ΘΕΜΑ Α

Α1. Πότε μια συνάρτηση f : Α → ℝ λέγεται συνάρτηση 1-1;

Α2. Έστω Α ένα μη κενό υποσύνολο του ℝ. Πότε μια συνάρτηση f : Α → ℝ αντιστρέφεται και πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτησή της;

Α3. Να αποδείξετε το **Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών**.

ΘΕΜΑ Β

Για καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις να γράψετε **Σ** αν είναι σωστή και **Λ** αν είναι λανθασμένη.

1. Κάθε κατακόρυφη ευθεία έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.

2. Αν f, g είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$\frac{f}{g}$$

είναι το $A \cap B$.

3. Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι $1-1$, αν και μόνο αν για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών της f η εξίσωση $f(x) = y$ έχει ακριβώς μία λύση ως προς x.

4. Αν μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι $1-1$, τότε για την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} ισχύει

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in A \qquad \text{και} \qquad f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in f(A).$$

5. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχουν $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$, ώστε $f(x_1) < f(x_2)$.

ΘΕΜΑ Γ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \sqrt{x-2}\sqrt{x+2} \qquad \text{και} \qquad g(x) = \sqrt{x^2-4}.$$

Να προσδιορίσετε το υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0, \qquad \text{και} \qquad g(x) = \frac{x+2}{x-1}, \quad x < 1.$$

α) Να βρείτε τις συναρτήσεις $f - g$ και $\frac{f}{g}$.

β) Να βρείτε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

3. Έστω

$$f(x) = x^2 - 4x + 4, \qquad x \leq 2.$$

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε την $f^{-1}(x)$.

4. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - x}{x^2 - 1} = 2,$$

τότε:

α) Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$xf(x) = (x^2 - 4)e^x$$

έχει τουλάχιστον μία λύση στο $(-2, 2)$.

ΘΕΜΑ Γ - ΑΣΚΗΣΕΙΣ (συνέχεια)

5. Δίνεται

$$f(x) = e^x + \ln x, \qquad x > 0.$$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$x = e^{7-e^x}$$

έχει μοναδική θετική ρίζα.

6. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [1, 5] \to \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 5)$ τέτοιο ώστε

$$8f(x_0) = 3f(2) + 5f(3).$$

7. Δίνεται **συνεχής** συνάρτηση

$$f:(-\infty, 1] \to \mathbb{R},$$

της οποίας η γραφική παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $A(-1, -2)$ και ισχύει

$$[f(x)]^2 = x^2 - 2x + 1.$$

Να βρείτε τον τύπο της $f(x)$.

A1: supersos

A2: supersos

A3: supersos

B: 1. Σ 2. Λ 3. Σ 4. Σ 5. Λ

Ασκήσεις

1. $f(x) = \sqrt{x-2}\sqrt{x+2} = \sqrt{(x-2)(x+2)} = \sqrt{x^2-4} = g(x)$

D_f

$x-2 \geq 0$ και $x+2 \geq 0$

$x \geq 2$ $\quad x \geq -2$

$D_f = [2, +\infty)$.

D_g

πρεπει $x^2-4 \geq 0$

$x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

Αρα ίσα μονο σε $[2, +\infty)$.

2. ⓐ $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \frac{1}{x} - \frac{x+2}{x-1}$

$D_{f-g} = D_f \cap D_g = (0,1)$

$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{x+2}{x-1}} = \frac{x-1}{x(x+2)}$

• $g(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{x+2}{x-1} \neq 0 \Rightarrow x \neq -2$

$D_{f/g} = (0,1)$

ⓑ $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x)) = \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}} - \frac{x-1}{x+2}$

$x \in D_g$ و $g(x) \in D_f$

$x < 1$ $\quad \frac{x+2}{x-1} > 0$

x		-2		1	
x+2	−	0	+		+
x−1	−		−	0	+
~	+	‖	−	‖	+

$x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$

$D_h = (-\infty, -2)$.

3. $f(x) = x^2 - 4x + 4$, $x \le 2$

$f(x) = (x-2)^2$

(a) $x_1 < x_2 \Rightarrow (x_1-2) < (x_2-2)$

$(x_1-2)^2 > (x_2-2)^2$

$\not f \downarrow$

(B) $y = (x-2)^2$ $\quad y \ge 0$

$\sqrt{y}^2 = (x-2)^2$

$|\sqrt{y}| = |x-2|$ (+) (−)

$\sqrt{y} = -x+2$

$x = 2 - \sqrt{y}$

$f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x}$

Είναι $x \le 2$

$2 - \sqrt{y} \le 2$

$-\sqrt{y} \le 0$ ✓

Β' τρόπο

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- $f(2) = 0$

$D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$

$\{T_f = [0, +\infty)$

$D_{f^{-1}} = [0, +\infty)$

4. ⓐ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-x}{x^2-1} = 2$

Θέτω $g(x) = \dfrac{f(x)-x}{x^2-1}$ οπότε $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 2$

$$f(x) = g(x)(x^2-1) + x$$

$\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} g(x)(x^2-1)+x = 1$

Άρα f συνεχής

$f(1) = 1$

Άρα $f(x) \neq 0$ και συνεχής

$f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$

$f(1) = 1$

$f(x) > 0$.

