

$$18. \textcircled{a} \int_1^2 x \sqrt{x-1} dx =$$

$$\sqrt{x-1} = t$$

$$t^2 = x-1$$

$$2t dt = dx$$

$$x = t^2 + 1$$

$$= \int_0^1 (t^2+1) t \cdot 2t dt$$

$$= \int_0^1 2t^2(t^2+1) dt$$

$$= \int_0^1 2t^4 + 2t^2 dt$$

$$= \frac{2}{5} (t^5)_0^1 + \frac{2}{3} (t^3)_0^1$$

$$= \frac{2}{5} + \frac{2}{3} = \frac{6}{15} + \frac{10}{15} = \frac{16}{15}$$

$$\textcircled{b} \int_{-1}^0 x^2 \sqrt{x+1} dx$$

$$= \int_0^1 (t^2-1)^2 t \cdot 2t dt$$

$$= \int_0^1 2t^2 (t^4 - 2t^2 + 1) dt$$

$$= \int_0^1 2t^6 - 4t^4 + 2t^2 dt$$

$$= \frac{2}{7} (t^7)_0^1 - \frac{4}{5} (t^5)_0^1 + \frac{2}{3} (t^3)_0^1$$

$$\frac{2}{7} - \frac{4}{5} + \frac{2}{3}$$

$$\textcircled{8} \int_0^3 (2x-1) \sqrt{x+1} dx = \int_1^2 [2(t^2-1)] t \cdot 2t dt$$

$$\sqrt{x+1} = t$$

$$x+1 = t^2$$

$$x = t^2 - 1$$

$$dx = 2t dt$$

$$= \int_1^2 4t^2(t^2-1) dt$$

$$= \int_1^2 4t^4 - 4t^2 dt$$

$$= \frac{4}{5} (t^5)_1^2 - \frac{4}{3} (t^3)_1^2$$

$$= \frac{4 \cdot 31}{5} - \frac{28}{3}$$

$$20. \textcircled{a} \int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \left(\ln|x^2+x+1| \right)'_0$$

$$= \ln 3$$

$$\textcircled{b} \int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+3} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx$$

$$= \frac{1}{2} \left(\ln(x^2+2x+3) \right)'_0 =$$

$$= \frac{1}{2} (\ln 6 - \ln 3) = \frac{1}{2} \ln 2.$$

$$17. \textcircled{a} \int_0^1 (2x+1)(x+1)^5 dx =$$

$$\begin{aligned} x+1 &= t \\ dx &= dt \\ x &= t-1 \end{aligned}$$

$$= \int_1^2 (2(t-1)+1) t^5 dt$$

$$= \int_1^2 (2t-1) t^5 dt$$

$$= \int_1^2 2t^6 - t^5 dt.$$

$$= \frac{2}{7} (t^7)_1^2 - \frac{1}{6} (t^6)_1^2$$

$$= \frac{2}{7} (2^7 - 1) - \frac{1}{6} (2^6 - 1)$$

$$16. \textcircled{a} \int_0^1 x e^{x^2+1} dx =$$

Exercice
35

$$\begin{aligned} x^2+1 &= t \\ 2x dx &= dt \\ x dx &= \frac{1}{2} dt \end{aligned}$$

$$= \int_1^2 \frac{1}{2} e^t dt = \frac{1}{2} (e^t)_1^2 = \frac{1}{2} (e^2 - e)$$

$$\textcircled{b} \int_0^1 e^x \ln(1+e^x) dx = \int_2^{1+e} \ln t dt$$

$$\begin{aligned} 1+e^x &= t \\ e^x dx &= dt \end{aligned}$$

$$= \int_2^{1+e} 1 \cdot \ln t dt = \int_2^{1+e} (t)' \ln t dt.$$

$$(t \ln t)_2^{1+e} - \int_2^{1+e} t \cdot \frac{1}{t} dt$$

$$= (1+e) \ln(1+e) - 2 \ln 2 - (t)_2^{1+e}$$

$$= (1+e) \ln(1+e) - 2 \ln 2 - (1+e-2)$$

$$\textcircled{8} \int_1^2 \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx = \int_0^{\sqrt{\ln 2}} \frac{t}{1} 2t dt$$

