

2. Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f αναζητούμε:

— Στα άκρα των διαστημάτων του πεδίου ορισμού της στα οποία η f δεν ορίζεται.

— Στα σημεία του πεδίου ορισμού της, στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

— Στο $+\infty$, $-\infty$, εφόσον η συνάρτηση είναι ορισμένη σε διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$, αντιστοίχως $(-\infty, \alpha)$.

82. Να διατυπώσετε τους κανόνες De L' Hospital

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή

άπειρο), τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή

άπειρο), τότε: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

83. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζετε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

84. Να αποδείξετε ότι:

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε

• όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$,

είναι παράγουσες της f στο Δ και

• κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.

• Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ , αφού $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

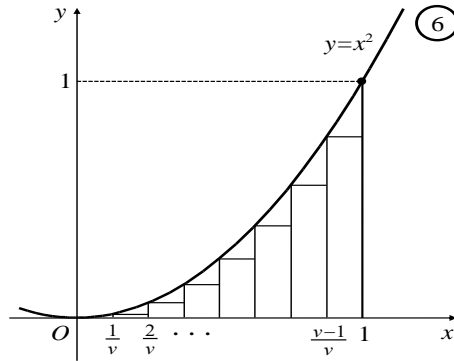
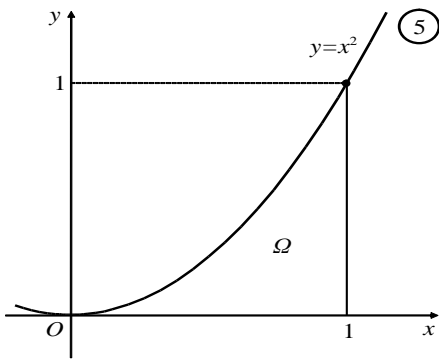
• Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ . Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν

$F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε $G'(x) = F'(x)$, για κάθε $x \in \Delta$.

Άρα, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε $G(x) = F(x) + c$, για κάθε $x \in \Delta$.

85. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2$, τον άξονα των x και τις ευθείες $x = 0$ και

$x = 1$ είναι $E(\Omega) = \frac{1}{3}$.



Μια μέθοδος να προσεγγίσουμε το ζητούμενο εμβαδόν είναι η εξής:

Χωρίζουμε το διάστημα $[0,1]$ σε v ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x = \frac{1}{v}$, με άκρα τα σημεία: $x_0 = 0$,

$$x_1 = \frac{1}{v}, \quad x_2 = \frac{2}{v}, \dots, x_{v-1} = \frac{v-1}{v}, \quad x_v = \frac{v}{v} = 1.$$

- Σχηματίζουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα υποδιαστήματα αυτά και ύψη την ελάχιστη τιμή της f σε καθένα από αυτά. (Σχ. 6). Μια προσέγγιση του εμβαδού που ζητάμε είναι το άθροισμα, ε_v , των εμβαδών των παραπάνω ορθογωνίων. Δηλαδή, το:

$$\begin{aligned} \varepsilon_v &= f(0) \frac{1}{v} + f\left(\frac{1}{v}\right) \frac{1}{v} + f\left(\frac{2}{v}\right) \frac{1}{v} + \dots + f\left(\frac{v-1}{v}\right) \frac{1}{v} = \frac{1}{v} \left[0^2 + \left(\frac{1}{v}\right)^2 + \left(\frac{2}{v}\right)^2 + \dots + \left(\frac{v-1}{v}\right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{v^3} [1^2 + 2^2 + \dots + (v-1)^2] = \frac{1}{v^3} \frac{(v-1) \cdot v(2v-1)}{6} = \frac{2v^2 - 3v + 1}{6v^2}. \end{aligned}$$

- Αν, τώρα, σχηματίσουμε τα ορθογώνια με βάσεις τα παραπάνω υποδιαστήματα και ύψη την μέγιστη τιμή της f σε καθένα απ' αυτά (Σχ. 7), τότε το άθροισμα

$$E_v = f\left(\frac{1}{v}\right) \frac{1}{v} + f\left(\frac{2}{v}\right) \frac{1}{v} + \dots + f\left(\frac{v}{v}\right) \frac{1}{v}$$

