56. $f(x) = \ln(x+1) + 1 + \ln a$ $\quad f(0) = 0$

ⓐ $f(0) = \ln(0+1) + 1 + \ln a = 0$

$$\ln 1 + 1 + \ln a = 0$$

$$1 + \ln a = 0$$

$$\ln a = -1$$

$$e^{\ln a} = e^{-1}$$

$$\boxed{a = e^{-1}}$$

$f(x) = \ln(x+1) + 1 + \ln e^{-1}$

$f(x) = \ln(x+1) \cancel{+1} \cancel{-1}$ $\quad \boxed{f(x) = \ln(x+1)}$

Ⓑ $f(x-1) - f(x+1) = -\ln 2$

$$\ln(x-1+1) - \ln(x+1+1) = -\ln 2$$

$$\ln x - \ln(x+2) = -\ln 2$$

$$\ln \frac{x}{x+2} = \ln 2^{-1}$$

$$\frac{x}{x+2} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = x+2$$

$$\boxed{x = 2}$$

Β' τρόπω

$$\ln \frac{x}{x+2} + \ln 2 = 0$$

$$\ln \frac{x}{x+2} \cdot 2 = 0$$

$$e^{\ln \frac{2x}{x+2}} = e^{0}$$

$$\frac{2x}{x+2} = 1 \rightarrow 2x = x+2$$

$$\boxed{x=2}$$

(γ) $f(e^x) + f(e^x - 1) \leq \ln 2$

$$\boxed{f(x) = \ln(x+1)}$$

$$\ln(e^x+1) + \ln(e^x-1+1) \leq \ln 2$$

$$\ln(e^x+1) + \ln e^x \leq \ln 2$$

$$\ln (e^x+1)e^x \leq \ln 2$$

$$(e^x+1)\,e^x \leq 2 \qquad \underline{\underline{e^x = t}}$$

$$(t+1)\,t \leq 2$$

$$t^2 + t - 2 \leq 0$$

t		-2		1	
t^2+t-2	$+$		$-$		$+$

$t \in [-2, 1)$

$-2 \leq t \leq 1$

$-2 \leq e^x \leq 1$

$e^x \geq -2$ και $e^x \leq 1$

Αοριστη $\ln e^x \leq \ln 1$

✓ $\underline{\underline{x \leq 0}}$

55. $f(x) = \ln(e^x - 1)$

(α) Πρεπει $e^x - 1 > 0$

$e^x > 1$

$\ln e^x > \ln 1$

$x > 0$

$D_f = (0, +\infty)$.

(β) $f(x) + x = \ln 2$

$\ln(e^x - 1) + x = \ln 2$

$\ln(e^x - 1) + \ln e^x = \ln 2$

$\ln((e^x - 1) \cdot e^x) = \ln 2$

$e^x = t$

$(e^x - 1)e^x = 2$

$(t - 1)t = 2$

$t^2 - t - 2 = 0$

$t = 2$ $\qquad$ $t = -1$

$e^x = 2$ $\qquad$ $e^x = -1$

Αδυνατο.