(B) $x f(x) = (x^2-4)e^x$

$$\underbrace{x f(x) - (x^2-4)e^x}_{h(x)} = 0$$

Η $h(x)$ συνεχής στο $[-2,2]$ με π.σ.σ

$h(-2) = -2f(-2)$
$h(2) = 2f(2)$
$\Big\} h(-2)h(2) = -4\underbrace{f(-2)f(2)}_{(+)}$

ομόσημοι

Άρα $h(-2)h(2) < 0$

Βολζάνο $\exists x_0 \in (-2,2)$

τ.ω $h(x_0) = 0$

5. $f(x) = e^x + \ln x, \quad x > 0$

(α) $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$

$x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2$

(+) $f(x_1) < f(x_2)$

$f \nearrow$

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\left.\begin{array}{l}\\\\\end{array}\right\} \sum T_f = \mathbb{R}$

(β) $x = e^{7 - e^x}$

$\ln x = 7 - e^x$

$e^x + \ln x = 7$

$f(x) = 7$

∴ f συνεχής

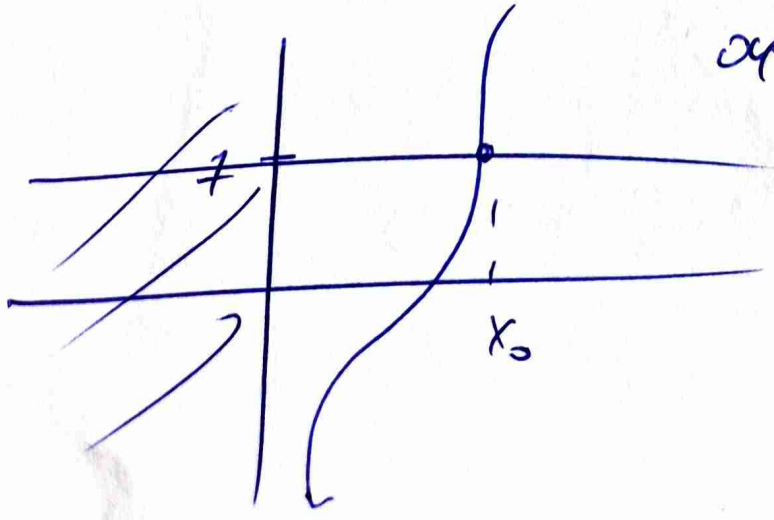
∴ $f \nearrow$

∴ $\sum T_f = \mathbb{R}$

Το $7 \in \sum T_f$

οπότε $\exists!\, x_0$ τ.ω

$f(x_0) = 7$.



$f:[1,5] \to \mathbb{R}$ συνεχής.

Από θεώρημα $m \le f(x) \le M \quad \forall x \in [1,5]$

$m \le f(2) \le M \Rightarrow 3m \le 3f(2) \le 3M$

$m \le f(3) \le M \Rightarrow 5m \le 5f(3) \le 5M$ $\Big\}$ (+)

$$8m \le 3f(2)+5f(3) \le 8M$$

$$\boxed{m \le \frac{3f(2)+5f(3)}{8} \le M}$$

Ο αριθμός $\dfrac{3f(2)+5f(3)}{8} \in \Sigma\tau$

αρα $\exists x_0 \in (1,5)$ τ.ω

$$f(x_0) = \frac{3f(2)+5f(3)}{8}.$$

$$8f(x_0) = 3f(2)+5f(3)$$

7. $f^2(x) = (x-1)^2$

$|f(x)| = |x-1|$ (⊖)

$|f(x)| = 1-x$ (⊖)

Pitu $f(x)$

$-f(x) = 1-x$

$f(x) = x-1$

$f(x) = 0$

$|f(x)| = 0$

$1-x = 0$

$x = 1$

x	1
f(x)	− 0 +

$f(-1) = -2$

Εξάσκηση στις Παραγώγους

50 συναρτήσεις - από βασικό έως απαιτητικό επίπεδο

Ονοματεπώνυμο: _____ **Ημερομηνία:** _____

Οδηγία: Να βρείτε την παράγωγο κάθε συνάρτησης, στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της. Να γράφετε τα βασικά ενδιάμεσα βήματα όπου χρησιμοποιείτε κανόνα γινομένου, πηλίκου ή αλυσίδας.

