18. ⓐ $\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx =$

$\sqrt{x-1} = t$

$t^2 = x-1$

$2t\,dt = dx$

$x = t^2+1$

$= \int_0^1 (t^2+1)\,t\,2t\,dt$

$= \int_0^1 2t^2(t^2+1)\,dt$

$= \int_0^1 2t^4 + 2t^2\,dt$

$= \frac{2}{5}(t^5)_0^1 + \frac{2}{3}(t^3)_0^1$

$= \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{6}{15} + \frac{10}{15} = \frac{16}{15}.$

ⓑ $\int_{-1}^0 x^2\sqrt{x+1}\,dx \quad = \int_0^1 (t^2-1)^2\,t\,2t\,dt$

$\sqrt{x+1} = t$

$x+1 = t^2$

$x = t^2-1$

$dx = 2t\,dt$

$= \int_0^1 2t^2(t^4-2t^2+1)\,dt$

$= \int_0^1 2t^6 - 4t^4 + 2t^2\,dt$

$= \frac{2}{7}(t^7)_0^1 - \frac{4}{5}(t^5)_0^1 + \frac{2}{3}(t^3)_0^1$

$\frac{2}{7} - \frac{4}{5} + \frac{2}{3}.$

8) $\int_0^3 (2x-1)\sqrt{x+1}\,dx = \int_1^2 [2(t^2-1)]\,t\,2t\,dt$

$\sqrt{x+1} = t$

$x+1 = t^2$

$x = t^2-1$

$dx = 2t\,dt$

$= \int_1^2 4t^2(t^2-1)\,dt$

$= \int_1^2 4t^4 - 4t^2\,dt$

$= \frac{4}{5}(t^5)\Big|_1^2 - \frac{4}{3}(t^3)\Big|_1^2$

$= \frac{4\cdot 31}{5} - \frac{28}{3}$

20. (a) $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx = \left(\ln|x^2+x+1|\right)_0^1$

$= \ln 3$

(B) $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx$

$= \frac{1}{2}\left(\ln(x^2+2x+3)\right)_0^1 =$

$= \frac{1}{2}(\ln 6 - \ln 3) = \frac{1}{2}\ln 2.$

17. ⓐ $\int_0^1 (2x+1)(x+1)^5 \, dx =$

$x+1 = t$

$dx = dt$

$x = t-1$

$$= \int_1^2 (2(t-1)+1)\, t^5 \, dt$$

$$= \int_1^2 (2t-1)\, t^5 \, dt$$

$$= \int_1^2 2t^6 - t^5 \, dt.$$

$$= \frac{2}{7}\left(t^7\right)_1^2 - \frac{1}{6}\left(t^6\right)_1^2$$

$$= \frac{2}{7}\left(2^7-1\right) - \frac{1}{6}\left(2^6-1\right)$$

16. ⓐ $\int_0^1 x e^{x^2+1}\,dx =$

Ενότητα 35

$x^2+1=t$

$2x\,dx = dt$

$x\,dx = \frac{1}{2}\,dt$

$= \int_1^2 \frac{1}{2} e^t\,dt = \frac{1}{2}\left(e^t\right)_1^2 = \frac{1}{2}(e^2-e)$

ⓑ $\int_0^1 e^x \ln(1+e^x)\,dx = \int_2^{1+e} \ln t\,dt$

$1+e^x=t$

$e^x\,dx = dt$

$= \int_2^{1+e} 1\cdot \ln t\,dt = \int_2^{1+e} (t)'\ln t\,dt.$

$\left(t\ln t\right)_2^{1+e} - \int_2^{1+e} \cancel{t}\cdot\frac{1}{\cancel{t}}\,dt$

$= (1+e)\ln(1+e) - 2\ln 2 - (t)_2^{1+e}$

$= (1+e)\ln(1+e) - 2\ln 2 - (1+e-2)$

(8) $\int_1^2 \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} \frac{t}{1}\,2t\,dt$

$\sqrt{\ln x} = t$

$\ln x = t^2$

$\frac{1}{x}\,dx = 2t\,dt$

$= 2\int_0^{\sqrt{\ln 2}} t^2\,dt$

$= \frac{2}{3}\left(t^3\right)_0^{\sqrt{\ln 2}}$

$= \frac{2}{3}\left(\sqrt{\ln 2}^{\,3} - 0\right)$

$= \frac{2}{3}\sqrt{\ln 2}^{\,2}\sqrt{\ln 2} =$

$= \frac{2}{3}\ln 2\sqrt{\ln 2}$

Μεθοδος Α, Β

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{2x-1}{x^2-4x+3}\,dx$$

Εχω κλασμα, ο αριθμητης <u>δεν</u> ειναι η παραγωγος του παρονομαστη ο παρονομαστης παραγοντοποιειται.