$\ln e^x = \ln 2$

$x = \ln 2$

54. $f(x) = a(\log x)^4 + 8(\log x)^2 \cdot \log(100x)$

$f(10) = 25$

ⓐ Νδο $a = 1$

$f(10) = \alpha \cdot (\log 10)^4 + 8(\log 10)^2 \cdot \log(100 \cdot 10)$

$f(10) = \alpha \cdot 1 + 8 \cdot 1 \cdot \log 10^3$

$f(10) = \alpha + 8 \cdot 3 = 24 + \alpha$

$25 = \alpha + 24$

$\alpha = 1$

$f(x) = \log^4 x + 8\log^2 x\,(\log 100 + \log x)$

$$\boxed{f(x) = \log^4 x + 8\log^2 x\,(2 + \log x)}$$

ⓑ i) $f(x) = \log^4 x + 16\log^2 x + 8\log^3 x$

$f(x) = \left[\log^2 x + 4\log x\right]^2$

iii) $f(x) = 0 \Rightarrow \log^2 x + 4\log x = 0$

$\log x(\log x + 4) = 0 \Rightarrow \log x = 0$ ή $\log x = -4$

$\boxed{x = 1}$ $\boxed{x = 10^{-4}}$

Σελ 355

Ενοτητα 26

53. $P(x) = 5x^3 + 8x^2 + \alpha$

(α) Αν το $P(x)$ εχει παραγοντα το $x+2$

$\Rightarrow P(-2) = 0$

$$P(-2) = 5\cdot(-2)^3 + 8(-2)^2 + \alpha = 0$$

$$-40 + 8\cdot 4 + \alpha = 0$$

$$-40 + 32 + \alpha = 0$$

$$\underline{\alpha = 8}$$

$$\boxed{P(x) = 5x^3 + 8x^2 + 8}$$

(β) $P(x) = 0$

$5x^3 + 8x^2 + 8 = 0$

$$\begin{array}{cccc|c} 5 & 8 & 0 & 8 & -2 \\ \downarrow & -10 & 4 & -8 & \\ 5 & -2 & 4 & 0 & \end{array}$$

$\Rightarrow (x+2)(5x^2 - 2x + 4) = 0$

$\Delta < 0$

$\underline{\underline{x = -2}}$

(γ) $$\frac{(\ln^2 x - 3)^3}{(\ln^2 x - 3)^2 + 1} > -\frac{8}{5}$$

$\ln^2 x - 3 = t$

$$\frac{t^3}{t^2+1} > -\frac{8}{5} \iff 5t^3 > -8(t^2+1)$$

$5t^3 > -8t^2 - 8$

$5t^3 + 8t^2 + 8 > 0$

$P(t) > 0$

$(t+2)\overset{\oplus}{(5t^2 - 2t + 4)} > 0$

$\Delta < 0$

$t + 2 > 0$

$t > -2$

$\ln^2 x - 3 > -2$

$\ln^2 x > 1$ $\qquad$ $\boxed{\ln x = t}$

$t^2 > 1$

$t^2 - 1 > 0$

t		-1	
t^2-1	$+$	$-$	$+$

$t < -1$ ή $t > 1$

$\ln x < -1$ $\qquad$ $\ln x > 1$

$x < e^{-1}$ $\qquad$ $\underline{\underline{x > e}}$

$\underline{\underline{x < \frac{1}{e}}}$

B1 B2

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε την παράσταση $f(\ln 2) + f(\ln\frac{1}{2})$.

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $f(\eta\mu\theta) + f(\eta\mu(\pi+\theta)) = 0$, για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ με $\eta\mu\theta \neq 0$.

(Μονάδες 7)

(α) Πρεπει $x \neq 0$ αρα $A_f = \mathbb{R}^*$

(β) Περιττη

$$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x} = \frac{x^2+1}{-x} = -\frac{x^2+1}{x} = -f(x)$$

Αν $x \in D_f$ και $-x \in D_f$ αρα εχω συμμετρικο διαστημα. Αρα περιττη.

(γ) $f(\ln 2) + f(\ln\frac{1}{2}) = f(\ln 2) + f(-\ln 2) \overset{(*)}{=}$

$\to \ln\frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2$

(*) $f(\ln 2) - f(\ln 2) = 0$

⑧ Ndo $f(n r \theta) + f(n r (\pi+\theta)) = 0$

$$f(n r \theta) + f(-n r \theta) = 0$$

$$f(n r \theta) - f(n r \theta) = 0$$

$$0 = 0.$$

B_1 B_2.

ΘΕΜΑ 4

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $4x^2-1$ δίνει πηλίκο $3x-2$ και υπόλοιπο 1.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x)=1$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $P(\log 5)\neq 1$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$.

(Μονάδες 5)

(α) $P(x) = (4x^2-1)(3x-2)+1$

$P(x)=1 \iff (4x^2-1)(3x-2)+1 = 1$

$(4x^2-1)(3x-2) = 0$

$4x^2-1 = 0$ ή $3x-2 = 0$

$\boxed{x=\frac{1}{2}}$ $\boxed{x=-\frac{1}{2}}$ $\boxed{x=\frac{2}{3}}$

(β) Έστω $P(\log 5) = 1$

$\log 5 = \frac{1}{2}$ ή $\log 5 = -\frac{1}{2}$ ή $\log 5 = \frac{2}{3}$

$5 = 10^{1/2}$ $\quad$ $5 = 10^{-1/2}$ $\quad$ $5 = 10^{2/3}$

$5 = \sqrt{10}$ $\quad$ $5 = \frac{1}{\sqrt{10}}$ $\quad$ $5 = \sqrt[3]{10^2}$

× × ×

Άρα $P(\log 5) \neq 1$.

