ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\log\frac{4^x-1}{2^x+5}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\log 3-\log 7$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>\log 3-\log 7$.

(Μονάδες 9)

α) $\frac{4^x-1}{2^x+5}>0$ και $2^x+5\neq 0$ ✓

$+$

$4^x-1>0 \Rightarrow 4^x>1 \Rightarrow 4^x>4^0 \Rightarrow x>0$

$D_f=(0,+\infty)$

β) $f(x)=\log 3-\log 7$

$\log\frac{4^x-1}{2^x+5}=\log\frac{3}{7}$

$\frac{4^x-1}{2^x+5}=\frac{3}{7} \Leftrightarrow ((2^x)^2-1)7=3(2^x+5)$

$2^x=k$

$(k^2-1)7=3(k+5)$

$7k^2-7=3k+15$

$7k^2-3k-22=0$

$k=2$

$2^x=2$

$x=1$

$k=-\frac{22}{14}$

$2^x=-\frac{22}{14}$

Αδύν.

(γ) $f(x) > \log 3 - \log 7$

$$7k^2 - 3k - 22 > 0$$

k	$-11/7$ 2
$7k^2-3k-22$	$+$ 0 $-$ 0 $+$

$k < -\frac{11}{7}$ ή $k > 2$

$2^x < -\frac{11}{7}$ $2^x > 2^1$

Αδύν $x > 1$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha\cdot 2^x+\beta$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(2,13)$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β.

(Μονάδες 7)

Αν $\alpha=5$ και $\beta=-7$,

β) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)>4^x-3$.

(Μονάδες 7)

α) $f(x)=\alpha\cdot 2^x+\beta$

$f(1)=3 \Rightarrow \alpha\cdot 2+\beta=3 \Rightarrow \boxed{2\alpha+\beta=3}$ $\ominus$

$f(2)=13 \Rightarrow \alpha\cdot 2^2+\beta=13 \Rightarrow \boxed{4\alpha+\beta=13}$

$-2\alpha=-10$ $\quad \underline{\alpha=5}$ $\quad \underline{\beta=-7}$

$\boxed{f(x)=5\cdot 2^x-7}$

β) $f(0)=5\cdot 2^0-7=5-7=-2$ $\quad K(0,-2)$

γ) $x_1<x_2 \Rightarrow 2^{x_1}<2^{x_2} \Rightarrow 5\cdot 2^{x_1}<5\cdot 2^{x_2}$

$\underbrace{5\cdot 2^{x_1}-7}_{f(x_1)} < \underbrace{5\cdot 2^{x_2}-7}_{f(x_2)}$

$f \nearrow$

8. $f(x) > 4^x - 3$ $\qquad\qquad 2^x = t$

$5 \cdot 2^x - 7 > (2^x)^2 - 3$

$5t - 7 > t^2 - 3$

$t^2 - 5t + 4 < 0$

t		1		4	
t^2-5t+4	$+$		$-$		$+$

$t \in (1, 4)$

$1 < t < 4$

$1 < 2^x < 4$

$2^0 < 2^x < 2^2$

$0 < x < 2$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(e^x-2\right)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)+x=3\ln 2$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)+x\geq 3\ln 2$.

(Μονάδες 9)

α) $f(x)=\ln(e^x-2)$

Πρέπει $e^x-2>0 \Rightarrow e^x>2 \Rightarrow x>\ln 2$

$D_f=(\ln 2,+\infty)$

β) $f(x)+x=3\ln 2$

$\ln(e^x-2)+x=3\ln 2$

$\ln(e^x-2)+\ln e^x=\ln 2^3$

$\ln\left((e^x-2)e^x\right)=\ln 8$

$(e^x-2)e^x=8$ $\qquad$ $\underline{\underline{e^x=t}}$

$(t-2)t=8$

$t^2-2t-8=0$ $\qquad$ $\underline{\underline{x=\ln 4}}$

$t=4 \qquad t=-2$

$e^x=4 \qquad e^x=-2$ Αδύνατη

(γ) $f(x)+x \geq 3\ln 2$

$t^2-2t-8 \geq 0$

t		-2		4	
t^2-2t-8	$+$		$-$		$+$

$t \in (-\infty,-2] \cup [4,+\infty)$

$t \leq -2$ ή $t \geq 4$

$e^x \leq -2$ ή $e^x \geq 4$

Αδύνατη $\quad$ $x \geq \ln 4$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f. (Μονάδες 3)

β) Να προσδιορίσετε το είδος της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f. (Μονάδες 6)

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (Μονάδες 6)

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $E(x) = \frac{1}{2}(x-1)\ln x$, με $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ μπορεί να περιγράψει το εμβαδόν του τριγώνου $ΑΒΓ$, όπου $Α(1,0)$, $Β(x,0)$ και $Γ(x, \ln x)$. (Μονάδες 10)

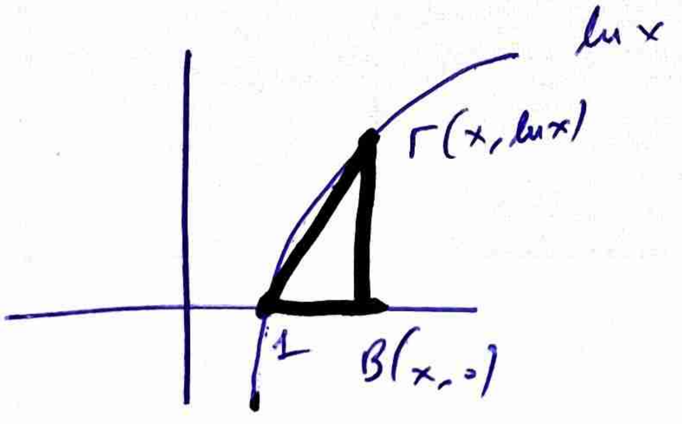
α) $f(x) = \ln|x|$

πρεπει $|x| > 0$ $\quad D_f = \mathbb{R}^*$

β) $f(-x) = \ln|-x| = \ln|x| = f(x)$

$x \in D_f$, $-x \in D_f$ αρα αρτια.