$$\sqrt{\ln x} = t$$

$$\ln x = t^2$$

$$\frac{1}{x} dx = 2t dt$$

$$= 2 \int_0^{\sqrt{\ln 2}} t^2 dt$$

$$= \frac{2}{3} (t^3)_0^{\sqrt{\ln 2}}$$

$$= \frac{2}{3} (\sqrt{\ln 2}^3 - 0)$$

$$= \frac{2}{3} \sqrt{\ln 2}^2 \sqrt{\ln 2} =$$

$$= \frac{2}{3} \ln 2 \sqrt{\ln 2}$$

Μεθοδος A, B

$$I = \int_{-1}^0 \frac{2x-1}{x^2-4x+3} dx$$

Εχω ελεωσα, ο ορισμητις δεν
ειναι η παραγωγικη του παρονομαστη
ο παρονομαστη παραγοντοποιεται.

$$\frac{2x-1}{(x-3)(x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1}$$

$$\frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x-1)} \frac{2x-1}{(x-3)(x-1)} = \frac{(x-3)(x-1)}{x-3} \frac{A}{x-3} + \frac{(x-3)(x-1)}{x-1} \frac{B}{x-1}$$

$$2x-1 = A(x-1) + B(x-3)$$

$$2x-1 = Ax - A + Bx - 3B$$

$$2x-1 = (A+B)x - A-3B$$

$$\begin{cases} 2 = A+B \\ -1 = -A-3B \quad \oplus \end{cases} \quad 1 = -2B$$

$$B = -\frac{1}{2}$$

$$A = \frac{5}{2}$$

$$I = \int_{-1}^0 \frac{\frac{5}{2}}{x-3} - \frac{\frac{1}{2}}{x-1} dx$$

$$I = \frac{5}{2} \int_{-1}^0 \frac{1}{x-3} dx - \frac{1}{2} \int_{-1}^0 \frac{1}{x-1} dx$$

$$I = \frac{5}{2} \left(\ln|x-3| \right)_{-1}^0 - \frac{1}{2} \left(\ln|x-1| \right)_{-1}^0$$

$$I = \frac{5}{2} (\ln 3 - \ln 4) - \frac{1}{2} (-\ln 2)$$

$$I = \frac{5}{2} \ln \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln 2$$

Διαφάνη ολοκλήρωσης με 100 Βαθμ

$$I = \int_0^1 \frac{5x-3}{x-2} dx = \int_0^1 \frac{5(x-2) + 7}{x-2} dx$$

$$\begin{array}{r|l} 5x-3 & x-2 \\ -(5x-10) & 5 \\ \hline & 7 \end{array}$$

$$= \int_0^1 \frac{5(x-2)}{x-2} + \frac{7}{x-2} dx$$

$$= \int_0^1 5 dx + \int_0^1 \frac{7}{x-2} dx$$

$$= 5(x)'_0^1 + 7 \int_0^1 \frac{1}{x-2} dx$$

$$= 5 + 7 (\ln|x-2|)'_0^1$$

$$= 5 + 7 (-\ln 2) = 5 - 7 \ln 2.$$

Διαίρεση πολυωνύμου με αριθμητή
που έχει μεγαλύτερο βαθμό,

$$I = \int_0^2 \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^2 - 1} dx = \int_0^2 \frac{(x^2 - 1)(x - 2) + 2x - 3}{x^2 - 1} dx$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 2x^2 + x - 1 & x^2 - 1 \\ \hline -(x^3 - x) & x - 2 \\ \hline -2x^2 + 2x - 1 & \\ \hline -(-2x^2 + 2) & \\ \hline 2x - 3 & \end{array}$$

$$= \int_0^2 \frac{\cancel{(x^2 - 1)}(x - 2)}{\cancel{x^2 - 1}} + \frac{2x - 3}{x^2 - 1} dx$$

$$= \int_0^2 (x - 2) dx + \int_0^2 \frac{2x - 3}{x^2 - 1} dx$$

$$= \frac{1}{2}(x^2)_0^2 - 2(x)_0^2 + J$$

$$= 2 - 4 + J = J - 2.$$

$$J = \int_0^2 \frac{2x - 3}{x^2 - 1} dx \quad \text{μεθοδος}$$

A, B.

ΕΥΟΤΗΤΑ 37

$$f(0) = 0 \quad f'(0) = 1$$

f κωπρη.

