

53.

$$P(x) = 5x^3 + 8x^2 + a.$$

$$(a) \quad P(-2) = 0 \Rightarrow 5 \cdot (-2)^3 + 8(-2)^2 + a = 0$$

$$-40 + 32 + a = 0$$

$$P(x) = 5x^3 + 8x^2 + 8$$

$$\underline{\underline{a = 8}}$$

$$(B) \quad P(x) = 0$$

$$\begin{array}{ccccccc} 5 & 8 & 0 & 8 & (-2) & & \\ \downarrow & -10 & 4 & -8 & & & \\ 5 & -2 & 4 & 0 & & & \end{array}$$

$$(x+2)(5x^2 - 2x + 4) = 0$$

$$\underline{\underline{x = -2}}$$

$$(I) \quad \frac{(\ln^2 x - 3)^3}{(\ln^2 x - 3)^2 + 1}$$

$$> -\frac{8}{5}$$

$$, \underline{\underline{x > 0}}$$

$$\underline{\underline{(\ln^2 x - 3) = t}}$$

$$\frac{t^3}{t^2 + 1} > -\frac{8}{5}$$

$$5t^3 > -8(t^2 + 1)$$

$$\Rightarrow 5t^3 + 8t^2 + 8 > 0$$

$$P(t) > 0$$

t	-?	
$t+2$	-	+
$5t^2-2t+4$	+	+
$P(t)$	-	+

$$t > -2$$

$$\ln^2 x - 3 > -2$$

$$\ln^2 x > 1$$

$$\ln^2 x > 1^2$$

$$|\ln x| > |1| \text{ } \oplus$$

$$|\ln x| > 1$$

$$\ln x > 1$$

$$e^{\ln x} > e^1$$

$$\underline{\underline{x > e}}$$

∨

$$\ln x < -1$$

$$e^{\ln x} < e^{-1}$$

$$x < \frac{1}{e}$$

$$\underline{\underline{x < \frac{1}{e}}}$$

$$x \in (-\infty, \frac{1}{e}) \cup (e, +\infty).$$

opul $x > 0 \Rightarrow x \in (0, \frac{1}{e}) \cup (e, +\infty)$

! 55. $f(x) = \ln(e^x - 1)$

а) Пусть $e^x - 1 > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow x > 0$

$$D_f = (0, +\infty)$$

б) $f(x) + x = \ln 2$

$$\ln(e^x - 1) + x = \ln 2$$

$$\ln(e^x - 1) + \ln e^x = \ln 2$$

$$\ln((e^x - 1)e^x) = \ln 2$$

$$(e^x - 1)e^x = 2$$

$$e^x = t$$

$$(t - 1)t = 2$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$t = 2$$

$$t = -1$$

$$e^x = 2$$

$$e^x = -1$$

$$\underline{\underline{x = \ln 2}}$$

Answer

$$\textcircled{1} \quad f(x^2-1) + x^2 = 1 + \ln 2$$

$$f(\underline{x^2-1}) + \underline{x^2-1} = \ln 2$$

$$f(t) + t = \ln 2$$

$$t = \ln 2$$

$$x^2 - 1 = \ln 2$$

$$x^2 = \ln 2 + 1$$

$$x = \pm \sqrt{\ln 2 + 1}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η παράσταση $A = \ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x-3}\right)$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{\omega^2-1}{\omega-3} > 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $A = -\ln 3$.

(Μονάδες 9)

α) $\frac{\omega^2-1}{\omega-3} > 0$

ω		-1	1	3	
ω^2-1	+	0	-	0	+
$\omega-3$	-	-	-	-	+
$P(\omega)$	-	+	-	+	

$\omega \in (-1, 1) \cup (3, +\infty)$.

β) προσημ $\frac{e^{2x}-1}{e^x-3} > 0$

$e^x < \omega$

$\frac{\omega^2-1}{\omega-3} > 0$

$-1 < \omega < 1$ ή $\omega > 3$

$-1 < e^x < 1$ ή $e^x > 3$

$e^x < 1$

$x > \ln 3$

$x < 0$

$x \in (-\infty, 0) \cup (\ln 3, +\infty)$

$$\textcircled{1} \quad A = -\ln 3$$

$$\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x-3}\right) = -\ln 3$$

$$\ln\left(\frac{e^{2x}-1}{e^x-3}\right) = \ln \frac{1}{3}$$

$$\frac{e^{2x}-1}{e^x-3} = \frac{1}{3}$$

$$e^x = t$$

$$\frac{t^2-1}{t-3} = \frac{1}{3} \quad (\Rightarrow) \quad 3t^2 - \cancel{3} = t - \cancel{3}$$

$$3t^2 - t = 0$$

$$t(3t-1) = 0$$

$$t = 0$$

$$e^x = 0$$

Answer

$$t = \frac{1}{3}$$

$$e^x = \frac{1}{3}$$

$$x \Rightarrow \ln \frac{1}{3}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log(10^x - 1)$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το διάστημα $(0, +\infty)$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) + x = \log(10^{2x} - 10^x)$, $x > 0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε τις συντεταγμένες του μοναδικού κοινού σημείου της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας $y = -x$.