$$\boxed{\frac{2x-1}{(x-3)(x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1}}$$

$$\cancel{(x-3)(x-1)}\frac{2x-1}{\cancel{(x-3)(x-1)}} = \cancel{(x-3)}(x-1)\frac{A}{\cancel{x-3}} + (x-3)\cancel{(x-1)}\frac{B}{\cancel{x-1}}$$

$$2x-1 = A(x-1) + B(x-3)$$

$$2x-1 = Ax - A + Bx - 3B$$

$$2x - 1 = (A+B)x - A - 3B$$

$$\begin{cases} 2 = A + B \\ -1 = -A - 3B \end{cases} \quad (+) \quad 1 = -2B$$

$$B = -\frac{1}{2}$$

$$A = \frac{5}{2}.$$

$$I = \int_{-1}^{0} \frac{\frac{5}{2}}{x-3} - \frac{\frac{1}{2}}{x-1}\, dx$$

$$I = \frac{5}{2} \int_{-1}^{0} \frac{1}{x-3}\, dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} \frac{1}{x-1}\, dx$$

$$I = \frac{5}{2} \Big(\ln|x-3| \Big)_{-1}^{0} - \frac{1}{2} \Big(\ln|x-1| \Big)_{-1}^{0}$$

$$I = \frac{5}{2} \left(\ln 3 - \ln 4 \right) - \frac{1}{2} \left(- \ln 2 \right)$$

$$I = \frac{5}{2} \ln \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2 .$$

Διαίρεση πολυωνύμων με ίσο βαθμό

$$I=\int_0^1 \frac{5x-3}{x-2}\,dx = \int_0^1 \frac{5(x-2)+7}{x-2}\,dx$$

$$\begin{array}{r|l} 5x-3 & x-2 \\ \cline{2-2} -(5x-10) & 5 \\ \cline{1-1} 7 & \end{array}$$

$$= \int_0^1 \frac{5\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}} + \frac{7}{x-2}\,dx$$

$$= \int_0^1 5\,dx + \int_0^1 \frac{7}{x-2}\,dx$$

$$= 5\,(x)\Big|_0^1 + 7\int_0^1 \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= 5 + 7\left(\ln|x-2|\right)\Big|_0^1$$

$$= 5+7(-\ln 2) = 5-7\ln 2.$$

Διαιρεση πολυωνυμων με αριθμητη που εχει μεγαλυτερο βαθμο.

$$I = \int_0^2 \frac{x^3-2x^2+x-1}{x^2-1}\,dx = \int_0^2 \frac{(x^2-1)(x-2)+2x-3}{x^2-1}\,dx$$

$$\begin{array}{l|l} x^3-2x^2+x-1 & x^2-1 \\ \hline -(x^3-x) & x-2 \\ \hline -2x^2+2x-1 & \\ -(-2x^2+2) & \\ \hline 2x-3 & \end{array}$$

$$= \int_0^2 \frac{\cancel{(x^2-1)}(x-2)}{\cancel{x^2-1}} + \frac{2x-3}{x^2-1}\,dx$$

$$= \int_0^2 x-2\,dx + \int_0^2 \frac{2x-3}{x^2-1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}(x^2)_0^2 - 2(x)_0^2 + J$$

$$= 2-4+J = J-2.$$

$$\bullet\ J = \int_0^2 \frac{2x-3}{x^2-1}\,dx$$ μεθοδο/ A, B.

Ενοτητα 37

$f(0) = 0 \quad f'(0) = 1$ f κυρτη.

$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$y - 0 = x \quad \boxed{y = x}$

α) νδο $\int_0^1 e^x f(x)\,dx > 1$.