(γ) $P(x) = (4x^2-1)(3x-2)+1$ $\qquad (-1,0)$

$P(-1) = (4-1)(-5)+1 = -15+1 = -14$

$P(0) = -1\cdot(-2)+1 = 3.$

$P(-1)\,P(0) < 0$

Αρα η εξισωση $P(x)=0$ εχει

Τουλαχιστον μια ριζα στο $(-1,0)$

Β1. Β2.

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = 4^x$ και $g(x) = 2^x - \frac{1}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο A, του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g, με εξαίρεση το σημείο A.

(Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις f και g στο ίδιο σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 7)

(α) $f(x) = g(x) \Rightarrow 4^x = 2^x - \frac{1}{4} \Rightarrow (2^x)^2 = 2^x - \frac{1}{4}$

$\boxed{2^x = t}$

$t^2 = t - \frac{1}{4} \Rightarrow 4t^2 = 4t - 1$

$4t^2 - 4t + 1 = 0$

$t = \frac{1}{2}$ ή $2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2^x = 2^{-1}$ $\boxed{x = -1}$

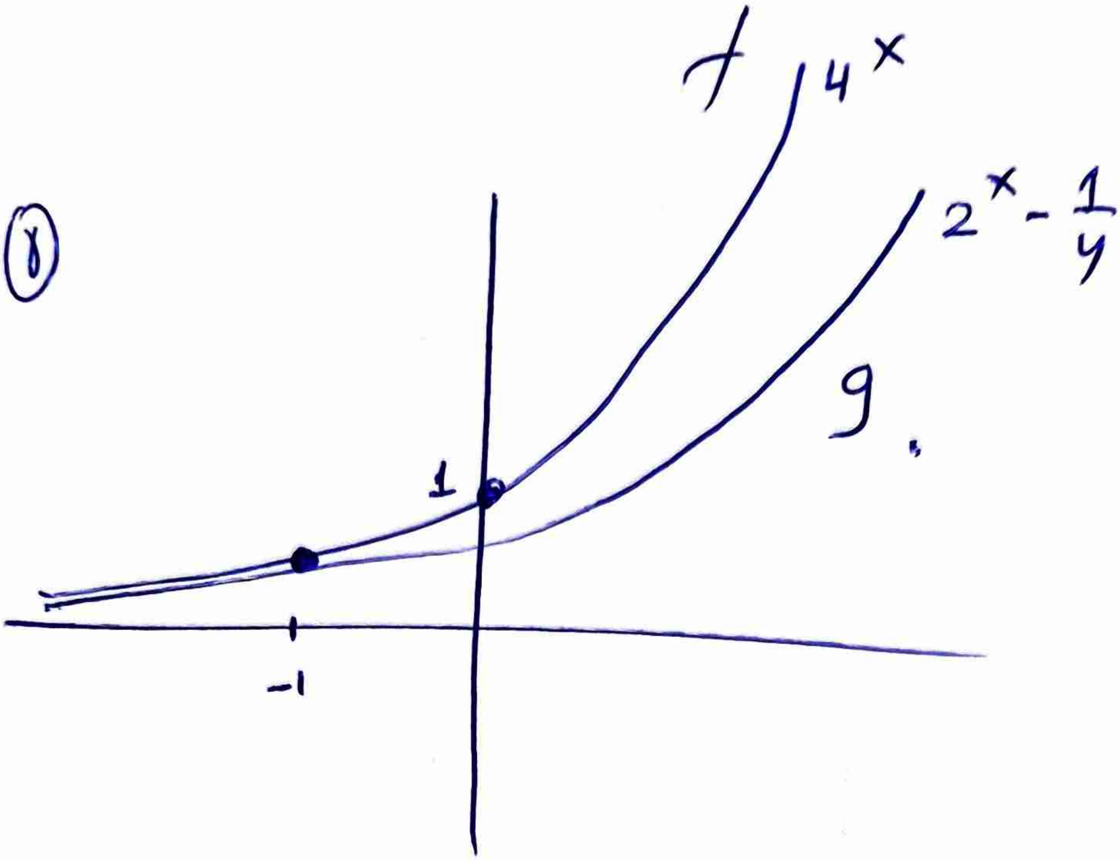
$A\left(-1, \frac{1}{4}\right)$

(β) $f(x) > g(x) \Rightarrow 4^x > 2^x - \frac{1}{4} \Rightarrow (2^x)^2 - 2^x + \frac{1}{4} > 0$

$4 \cdot (2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 1 > 0 \rightarrow (2 \cdot 2^x - 1)^2 > 0$

✓

(γ)



B1 .   B2

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\dfrac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^{x}-12}$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\dfrac{\omega^3-8}{\omega^2+4\omega-12}>0$ είναι το $(-6,2)\cup(2,+\infty)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}-\{\ln 2\}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και του άξονα xx'.

(Μονάδες 9)

ⓐ $\dfrac{\omega^3-8}{\omega^2+4\omega-12}>0 \Rightarrow \dfrac{(\omega-2)(\omega^2+2\omega+4)}{\omega^2+4\omega-12}>0$