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$y - 0 = x \quad \boxed{y = x}$$

$$\text{a) } \int_0^1 e^x f(x) dx > L.$$

Αφω f κωπρη τωρ $f(x) \geq x$

$$e^x f(x) \geq x e^x$$

$$\int_0^1 e^x f(x) dx > \int_0^1 x e^x dx$$

$$I = \int_0^1 x e^x dx = \int_0^1 x (e^x)' dx =$$

$$= (x e^x)'_0 - \int_0^1 e^x - 1 dx =$$

$$= e - (e^x)'_0 = e - (e - 1) = 1.$$



$$\textcircled{B} \cdot \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx > -2$$

Assume f is concave $f(x) \geq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(\sin x) \geq \sin x$$

$$x f(\sin x) \geq x \sin x$$

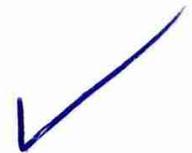
$$\int_0^{\pi} x f(\sin x) dx > \int_0^{\pi} x \sin x dx$$

$$\rightarrow \int_0^{\pi} x \sin x dx = \int_0^{\pi} x (\sin x)' dx$$

$$= \cancel{(x \sin x)} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx$$

$$= -(-\sin x) \Big|_0^{\pi} = \sin \pi - \sin 0$$

$$= -1 - (-1) = -2$$



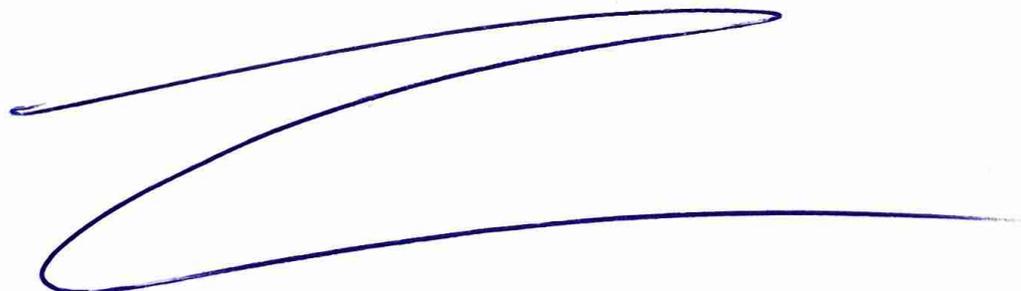
$$\textcircled{8} \int_0^1 f^2(x) dx > \frac{2}{3}$$

Γνωρίζω ότι $f(x) \geq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
από $x \in (0,1)$ είναι obvious

$$f^2(x) \geq x^2$$

$$\int_0^1 f^2(x) dx > \int_0^1 x^2 dx$$

$$\int_0^1 f^2(x) dx > \frac{1}{3} (x^3)'_0$$

$$\int_0^1 f^2(x) dx > \frac{1}{3}$$


$$8. \textcircled{B} \quad 0 < \int_1^e f(\ln x) < e-1 \quad \begin{matrix} f \uparrow \\ f(1)=1 \\ f(e)=0 \end{matrix}$$

$$1 < x < e$$

$$\ln 1 < \ln x < \ln e$$

$$0 < \ln x < 1$$

$f \uparrow$

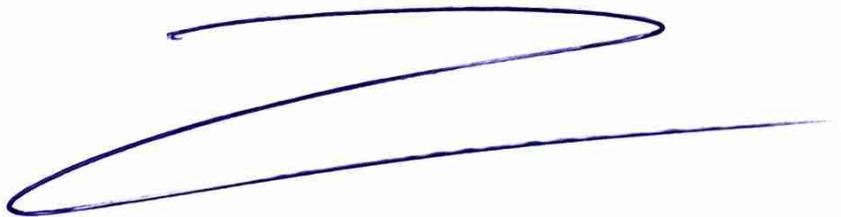
$$f(0) < f(\ln x) < f(1)$$

$$0 < f(\ln x) < 1$$

$$\int_1^e 0 dx < \int_1^e f(\ln x) dx < \int_1^e 1 dx$$

$$0 < \int_1^e f(\ln x) dx < (x)^e,$$

$$0 < \int_1^e f(\ln x) dx < e-1$$



$$17. \textcircled{a} \int_{\frac{1}{2}}^1 x^x dx < \frac{1}{2}$$

$$\bullet \ln x \leq x - 1$$

$$x \ln x \leq x^2 - x$$

$$\ln x^x \leq x^2 - x$$

$$x^x \leq e^{x^2 - x}$$

$$\int_{1/2}^1 x^x dx \leq \int_{1/2}^1 e^{x^2 - x} dx \quad \text{Ar Brann.}$$

$$\bullet \ln x \leq x - 1$$

$$\ln x - x \leq -1$$

$$\ln x - x < 0$$

$$\ln x < x$$

$$x \ln x < x^2$$

$$\ln x^x < x^2$$

$$x^x < e^{x^2}$$

$$\left| \int_{1/2}^1 x^x dx < \int_{1/2}^1 e^{x^2} dx \quad \text{Ar Brann.} \right|$$