Αφου f κυρτη τοτε $f(x) \geq x$

$e^x f(x) \geq x e^x$

$\int_0^1 e^x f(x)\,dx > \int_0^1 x e^x\,dx$

$I = \int_0^1 x e^x\,dx = \int_0^1 x (e^x)'\,dx =$

$= (x e^x)_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot 1\,dx =$

$= e - (e^x)_0^1 = e - (e - 1) = 1.$

(B) $\int_0^{\pi} x\, f(\sigma\upsilon\nu x)\, dx \geq -2$

Αφού f κυρτή $f(x) \geq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(\sigma\upsilon\nu x) \geq \sigma\upsilon\nu x$$

$$x f(\sigma\upsilon\nu x) \geq x\sigma\upsilon\nu x$$

$$\int_0^{\pi} x\, f(\sigma\upsilon\nu x)\, dx \geq \boxed{\int_0^{\pi} x\sigma\upsilon\nu x\, dx}$$

$$\rightarrow \int_0^{\pi} x\,\sigma\upsilon\nu x\, dx = \int_0^{\pi} x\, (\eta\mu x)'\, dx$$

$$= \cancel{\left(x\eta\mu x\right)_0^{\pi}}^{\,0} - \int_0^{\pi} \eta\mu x\, dx$$

$$= -\left(-\sigma\upsilon\nu x\right)_0^{\pi} = \sigma\upsilon\nu\pi - \sigma\upsilon\nu 0$$

$$= -1 - 1 = -2$$

(γ) $\int_0^1 f^2(x)\,dx > \frac{1}{3}$

Γνωρίζω ότι $f(x) \geq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

αφού $x \in (0,1)$ θετική ανισότητα

$$f^2(x) \geq x^2$$

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx > \int_0^1 x^2\,dx$$

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx > \frac{1}{3}\left(x^3\right)_0^1$$

$$\int_0^1 f^2(x)\,dx > \frac{1}{3}$$

8. B $0 < \int_1^e f(\ln x) < e-1$

$f\nearrow$ $f(1)=1$

$f(0)=0$

$1 < x < e$

$\ln 1 < \ln x < \ln e$

$0 < \ln x < 1$

$f\nearrow$

$f(0) < f(\ln x) < f(1)$

$0 < f(\ln x) < 1$

$\int_1^e 0\,dx < \int_1^e f(\ln x)\,dx < \int_1^e 1\,dx$

$0 < \int_1^e f(\ln x)\,dx < (x)_1^e$

$0 < \int_1^e f(\ln x)\,dx < e-1$

17. (a) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^x \, dx < \frac{1}{2}$

- $\ln x \le x - 1$

$x \ln x \le x^2 - x$

$\ln x^x \le x^2 - x$

$x^x \le e^{x^2 - x}$

$\int_{1/2}^{1} x^x \, dx \le \int_{1/2}^{1} e^{x^2 - x} \, dx$ Δεν βγαίνει!

- $\ln x \le x - 1$

$\ln x - x \le -1$

$\ln x - x < 0$

$\ln x < x$

$x \ln x < x^2$

$\ln x^x < x^2$

~~$x^x < e^{x^2}$~~

$\int_{1/2}^{1} x^x \, dx < \int_{1/2}^{1} e^{x^2}$ Δεν βγαίνει

$$x < 1$$

$$\ln x < \ln 1$$

$$\ln x < 0$$

$$x \ln x < 0$$

$$\ln x^x < 0$$

$$x^x < e^0$$

$$x^x < 1$$

$$\int_{1/2}^{1} x^x \, dx < \int_{\frac{1}{2}}^{1} 1 \, dx$$

$$\int_{1/2}^{1} x^x \, dx < (x)_{1/2}^{1}$$

$$\int_{1/2}^{1} x^x \, dx < \frac{1}{2}$$ ✓

(B) νδο $\int_1^{17} x^e \, dx < \int_1^{17} e^x \, dx$

Αρκει νδο $x^e < e^x$

$\ln x^e < \ln e^x$

$e \ln x < x \ln e$

$\frac{\ln x}{x} < \frac{\ln e}{e}$

$\boxed{f(x) < f(e) \quad \text{αρκει νδο}}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

x		e	
f'	$+$		$-$
f	$\nearrow$		$\searrow$

$f(x) \leq f(e)$ ✓

18. (a) $\int_0^1 \ln(e^x - x)\,dx < e - \frac{5}{2}$

- $e^x \geq x+1$

$e^x - x \geq 1$

$\ln(e^x - x) \geq \ln 1$;