ω		-6		2	
$\omega-2$	$-$		$-$	0	$+$
$\Delta<0$ $\omega^2+2\omega+4$	$+$		$+$		$+$
$\omega^2+4\omega-12$	$+$	0	$-$	0	$+$
$P(\omega)$	$-$		$+$		$+$

$\omega\in(-6,2)\cup(2,+\infty)$

ⓑ πρεπει $\dfrac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^{x}-12}>0$ και $e^{2x}+4e^{x}-12\neq 0$

Θετω $e^x=\omega$

$\dfrac{\omega^3-8}{\omega^2+4\omega-12}>0$

$-6<\omega<2$ ή $\omega>2$

$\underbrace{-6<e^x}_{\checkmark}<2$ ή $e^x>2$

$e^x<2$ $\qquad$ $\underline{\underline{x>\ln 2}}$

$\underline{\underline{x<\ln 2}}$

$D_f=\mathbb{R}-\{\ln 2\}$

$\rightarrow \quad e^{2x}+4e^x-12=0$

$e^x=w$

$w^2+4w-12=0$

$w=-6 \qquad w=2$

$e^x=-6 \qquad e^x=2$

Αδυνατη $\qquad \underline{\underline{x=\ln 2}}$

⑧ $f(x)=0$

$$\ln \frac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^x-12}=0$$

$$\frac{e^{3x}-8}{e^{2x}+4e^x-12}=1 \qquad \boxed{e^x=t}$$

$$\frac{t^3-8}{t^2+4t-12}=1 \quad \Rightarrow t^3-8=t^2+4t-12$$

$t^3-t^2-4t+4=0$

$t^2(t-1)-4(t-1)=0$

$(t-1)(t^2-4)=0$

$t=1 \qquad t=2 \qquad t=-2$

$\boxed{x=0}$ $e^x=1$ $\qquad$ ~~$e^x=2$~~ $\qquad e^x=-2$

~~$x=\ln 2$~~ $\qquad$ Αδυνατη.

$f(x) = \ln x,\ x>0 \qquad g(x) = \frac{x-1}{x+1}$

~~$x \neq -1$~~

$x \neq -1$

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

~~$x \in D_g$~~

$\boxed{x \neq -1}$

$g(x) \in D_f$

$\frac{x-1}{x+1} > 0$

x		−1		1	
x−1	−		−		+
x+1	−		+		+
−	+		−		+

$x \in (-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

$D_{f\circ g} = (-\infty,-1)\cup(1 \qquad)$

Επομενο Μαθημα

Αυριο Πεμπτη 2/4 λυνουμε
Δ' Θεματα λογαριθμων.

Για Μ. Τεταρτη 8/4.

Σελ 353

43
44
45
46
47
48
49
50
51
52