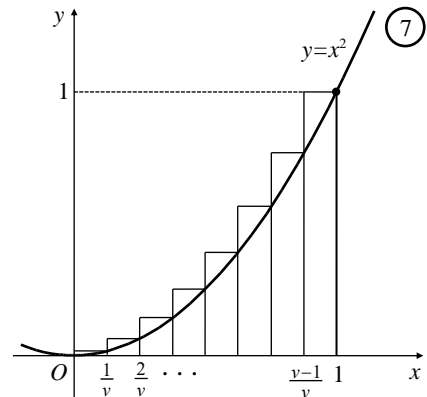
των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι μια ακόμη προσέγγιση του ζητούμενου εμβαδού.

Είναι όμως,

$$\begin{aligned} E_v &= f\left(\frac{1}{v}\right) \frac{1}{v} + f\left(\frac{2}{v}\right) \frac{1}{v} + \dots + f\left(\frac{v}{v}\right) \frac{1}{v} \\ &= \frac{1}{v} \left[\left(\frac{1}{v}\right)^2 + \left(\frac{2}{v}\right)^2 + \dots + \left(\frac{v}{v}\right)^2 \right] = \frac{1}{v^3} (1^2 + 2^2 + \dots + v^2) = \frac{1}{v^3} \frac{v(v+1)(2v+1)}{6} = \frac{2v^2 + 3v + 1}{6v^2}. \end{aligned}$$

Το ζητούμενο, όμως, εμβαδόν E βρίσκεται μεταξύ των ε_v και E_v . Δηλαδή ισχύει $\varepsilon_v \leq E \leq E_v$, οπότε

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \varepsilon_v \leq E \leq \lim_{v \rightarrow \infty} E_v. \quad \text{Επειδή } \lim_{v \rightarrow \infty} \varepsilon_v = \lim_{v \rightarrow \infty} E_v = \frac{1}{3}, \text{ έχουμε } E = \frac{1}{3}.$$

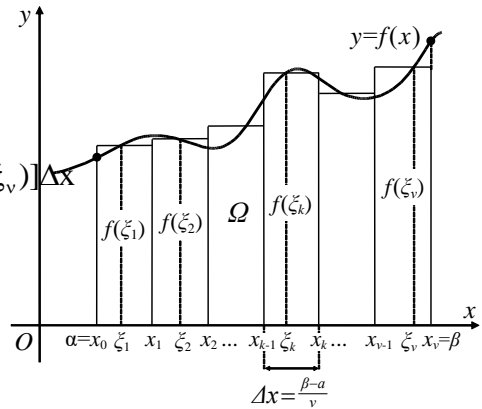


86. Να δώσετε τον ορισμό του εμβαδού χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με $f(x) \geq 0$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$.

Για να ορίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω εργαζόμαστε ως εξής:

- Χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα, μήκους $\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{n}$, με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \beta$.

- Σε κάθε υποδιάστημα $[x_{k-1}, x_k]$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο ξ_k και σχηματίζουμε τα ορθογώνια που έχουν βάση Δx και ύψη τα $f(\xi_k)$. Το άθροισμα των εμβαδών των ορθογωνίων αυτών είναι $S_n = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_n)\Delta x = [f(\xi_1) + \dots + f(\xi_n)]\Delta x$



- Υπολογίζουμε το $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Αποδεικνύεται ότι το $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ υπάρχει στο \mathbb{R} και είναι

ανεξάρτητο από την επιλογή των σημείων ξ_k . Το όριο αυτό ονομάζεται εμβαδόν του επιπέδου χωρίου Ω και συμβολίζεται με $E(\Omega)$. Είναι φανερό ότι $E(\Omega) \geq 0$.

87. Να δώσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha, \beta]$.

Με τα σημεία $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \beta$ χωρίζουμε το διάστημα $[\alpha, \beta]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα μήκους $\Delta x = \frac{\beta - \alpha}{n}$.