$\ln(e^x - x) \geq 0$

$\ln x \leq x - 1$

$\ln(e^x - x) \leq e^x - x - 1$

$\int_0^1 \ln(e^x - x)\,dx < \int_0^1 e^x - x - 1\,dx$

$\int_0^1 \ln(e^x - x)\,dx < (e^x)_0^1 - \frac{1}{2}(x^2)_0^1 - (x)_0^1$

$\int_0^1 \ln(e^x - x)\,dx < e - 1 - \frac{1}{2} - 1$

$\int_0^1 \ln(e^x - x)\,dx < e - \frac{5}{2}$. ✓

B vdo $\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\ln x}\,dx > \ln 2$

$\ln x \leq x-1$

$\dfrac{1}{\ln x} \geqslant \dfrac{1}{x-1}$

$\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\ln x}\,dx > \int_2^4 \frac{1}{x-1}\,dx$

$\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\ln x}\,dx > \Big(\ln|x-1|\Big)_2^4$

$\displaystyle\int_2^4 \frac{1}{\ln x}\,dx > \ln 3 > \ln 2$ ✓

(γ) $\int_0^1 e^{-x^2}\,dx > \frac{2}{3}$

$e^x \geq x+1$

$e^{-x^2} \geq -x^2+1$

$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \geq \int_0^1 1-x^2\,dx$

$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx > (x)_0^1 - \frac{1}{3}(x^3)_0^1$

$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx > 1-\frac{1}{3}$

$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx > \frac{2}{3}$ ✓

19. ⓐ NTS $\int_0^1 \sin^2 x \, dx < \frac{1}{3}$

$|\sin x| \le |x|$

$\sin^2 x \le x^2$

$\int_0^1 \sin^2 x \, dx < \int_0^1 x^2 \, dx$

$\int_0^1 \sin^2 x \, dx < \frac{1}{3} (x^3) \Big|_0^1$

$\int_0^1 \sin^2 x \, dx < \frac{1}{3}$.

ⓑ $\int_0^1 \frac{2 \sin x}{x^2+1} \, dx < \ln 2$.

$\sin x < x \quad \forall x > 0$

$2 \sin x < 2x$

$\frac{2 \sin x}{x^2+1} < \frac{2x}{x^2+1}$

$\int_0^1 \frac{2 \sin x}{x^2+1} \, dx < \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} \, dx$.

$$\int_0^1 \frac{2nrx}{x^2+1}\,dx = \left(\ln(x^2+1)\right)\Big|_0^1$$

$$\int_0^1 \frac{2nrx}{x^2+1}\,dx = \ln 2$$

26. $f(x) \geq e^{-x^2} + 2x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

f κοίλη

Νδο $\frac{2}{3} < \int_0^1 f(x)\,dx < 1$ $\qquad f(0)=0$.

$$f(x) \geq e^{-x^2} + 2x - 1$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx > \int_0 e^{-x^2} + 2x - 1$$ Δω υπολογίζεται

$$f(x) \geq e^{-x^2} + 2x - 1$$

$$\underbrace{f(x) - e^{-x^2} - 2x + 1}_{g(x)} \geq 0 \quad \Rightarrow g(x) \geq 0$$

$g(x) \geq g(0)$

Fermat

$g'(0) = 0$

$$g'(x) = f'(x) + 2x e^{-x^2} - 2$$

$$g'(0) = f'(0) - 2 = 0$$

$$f'(0) = 2$$

$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$

$y - 0 = 2x$

$y = 2x$

f κοίλη

$f(x) \leq 2x$

$\int_0^1 f(x)\,dx < \int_0^1 2x\,dx$

$\int_0^1 f(x)\,dx < (x^2)_0^1$

$\int_0^1 f(x)\,dx < 1$

Άρα $f(x) \geq e^{-x^2} + 2x - 1$

$e^x \geq x + 1$

$e^{-x^2} \geq -x^2 + 1$

$e^{-x^2} + 2x \geq 2x - x^2 + 1$

$f(x) \geq e^{-x^2} + 2x - 1 \geq 2x - x^2$

$f(x) \geq 2x - x^2$

$\int_0^1 f(x)\,dx > \int_0^1 2x - x^2\,dx$

$\int_0^1 f(x)\,dx > (x^2)_0^1 - \frac{1}{3}(x^3)_0^1$

$\int_0^1 f(x)\,dx > 1 - \frac{1}{3}$

Ανισοτητα και ολοκληρωματα

Εστω οτι θελω νδο $\int_a^\beta f(x)\,dx < 4$

<u>Βασικη αρχη</u>

Πρεπει να πατησω πανω σε μια ανισοτητα για την $f(x)$ <u>π.χ</u> $f(x) \le g(x)$ την οποια να ολοκληρωσω δηλαδη

$$f(x) \le g(x)$$

$$\Rightarrow$$

$$\int_a^\beta f(x)\,dx < \int_a^\beta g(x)\,dx$$

$$\int_a^\beta f(x)\,dx < 4$$

Το κρισιμο ερωτημα ειναι πως θα βρω την ανισοτητα αυτη.