(Μονάδες 6)

α) Πρέπει $10^x - 1 > 0 \Rightarrow 10^x > 1$
 $\log 10^x > \log 1$
 $x > 0 \quad \checkmark$

β) $f(x) > 0 \Rightarrow \log(10^x - 1) > 0$

$$10^{\log(10^x - 1)} > 10^0 \Rightarrow 10^x - 1 > 1$$

$$\Rightarrow 10^x > 2 \Rightarrow \log 10^x > \log 2$$

$$\underline{\underline{x > \log 2}}$$

$$\textcircled{8} \text{ N.S. } f(x) + x = \log(10^{2x} - 10^x)$$

$$\log(10^x - 1) + x = \log(10^x \cdot (10^x - 1))$$

$$\log(10^x - 1) + x = \log 10^x + \log(10^x - 1)$$

$$\log(10^x - 1) + x = x + \log(10^x - 1) \quad \checkmark$$

$$\textcircled{9} f(x) = -x$$

$$\log(10^x - 1) = -x$$

$$10^{\log(10^x - 1)} = 10^{-x}$$

$$10^x - 1 = 10^{-x}$$

$$10^x - 1 = \frac{1}{10^x}$$

$$10^x = t$$

$$t - 1 = \frac{1}{t} \Rightarrow t^2 - t = 1$$

$$\Rightarrow t^2 - t - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 = 5$$

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$t = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$10^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$10^x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$$

$$\log 10^x = \log \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

A Suru!

$$x = \log \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Να αποδείξετε ότι

α) το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$.

(Μονάδες 6)

β) $P(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 2)$.

(Μονάδες 7)

γ) $1 < \log 20 < 2$.

(Μονάδες 6)

δ) $P(\log 20) < 0$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \sqrt{10^x - 2}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = (\log 2, +\infty)$.

(Μονάδες 07)

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \log \sqrt{\frac{10^x}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{\frac{10^x}{3}} = \sqrt{10^x - 2}$ με $x \in (\log 2, +\infty)$.

(Μονάδες 09)

ii. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων, των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - ax^2 + 7x - \beta$, $a, \beta \in \mathbb{R}$.

Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x - 3$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x + 1)$ είναι $v = -16$, τότε:

α) Να υπολογισθούν οι τιμές των a, β .

(Μονάδες 06)

Αν είναι $a = 5$, $\beta = 3$,

β) να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 07)

γ) να λυθεί η ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 06)

δ) Αν $P(\ln k) < 0$, τότε να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού k .

(Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \left(\frac{2-\lambda}{4}\right)^x$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες η f είναι εκθετική συνάρτηση.

(Μονάδες 5)

β) Για ποιες τιμές του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα;

(Μονάδες 7)

γ) Για $\lambda = 0$

i. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 6)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x + 1) = 6$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τον άξονα x' .

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x - 1$.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι αν $\alpha > 0$, τότε η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία $y = x + \alpha$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x$, $x > 0$ και η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(2) + f(4) = \frac{1}{3}f(8)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι από τον άξονα x 'ς και πάνω.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε:

i. Τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία.

(Μονάδες 4)

ii. Για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από την ευθεία.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.

(Μονάδες 05)

β) Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$ και να βρεθεί η ελάχιστη τιμή της.

(Μονάδες 05)

γ) Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση f .