$$x < 1$$

$$\ln x < \ln 1$$

$$\ln x < 0$$

$$x \ln x < 0$$

$$\ln x^x < 0$$

$$x^x < e^0$$

$$x^x < 1$$

$$\int_{1/2}^1 x^x dx < \int_{1/2}^1 1 dx$$

$$\int_{1/2}^1 x^x dx < (x)^{1/2}$$

$$\int_{1/2}^1 x^x dx < \frac{1}{2} \quad \checkmark$$

(B) vjo $\int_1^{17} x^e dx < \int_1^{17} e^x dx$

Apku vjo $x^e < e^x$

$\ln x^e < \ln e^x$

$e \ln x < x \ln e$

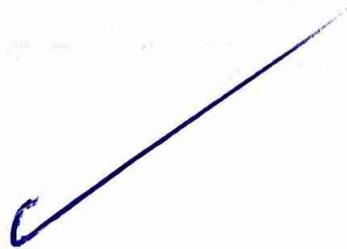
$\frac{\ln x}{x} < \frac{\ln e}{e}$

$f(x) < f(e)$ apku vjo

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

x	e	
f'	+	-
f	↗	↘

$f(x) \leq f(e)$



$$18. \textcircled{a} \int_0^1 \ln|e^x - x| dx < e - \frac{5}{2}$$

$$\bullet e^x \geq x + 1$$

$$e^x - x \geq 1$$

$$\ln|e^x - x| \geq \ln 1 \quad ;$$

$$\ln|e^x - x| \geq 0$$

$$\ln x \leq x - 1$$

$$\ln(e^x - x) \leq e^x - x - 1$$

$$\int_0^1 \ln|e^x - x| dx < \int_0^1 e^x - x - 1 dx$$

$$\int_0^1 \ln|e^x - x| dx < (e^x)'_0 - \frac{1}{2} (x^2)'_0 - (x)'_0$$

$$\int_0^1 \ln|e^x - x| dx < e - 1 - \frac{1}{2} - 1$$

$$\int_0^1 \ln|e^x - x| dx < e - \frac{5}{2}. \quad \checkmark$$

$$\textcircled{B} \text{ vdo } \int_2^4 \frac{1}{\ln x} dx > \ln 2$$

$$\ln x \leq x-1$$

$$\frac{1}{\ln x} \geq \frac{1}{x-1}$$

$$\int_2^4 \frac{1}{\ln x} dx > \int_2^4 \frac{1}{x-1} dx$$

$$\int_2^4 \frac{1}{\ln x} dx > (\ln|x-1|)_2^4$$

$$\int_2^4 \frac{1}{\ln x} dx > \ln 3 > \ln 2 \quad \checkmark$$

$$\textcircled{Y} \int_0^1 e^{-x^2} dx > \frac{2}{3}$$

$$e^x > x+1$$

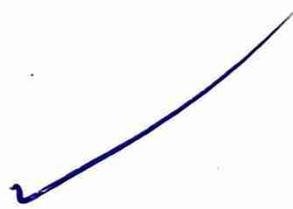
$$e^{-x^2} > -x^2+1$$

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx > \int_0^1 1-x^2 dx$$

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx > (x)'_0 - \frac{1}{3}(x^3)'_0$$