Τηρω τα επομενα βηματα με συνεπεια.

1. Τσεκαρω αν στο θεμα μου υπαρχει στα δεδομενα καποια ανισοτητα να πατησω πανω την.

2. Εαν εχω μονοτονια την $f(x)$ χτιζω αναμεσα στα ακρα τοτε

[redacted]

$$\alpha < x < \beta$$

αν $f \uparrow$

$$f(\alpha) < f(x) < f(\beta)$$

$$\int_\alpha^\beta f(\alpha)\,dx < \int_\alpha^\beta f(x)\,dx < \int_\alpha^\beta f(\beta)\,dx$$

3. Εαν εχει Ζητηθει κυρτοτητα ή εχει αναφερθει εφαπτομενη τοτε ψαχνω ανισοτητα με κυρτοτητα και εφαπτομενη.

4. Πατaω στην Βασικη ανισοτητα.

- $e^x \geq x+1$
- $\ln x \leq x-1$
- $|\eta\mu x| \leq |x|$

Αν $x>0$ τοτε $\eta\mu x < x$

Αν $x<0$ τοτε $\eta\mu x > x$

Ολοκληρωματα

1. Απλη παραγουσα π.χ $\int_0^1 x^3 - 2\eta\mu x + e^{-x} dx$

2. Κλασμα.

   1. $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = (\ln|x^2+1|)_0^1$

   2. $\int_0^2 \frac{3x-1}{x^2-1} dx$ Μεθοδοι Α,Β

   3. $\int_0^1 \frac{3x^3-1}{x^2+1} dx$ διαιρεση πολυωνυμ

   4. $\int_0^\pi 2x\,\eta\mu x\, dx$, $\int_0^\pi x^2 \sigma\upsilon\nu x\, dx$, $\int_0^1 x \cdot e^{-x}$,

      $\int_1^e x^3 \ln x\, dx$ παραγοντικη ολοκληρωση

   5. $\int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} dx$ Θετω

Εμβαδον Επιπεδου Χωριου

1. E : C_f, $x'x$, $x=\alpha$, $x=\beta$

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\, dx$$

Το ζητουμενο εδω ειναι το προσημο της f.

Απαραιτητως αντικατασταση μεσα στο απολυτο.

1. Αν η $f(x) \geq 0$ απο την οψη τελειωσαμε.
2. Μονοτονια $f(x)$ δηλαδη $\alpha < x < \beta$

$f \uparrow$

$f(\alpha) < f(x) < f(\beta)$

Βγαζω συμπερασμα

<u>Προσοχη</u>

E : C_f, $x'x$, $x=\alpha$ } Λειπει τουλαχιστον ενα ακρο

ή

E : C_f, $x'x$

Λυνω την $f(x)=0$ να βρω ριζα ωστε να μπει στο ακρο.

Αν στο διαστημα ολοκληρωσης υπαρχει ριζα ρ τοτε $E=\int_{\alpha}^{\beta}|f(x)|dx = \int_{\alpha}^{\rho}|f(x)|dx + \int_{\rho}^{\beta}|f(x)|dx$

2. $E: C_f, C_g, x=\alpha, x=\beta$

$$E = \int_{\alpha}^{\beta} |\underbrace{f(x) - g(x)}_{h(x)}|\,dx$$ όμοια βγάζω άκρα για το προσήμ

3. $E_3: C_f, C_g, y=y_0, x=\alpha, x=\beta$

Έχω οριζόντιο γράφημα

Είτε είναι η ευθεία $y=y_0$

Είτε είναι ο $x'x$

Απαιτείται Σχήμα!

Επομενο Μαθημα

35	37	36
21 αβ	3	2 αβ
22	5	3 αβ
23	6	4 αβ.
24.	7	
	8 αγ	

Την παρασκευη 27/2

Τεστ στα ολοκληρωματα

μονο υπολογισμος