γ) $f(x) = \begin{cases} \ln(-x), & x < 0 \\ \ln x, & x > 0 \end{cases}$

δ) 

$E = \frac{B \cdot υ}{2} = \frac{(x-1)\ln x}{2}$

ΘΕΜΑ 4

α) Να λυθεί η ανίσωση $\dfrac{x-2}{x+1}>0$.

(Μονάδες 07)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(\dfrac{\alpha-2}{\alpha+1}\right)^x$, με $x\in\mathbb{R}$.

i. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι καλώς ορισμένη.

(Μονάδες 03)

ii. Για ποιες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα;

(Μονάδες 10)

iii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες η συνάρτηση f είναι σταθερή.

(Μονάδες 05)

α) $\dfrac{x-2}{x+1}>0$

x		-1		2	
x-2	−		−	0	+
x+1	−	0	+		+
P(x)	+		−		+

$x\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

β) i) Για να ειναι καλως ορισμενη πρεπει να εχει πεδιο ορισμου το R.

$\dfrac{a-2}{a+1}>0$ $\quad a\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$

ii) $0<\dfrac{a-2}{a+1}<1$

$\dfrac{a-2}{a+1}>0$ και $\dfrac{a-2}{a+1}<1$

$a\in(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$ $\quad \dfrac{a-2}{a+1}-\dfrac{a+1}{a+1}<0 \Rightarrow \dfrac{-3}{a+1}<0$

$a+1>$ [illegible]

$a>$ [illegible]

iii). $\frac{\alpha-2}{\alpha+1}=1$

$\cancel{\alpha}-2=\cancel{\alpha}+1$

Αδυνατη.

Δεν υπαρχουν $\alpha \in \mathbb{R}$

ωστε να ειναι σταθερη.

ΘΕΜΑ 4

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη και περιττή συνάρτηση και $g(x)=e^x-1, x\in\mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$, τότε:

α) Να βρείτε το $f(1)$ και να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης f και να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το O.

(Μονάδες 7)

δ) Έστω $f(x)=-2x^3$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης h της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από την C_f αν την μετατοπίσουμε 2 μονάδες αριστερά και μια μονάδα πάνω.

(Μονάδες 6)

α) Γνωρίζω ότι $f(-1)=2$

αφού f περιττή $f(-x)=-f(x)$

$f(-1)=-f(1)$

Αφού f γν. μονότονη $2=-f(1)$

$\Rightarrow f\nearrow$ ή $f\searrow$ $\quad f(1)=-2$

$-1<1 \Leftrightarrow \underset{2}{f(-1)} > \underset{-2}{f(1)}$ $\quad f\searrow$

β) $f(-x)=-f(x)$

$x=0$

$f(0)=-f(0)$

$2f(0)=0$

$f(0)=0$.

(γ)

x		0	
$f(x)$	$\searrow +$	0	$\searrow -$

$x<0 \Rightarrow f(x)>f(0) \Rightarrow f(x)>0$

$x>0 \Rightarrow f(x)<f(0) \Rightarrow f(x)<0$

$f(x)=g(x)$

$f(x)=e^x-1$

Προφανής ρίζα $h(0)=0$

$\underbrace{f(x)-e^x+1}_{h(x)}=0$

$h(x)=0$

• $x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

• $x_1<x_2 \Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2} \Rightarrow -e^{x_1}>-e^{x_2} \Rightarrow -e^{x_1}+1>-e^{x_2}+1$

⊕

$f(x_1)-e^{x_1}+1>f(x_2)-e^{x_2}+1$

$h(x_1)>h(x_2)$

$h \downarrow$

άρα το $x=0$ μοναδική ρίζα

(δ) $f(x)=-2x^3$

$\boxed{h(x)=1-2(x+2)^3}$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε την παράσταση $f(\ln 2)+f(\ln\frac{1}{2})$.

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $f(\eta\mu\theta)+f(\eta\mu(\pi+\theta))=0$, για κάθε $\theta\in\mathbb{R}$ με $\eta\mu\theta\neq 0$.

(Μονάδες 7)

ⓐ Πρεπει $x\neq 0$ αρα $A_f=\mathbb{R}^*$

ⓑ Περιττη

$f(-x)=\dfrac{(-x)^2+1}{-x}=\dfrac{x^2+1}{-x}=-\dfrac{x^2+1}{x}=-f(x)$

Αν $x\in D_f$ και $-x\in D_f$ αρα εχω συμμετρικο διαστημα. Αρα περιττη.

ⓖ $f(\ln 2)+f(\ln\frac{1}{2})=f(\ln 2)+f(-\ln 2)\overset{*}{=}$

$\rightarrow \ln\frac{1}{2}=\ln 1-\ln 2=-\ln 2$

$\overset{*}{=} f(\ln 2)-f(\ln 2)=0$

8 Also $f(nr\theta) + f(nr(n+\theta)) = 0$

$$f(nr\theta) + f(-nr\theta) = 0$$

$$f(nr\theta) - f(nr\theta) = 0$$

$$0 = 0.$$