Στη συνέχεια επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$, για κάθε $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, και σχηματίζουμε το άθροισμα

$S_n = f(\xi_1)\Delta x + f(\xi_2)\Delta x + \dots + f(\xi_k)\Delta x + \dots + f(\xi_n)\Delta x$ το οποίο συμβολίζεται, σύντομα, ως εξής:

$$S_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x \quad (1)$$

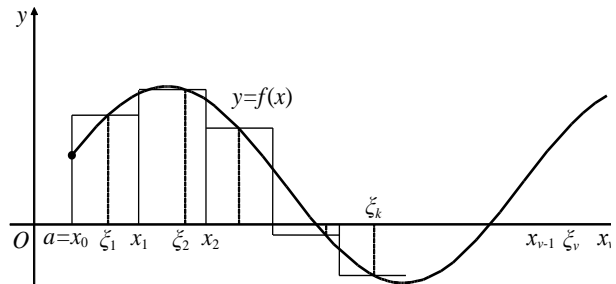
Αποδεικνύεται ότι,

“Το όριο του αθροίσματος S_n , δηλαδή το $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x \right)$ (1) υπάρχει στο \mathbb{R} και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή των ενδιάμεσων σημείων ξ_k ”.

Το παραπάνω όριο (1) ονομάζεται **ορισμένο ολοκλήρωμα** της συνεχούς συνάρτησης f από το a στο β , συμβολίζεται με $\int_a^\beta f(x)dx$ και διαβάζεται “ολοκλήρωμα της f από το a στο β ”. Δηλαδή,

$$\int_a^\beta f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x \right)$$

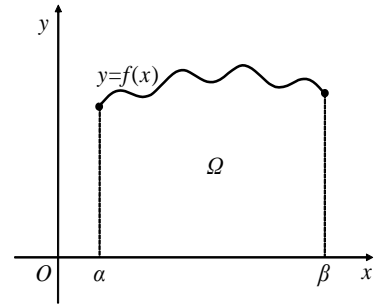
Από τους ορισμούς του εμβαδού και του ορισμένου ολοκληρώματος προκύπτει ότι:



Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ δίνει το εμβαδόν $E(\Omega)$ του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$.

Δηλαδή, $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = E(\Omega)$.

Επομένως Αν $f(x) \geq 0$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$



88. Ποιες οι ιδιότητες του ορισμένου ολοκληρώματος;

ΘΕΩΡΗΜΑ 1ο

Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν

- $\int_{\alpha}^{\beta} \lambda f(x) dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$
- $\int_{\alpha}^{\beta} [f(x) + g(x)] dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$ και γενικά
- $\int_{\alpha}^{\beta} [\lambda f(x) + \mu g(x)] dx = \lambda \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx + \mu \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2ο

Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3ο

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$.

89. Ποιος είναι ο τύπος της κατά παράγοντες ολοκλήρωσης;

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)g(x) dx \text{ όπου } f', g' \text{ είναι συνεχείς συναρτήσεις στο } [\alpha, \beta].$$

90. Ποιος είναι ο τύπος της ολοκλήρωσης με αλλαγή μεταβλητής;

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))g'(x) dx = \int_{u_1}^{u_2} f(u) du,$$

όπου f, g' είναι συνεχείς συναρτήσεις, $u = g(x)$, $du = g'(x) dx$ και $u_1 = g(\alpha)$, $u_2 = g(\beta)$.

91. Αν f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα Δ και a ένα σημείο του Δ , να γράψετε τι γνωρίζετε συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$.

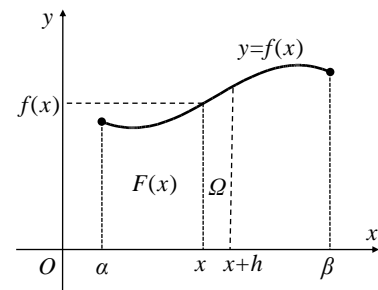
Η συνάρτηση F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , δηλαδή

$$F'(x) = \left(\int_{\alpha}^x f(t) dt \right)' = f(x) \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

- Εποπτικά το συμπέρασμα του παραπάνω θεωρήματος προκύπτει ως εξής:

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t) dt = \text{Εμβαδόν του χωρίου } \Omega \approx f(x) \cdot h, \text{ για μικρά } h > 0.$$

Άρα, για μικρά $h > 0$ είναι $\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \approx f(x)$, οπότε $F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$



92. Να διατυπώσετε το θεμελιώδες θεώρημα ολοκληρωτικού λογισμού και να το αποδείξετε.