Επίπεδο 1 - Βασικές παράγωγοι

1. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7x - 2$
2. $f(x) = 2x^5 - 4x^3 + x$
3. $f(x) = x^3 + \dfrac{4}{x}$
4. $f(x) = \sqrt{x} + x^2$
5. $f(x) = \dfrac{3}{x^2} - 2x$
6. $f(x) = e^x + \ln x$
7. $f(x) = 2e^x - 3\ln x$
8. $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$
9. $f(x) = 3\eta\mu x - 2\sigma\upsilon\nu x$
10. $f(x) = x^4 - \dfrac{2}{x^3} + 5$

Επίπεδο 2 - Γινόμενο και πηλίκο

11. $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - 2x)$
12. $f(x) = x^2 e^x$
13. $f(x) = (2x - 1)\ln x$
14. $f(x) = x\,\eta\mu x$
15. $f(x) = (x^2 + 3)\,\sigma\upsilon\nu x$
16. $f(x) = \sqrt{x}\,\ln x$
17. $f(x) = e^x\,\eta\mu x$
18. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$
19. $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x^2 + 1}$
20. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

Επίπεδο 3 - Σύνθετες συναρτήσεις

21. $f(x) = (3x - 2)^5$
22. $f(x) = \sqrt{2x + 1}$
23. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 4}$
24. $f(x) = e^{2x-1}$
25. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

$5(3x-2)^4 \cdot (3x-2)'$

6809625

63

Εξάσκηση στις Παραγώγους - συνέχεια

Επίπεδο 3 - Σύνθετες (συνέχεια)

26. $f(x) = \eta\mu(3\bar{x})$

27. $f(x) = \sigma\upsilon\nu(x^2)$

28. $f(x) = \varepsilon\varphi(2x+1)$

29. $f(x) = (x^2 - 3x + 1)^4$

30. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$

Επίπεδο 4 - Συνδυασμοί κανόνων

31. $f(x) = e^{x^2}$

32. $f(x) = \ln(3x^2 + 1)$

33. $f(x) = \eta\mu^2 x$

34. $f(x) = \sigma\upsilon\nu^3 x$

35. $f(x) = \sqrt{1 + e^x}$

36. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$

37. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$

38. $f(x) = e^{\eta\mu x}$

39. $f(x) = \ln(1 + \eta\mu x)$

40. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}$

Επίπεδο 5 - Απαιτητικές

41. $f(x) = \dfrac{(x^2+1)^3}{x-1}$

42. $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2+1}$

43. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2+1}$

44. $f(x) = (x^2+1)e^{3x}$

45. $f(x) = (2x-1)^3\sqrt{x^2+1}$

46. $f(x) = \dfrac{\eta\mu(x^2+1)}{x}$

47. $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}\right)$

48. $f(x) = e^{2x}\,\sigma\upsilon\nu(3x)$

49. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2+1}{x^2+4}}$

50. $f(x) = [\ln(x^2+1)]^2$

Παραγωγίσαμε

1. $f(x) = 3x^4 - 5x^2 + 7x - 2$

$f'(x) = 12x^3 - 10x + 7$

2. $f(x) = 2x^5 - 4x^3 + x$

$f'(x) = 10x^4 - 12x^2 + 1$

3. $f(x) = x^3 + \frac{4}{x}$

$f'(x) = 3x^2 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

4. $f(x) = \sqrt{x} + x^2$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2x$

5. $f(x) = \frac{3}{x^2} - 2x$

$$f'(x) = \frac{-3 \cdot 2x}{x^4} - 2$$

6. $f(x) = e^x + \ln x$

$$f'(x) = e^x + \frac{1}{x}$$

7. $f(x) = 2e^x - 3\ln x$

$$f'(x) = 2e^x - 3 \cdot \frac{1}{x}$$

8. $f(x) = \sin x + \cos x$

$f'(x) = \cos x - \sin x$

9. $f(x) = 3\sin x - 2\cos x$

$f'(x) = 3\cos x - 2(-\sin x)$

10. $f(x) = x^4 - \frac{2}{x^3} + 5$

$f'(x) = 4x^3 - \frac{2 \cdot 3x^2}{x^6} + 0$

11. $f(x) = (x^2+1)(x^3-2x)$

$f'(x) = 2x(x^3-2x) + (x^2+1)(3x^2-2)$

12. $f(x) = x^2 e^x$

$f'(x) = 2x\ e^x + x^2 \cdot e^x$

13. $f(x) = (2x-1)\ln x$

$f'(x) = 2\ln x + (2x-1)\frac{1}{x}$

14. $f(x) = x \sin x$

$f'(x) = \sin x + x \cos x$

15. $f(x) = (x^2+3)\cos x$

$f'(x) = 2x \cdot \cos x + (x^2+3)(-\sin x)$

16. $f(x) = \sqrt{x}\ \ln x$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \ln x + \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x}$