(Μονάδες 10)

δ) Αν $g(x) = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, τότε να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f , με $f(x) = e^{kx}$, $k \geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f(1) - f(0) \geq f(0) - f(-1)$. Πότε ισχύει η ισότητα;

(Μονάδες 08)

β) Να αποδείξετε ότι αν $k > 0$, η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 07)

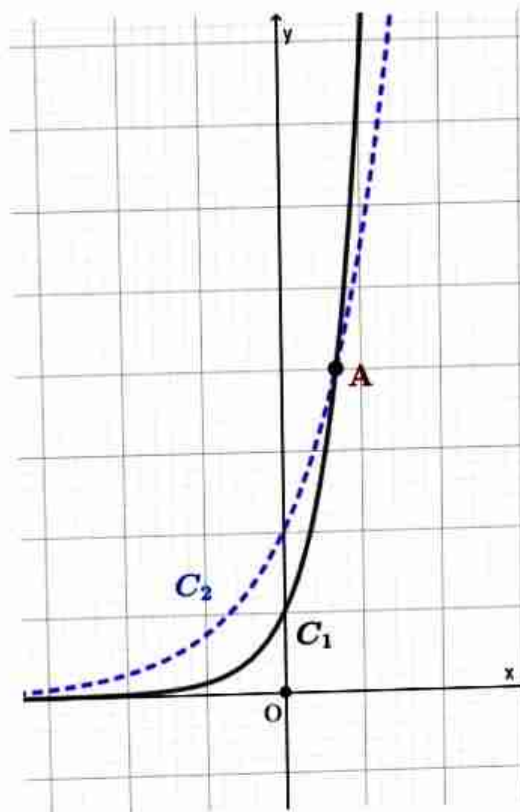
γ)

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύει: $e^{2x} > 2e^x$.

(Μονάδες 05)

ii. Χρησιμοποιώντας το παρακάτω σχήμα, να αντιστοιχίσετε τις C_1, C_2 με τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\varphi(x) = 2e^x$ και $k(x) = e^{2x}$.

Ποιες είναι οι συντεταγμένες του κοινού τους σημείου A;



(Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4

α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .

i. Να αποδείξετε ότι $\sqrt{x^2 + 1} - x > 0$, για κάθε $x \in (-\infty, 0)$.

(Μονάδες 03)

ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 09)

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$, με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} .

i. Να αποδείξετε ότι $g(-x) + g(x) = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 09)

ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων O .

(Μονάδες 04)

ΘΕΜΑ 4

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη και περιττή συνάρτηση και $g(x) = e^x - 1, x \in \mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$, τότε:

α) Να βρείτε το $f(1)$ και να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η C_f διέρχεται από το σημείο $O(0, 0)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε το πρόσημο των τιμών της συνάρτησης f και να αιτιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το O .

(Μονάδες 7)

δ) Έστω $f(x) = -2x^3$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης h της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από την C_f αν την μετατοπίσουμε 2 μονάδες αριστερά και μια μονάδα πάνω.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha}{\alpha+5}\right)^x$.

α) Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι εκθετική και ορίζεται στους πραγματικούς αριθμούς.

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 8)

γ) Για τη μεγαλύτερη τιμή του $a \in \mathbb{Z}$ για την οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα εκθετική με βάση ακέραιο αριθμό, να λύσετε την εξίσωση:

$$f(x) + f(x+1) = 14$$

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^{3x} - 8}{e^{2x} + 4e^x - 12}$.

α) Να αποδείξετε ότι το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $\frac{\omega^3 - 8}{\omega^2 + 4\omega - 12} > 0$ είναι το $(-6, 2) \cup (2, +\infty)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R} - \{\ln 2\}$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της f και του άξονα $x\alpha'$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

α) Να λυθεί η ανίσωση $\frac{x-2}{x+1} > 0$.

(Μονάδες 07)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{\alpha-2}{\alpha+1}\right)^x$, με $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η συνάρτηση f είναι καλώς ορισμένη.

(Μονάδες 03)

ii. Για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα;

(Μονάδες 10)

iii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τιμές του πραγματικού αριθμού α για τις οποίες η συνάρτηση f είναι σταθερή.

(Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

(Μονάδες 3)

β) Να προσδιορίσετε το είδος της συμμετρίας της γραφικής παράστασης της f .

(Μονάδες 6)

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 6)

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $E(x) = \frac{1}{2}(x-1)\ln x$, με $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ μπορεί να περιγράψει το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$, όπου $A(1,0)$, $B(x,0)$ και $\Gamma(x,\ln x)$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

α)

i. Να λύσετε την εξίσωση $x(e^x - 1) = 0$

(Μονάδες 03)

ii. Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ το πρόσημο του γινομένου $x(e^x - 1)$

(Μονάδες 06)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)}$.

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 05)

ii. Να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(\ln 2)$ και $f(-\ln 2)$.

(Μονάδες 06)

iii. Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παρακάτω ισχυρισμός: « η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)}$ είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της». Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 05)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $f(x) = 4^x$ και $g(x) = 2^x - \frac{1}{4}$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο A , του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

(Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g , με εξαίρεση το σημείο A .

