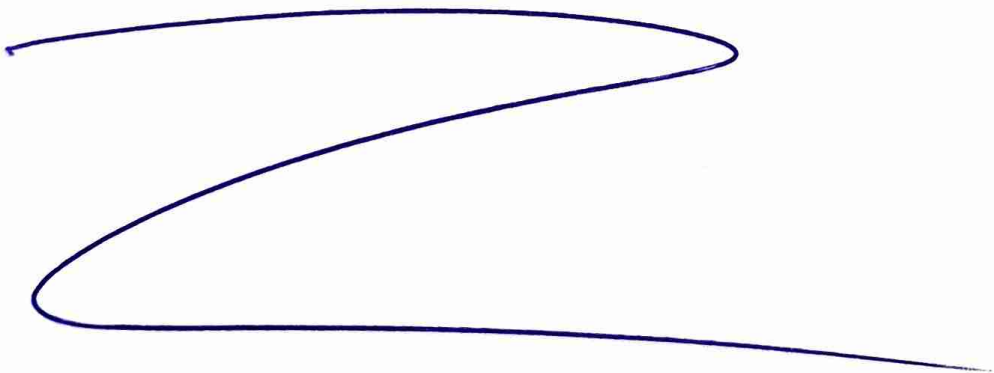
προσκή

6.



Εστω συνεχής $f(x)$.

Η $f(x)$ διατίθεται σταθερό
 προσήμιο εντός διαδοχικών
 ριζών



Ενότητα

13

[REDACTED]

$$\rightarrow \underline{\underline{f(1) = -2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-f(x) - 2}{f^2(x) + 2f(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\cancel{f(x)} + 2}{f(x)(\cancel{f(x)} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{-1}{f(x)} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{B} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left((f(2)-1)x^3 + 5x - 1 \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(2)-1)x^3 =$$

$$= (f(2)-1)(-\infty) =$$

$$= - \cdot (-\infty) = +\infty$$

Αφού η $f(x) \neq 0$ για οποιονδήποτε x

$\Rightarrow f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Οπότε } f(1) = -2 \Rightarrow f(x) < 0$$

$$\Rightarrow f(2) < 0$$

$$\Rightarrow f(x) > 0$$

8. $\in \sigma \tau \omega$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $\sigma \omega \chi \omega$
 $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

Νόμο n $\epsilon \tau \iota \sigma \omega \sigma \eta$ $\frac{x}{x^2-1} = \frac{e^x}{f(x)}$

$\epsilon \chi \alpha$ $\mu \alpha$ $\tau \omega \lambda \alpha \chi \iota \sigma \tau \omega \nu$ $\tau \omega \varsigma$
 $\sigma \omega$ $(-1, 1).$

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{e^x}{f(x)}$$

$$x f(x) = e^x (x^2 - 1)$$

$$\underbrace{x f(x) - e^x (x^2 - 1)}_{g(x)} = 0$$

H $g(x)$ $\sigma \omega \chi \omega$ $\sigma \omega$ $[-1, 1]$

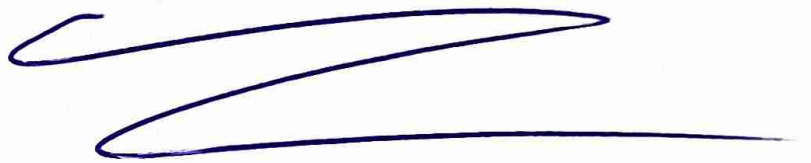
$\omega \int$ $n. \sigma. \sigma.$

$$g(-1) = -f(-1)$$

$$g(1) = f(1)$$

$$g(-1)g(1) = - \underbrace{f(-1)f(1)}_{(+)} < 0$$

Bolzano $\exists \xi \in (-1, 1)$ s.t. $g(\xi) = 0$



Assume $f(x) \neq 0$ for all $x \in \mathbb{R}$

To 2.1 $\neg$ $f(x) > 0 \vee f(x) < 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}.$$

To $f(-1)$ and $f(1)$ are both positive

$$f(-1)f(1) > 0.$$

4. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ օրոշակ, $f(x) \neq 0$
 $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 3$$

Ոճ $f(x) > 0$

Այսպիսով $f(x) \neq 0$ օրոշակ
Եւ $f(x) > 0$ ի $f(x) < 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2}{x - 1} = 3$$

Θεωρώ BonDintski συναρτηση,

$$g(x) = \frac{f(x) - 2}{x - 1}$$

προφανώς $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 3$

$$g(x)(x - 1) = f(x) - 2$$

$$g(x)(x - 1) + 2 = f(x)$$

$$f(x) = g(x)(x - 1) + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x)(x - 1) + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3 \cdot (1 - 1) + 2$$

αφού η f συνεχής

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

$$f(1) = 2$$

$$\Rightarrow f(x) > 0$$

Επόμενο μάθημα

Ημερομηνία μαθήματος: Περνται 3/9/26

Ώρα μαθήματος: 5:30 - 7:30

Ασκήσεις

Σήμερα το βράδυ

θα ανεβασω στο eclass
επαναληπτικές ασκήσεις.

+ Εισαγωγή 13
⑥ ⑤
⑦

παρατηρήσεις

Στο μάθημα της Περνται.
Θα ολοκληρώσουμε Βολτανο