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

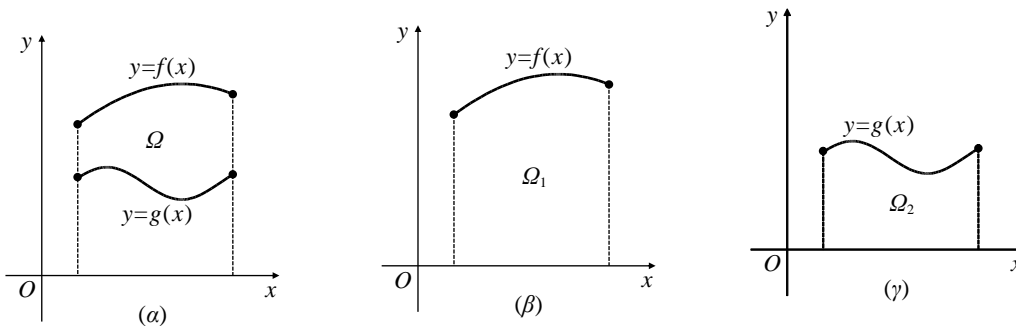
Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε $G(x) = F(x) + c$. (1)

Από την (1), για $x = \alpha$, έχουμε $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c$, οπότε $c = G(\alpha)$.

Επομένως, $G(x) = F(x) + G(\alpha)$, οπότε, για $x = \beta$, έχουμε $G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha)$ και άρα $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$.

93. Έστω, δυο συναρτήσεις f και g , συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g , και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι:

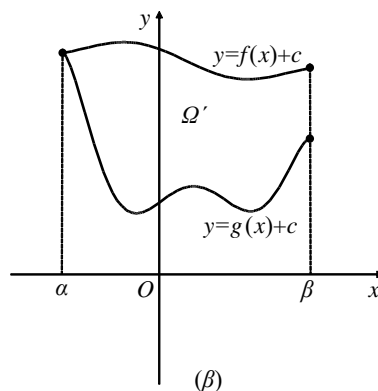
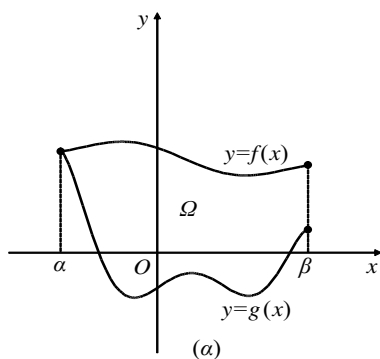
$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx$$



Παρατηρούμε ότι $E(\Omega) = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx - \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx$. Επομένως, $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx$.

94. Έστω, δυο συναρτήσεις f και g , συνεχείς στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $g(x) \leq f(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g , και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι: $E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x))dx$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει αριθμό $c \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x) + c \geq g(x) + c \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Είναι φανερό ότι το χωρίο Ω έχει το ίδιο εμβαδόν με το χωρίο Ω'



Επομένως, σύμφωνα με τον τύπο (1), έχουμε

$$E(\Omega) = E(\Omega') = \int_{\alpha}^{\beta} [(f(x)+c) - (g(x)+c)] dx = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx \text{ . Άρα } E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx \text{ .}$$

95. Έστω, μια συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της g , του άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$ είναι: $E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$

Επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0$, έχουμε

$$E(\Omega) = \int_{\alpha}^{\beta} (f(x) - g(x)) dx = \int_{\alpha}^{\beta} [-g(x)] dx = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x) \leq 0$ για κάθε

$$x \in [\alpha, \beta], \text{ τότε } E(\Omega) = -\int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$$