(Μονάδες 9)

γ) Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις f και g στο ίδιο σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot 2^x + \beta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από τα σημεία $A(1,3)$ και $B(2,13)$.

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β .

(Μονάδες 7)

Αν $\alpha = 5$ και $\beta = -7$,

β) Να βρείτε το κοινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 4)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

(Μονάδες 7)

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > 4^x - 3$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + x = 3 \ln 2$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) + x \geq 3 \ln 2$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \frac{4^x - 1}{2^x + 5}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \log 3 - \log 7$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) > \log 3 - \log 7$.

(Μονάδες 9)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x|nx}$ και $g(x) = \sqrt{nx}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.

(Μονάδες 4)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f είναι από τη γραφική παράσταση της g και πάνω.

(Μονάδες 5)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f .

γ) i. Να βρείτε τη μονοτονία της.

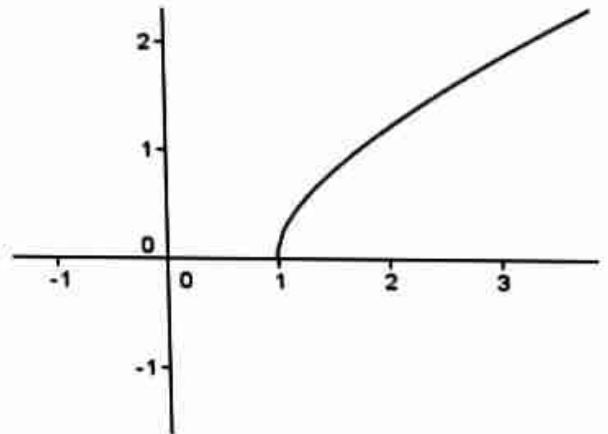
(Μονάδες 4)

ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{5}{3}\right)$ και $f\left(\frac{7}{5}\right)$.

(Μονάδες 5)

δ) Να σχεδιάσετε την ευθεία $y = 1 - x$ και να βρείτε γραφικά τη λύση της εξίσωσης $f(x) = 1 - x$.

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2$, $x \neq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) = \ln x$.

(Μονάδες 6)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{2} \ln x^2$, $x \neq 0$.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική της παράσταση είναι κάτω από την ευθεία $y = 2$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + x$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ και $\alpha \neq 0$, το οποίο έχει 3 ακέραιες ρίζες διαφορετικές ανά δύο.

α) Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες του $P(x)$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ και $\beta = 0$.

(Μονάδες 6)

γ) Με $\alpha = -1$ και $\beta = 0$,

i. να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

(Μονάδες 6)

ii. να αποδείξετε ότι $P(\log \sqrt{10}) > 0$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x) = e^{\ln e} x^3 + 4x^2 \ln \sqrt{e} + 2$.

α) Να δείξετε ότι $P(x) = ex^3 + 2x^2 + 2$.

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ με την ευθεία $\epsilon: y = ex + 4$.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε τα διαστήματα του x που η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$ είναι πάνω από την ευθεία $\epsilon: y = ex + 4$.

(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε το πρόσημο της παράστασης: $P(e) - e^2 - 4$.

(Μονάδες 4)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + (\alpha - 2)x - 6$ το οποίο έχει παράγοντα το $x - 1$.

α) Να βρείτε τον αριθμό α .

(Μονάδες 6)

β) Για $\alpha = 15$

i. να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x^2 - 3x + 2)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 6)

ii. αν $P(x) = (x^2 - 3x + 2)(2x - 3)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 7)

iii. να αποδείξετε ότι $P(\ln 2) < 0$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Ένα πολυώνυμο $P(x)$ διαιρούμενο με το πολυώνυμο $4x^2 - 1$ δίνει πηλίκο $3x - 2$ και υπόλοιπο 1.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 1$.

(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $P(\log 5) \neq 1$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

α) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την εξίσωση $\ln^3 x - \ln^2 x - 2\ln x = 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\ln^3 x - \ln^2 x - 2\ln x > 0$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική της παράσταση έχει κέντρο συμμετρίας το $O(0,0)$.

(Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε την παράσταση $f(\ln 2) + f(\ln \frac{1}{2})$.

(Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $f(\eta\mu\theta) + f(\eta\mu(\pi + \theta)) = 0$, για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ με $\eta\mu\theta \neq 0$.

(Μονάδες 7)

Ελσνν : 2, 3, 5, 6, 9,

Τσερπερ: 16, 18, 27, 22, 24

Νικωλα: 17, 19, 21, 23, 25
26

Ματθωλ: 11, 12, 13, 14, 15.

Τεωργον: 7, 10, 1, 4, 8