17. $f(x) = e^x \sin x$

$f'(x) = e^x \cdot \sin x + e^x \cdot \cos x$

18. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+2}$

$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - (x^2-1)\cdot 1}{(x+2)^2}$$

19. $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2+1}$

$$f'(x) = \frac{3\cdot(x^2+1) - (3x+1)\,2x}{(x^2+1)^2}$$

20. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x}{x^2}$$

21. $f(x) = (3x-2)^5$

$(x^5)' = 5x^4$

$f'(x) = 5(3x-2)^4 \cdot (3x-2)'$

$f'(x) = 5(3x-2)^4 \cdot 3$

22. $f(x) = \sqrt{2x+1}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{2x+1}} \cdot (2x+1)'$

$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x+1}}$

23. $f(x) = \frac{1}{x^2+4}$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$f'(x) = -\frac{1}{(x^2+4)^2} \cdot (x^2+4)'$

$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+4)^2}$

26. $f(x) = \tan 3x$

$f'(x) = \sec 3x \cdot 3$

27. $f(x) = \cos(x^2)$

$f'(x) = -\sin(x^2) \cdot 2x$

28. $f(x) = \ln(2x+1)$

$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(2x+1)} \cdot 2$

29. $f(x) = (x^2-3x+1)^4$

$f'(x) = 4(x^2-3x+1)^3 (2x-3)$

$(x^4)' = 4x^3$

30. $f(x) = \sqrt{x^2+4x+5}$

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(x)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+4x+5}} \cdot (2x+4)$

31. $f(x) = e^{x^2}$

$(e^x)' = e^x$

$f'(x)\ e^{x^2} \cdot x^{2\prime} = e^{x^2} \cdot 2x$

32. $f(x) = \ln(3x^2+1)$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$f'(x) = \frac{1}{3x^2+1} \cdot (3x^2+1)'$

$= \frac{1}{3x^2+1} \cdot 6x$

33. $f(x) = \text{np}^2 x$ $\qquad (x^2)' = 2x$

$$f'(x) = 2\,\text{np}\,x\,(\text{np}\,x)'$$

$$f'(x) = 2\,\text{np}\,x\,\cos x$$

34. $f(x) = \cos^3 x$

$$= 3\cos^2 x\,(\cos x)'$$

$$= 3\cos^2 x \cdot (-\text{n}\mu x)$$

35. $f(x) = \sqrt{1+e^x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+e^x}}\,(1+e^x)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+e^x}}\,e^x$$

36. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x+3}}$ $\qquad \left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$

$$f'(x) = -\frac{1}{2x+3} \cdot \left(\sqrt{2x+3}\right)' = -\frac{1}{2x+3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x+3}}\,2.$$

47. $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x^2+1}{x-1}} \cdot \left(\frac{x^2+1}{x-1}\right)'$$

$$f'(x) = \frac{x-1}{x^2+1} \cdot \left(\frac{2x(x-1) - (x^2+1)}{(x-1)^2}\right)$$

40. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x+1}$

$$f'(x) = \frac{(\sqrt{1+x^2})'(x+1) - \sqrt{1+x^2}(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} 2x (x+1) - \sqrt{1+x^2} \cdot 1}{(x+1)^2}$$

50. $f(x) = \ln^2(x^2+1) = \ln(x^2+1)^2$

$$f'(x) = 2\ln(x^2+1)\left(\ln(x^2+1)\right)'$$

$$f'(x) = 2\ln(x^2+1)\frac{1}{x^2+1}2x$$

$$[\ln f(x)]' = \frac{1}{f(x)} f'(x)$$

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} f'(x)$$

$$(\operatorname{tg} f(x))' = \frac{1}{\cos^2 f(x)} f'(x)$$

$$(\operatorname{ctg} f(x))' = -\frac{1}{\sin^2 f(x)} f'(x)$$

$$\left(e^{f(x)}\right)' = e^{f(x)} f'(x)$$

$$(f^2(x))' = 2 f(x) f'(x)$$

$$[f^5(x)]' = 5 f^4(x) f'(x)$$