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx > 1 - \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx > \frac{2}{3}$$



$$19. \textcircled{a} \text{ NSD } \int_0^1 n p^2 x \, dx < \frac{1}{3}$$

$$|np^2 x| \leq |x|$$

$$np^2 x \leq x^2$$

$$\int_0^1 np^2 x \, dx < \int_0^1 x^2 \, dx$$

$$\int_0^1 np^2 x \, dx < \frac{1}{3} (x^3) \Big|_0^1$$

$$\int_0^1 np^2 x \, dx < \frac{1}{3}$$

$$\textcircled{b} \int_0^1 \frac{2np^2 x}{x^2+1} \, dx < \ln 2.$$

$$np^2 x < x \quad \forall x > 0$$

$$2np^2 x < 2x$$

$$\frac{2np^2 x}{x^2+1} < \frac{2x}{x^2+1}$$

$$\int_0^1 \frac{2np^2 x}{x^2+1} \, dx < \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} \, dx.$$

$$\int_0^1 \frac{2\sqrt{x}}{x^2+1} dx = \left(\ln(x^2+1) \right)'_0$$

$$\int_0^1 \frac{2\sqrt{x}}{x^2+1} dx = \ln 2$$

$$26. \quad f(x) \geq e^{-x^2} + 2x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

f voidan

$$\text{Ndo} \quad \frac{2}{3} < \int_0^1 f(x) dx < 1$$

$$f(0) = 0.$$

$$f(x) \geq e^{-x^2} + 2x - 1$$

$$\int_0^1 f(x) dx > \int_0^1 e^{-x^2} + 2x - 1 dx \quad \Delta w \text{ unalgebraically}$$

$$f(x) \geq e^{-x^2} + 2x - 1$$

$$f(x) - e^{-x^2} - 2x + 1 \geq 0 \quad \Rightarrow g(x) \geq 0$$

$g(x) \geq g'(x)$

$$g(x)$$

Fermet

$$\underline{\underline{g'(0) = 0}}$$

$$g'(x) = f'(x) + 2x e^{-x^2} - 2$$

$$g'(0) = f'(0) - 2 = 0$$

$$\underline{\underline{f'(0) = 2}}$$

$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$y - 0 = 2x$$

$$\underline{\underline{y = 2x}}$$

f'(0) = 2

$$f(x) \leq 2x$$

$$\int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 2x dx$$

$$\int_0^1 f(x) dx \leq (x^2)'_0^1$$

$$\int_0^1 f(x) dx \leq 1$$

Aus $f(x) \geq e^{-x^2} + 2x - 1$

$$e^x \geq x + 1$$

$$e^{-x^2} \geq -x^2 + 1$$

$$e^{-x^2} + 2x \geq 2x - x^2 + 1$$

$$f(x) \geq e^{-x^2} + 2x - 1 \geq 2x - x^2$$

$$f(x) \geq 2x - x^2$$

$$\int_0^1 f(x) dx \geq \int_0^1 2x - x^2 dx$$

$$\int_0^1 f(x) dx \geq (x^2)'_0^1 - \frac{2}{3}(x^3)'_0^1$$

$$\int_0^1 f(x) dx \geq 1 - \frac{1}{3}$$

Ανισοτιτα και ολοκληρωματα

Εστω οτι θελω νδο $\int_a^b f(x) dx < 4$

Βασικη αρχη

Προτι να πατησω πανω σε μια ανισοτητα
για την $f(x)$ π.χ $f(x) \leq g(x)$
την οποια να ολοκληρωσω διπλα

$$f(x) \leq g(x)$$

(\Rightarrow)

$$\int_a^b f(x) dx < \int_a^b g(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx < 4$$

Το κρισιμο ερωτημα ειναι αν θα

βρω την ανισοτητα αυτη.

Τηρω τα ελορια Βηματα

με δυναμικη.

1. Τσεκάρω αν στο θέμα μου
υπάρχει στα βιβλία κάποια
ανισότητες να πατήσω πάνω τμή,

2. Εάν έχω μονοτονία τμή $f(x)$
τότε χτιζω άμεσα στα άκρα

$$a < x < b$$

$$\text{αν } f'$$

$$f(a) < f(x) < f(b)$$

$$\int_a^b f(a) dx < \int_a^b f(x) dx < \int_a^b f(b) dx$$

3. Εάν έχω Τητηθα κριτοσητα η'
εχά ανακρθα φηλοσητα τοτε
φηλοσητα ανλοσητα με κριτοσητα
και εφολσητα.

4. Παταω οω βωλεα ανλοσητα.

$$\bullet e^x \geq x+1$$

$$\bullet \ln x \leq x-1$$

$$\bullet |\ln x| \leq |x|$$

$$\text{Αν } x > 0 \text{ τότε } \ln x < x$$

$$\text{Αν } x < 0 \text{ τότε } \ln x > x$$

Ολοκληρώματα

1. Αντι παραγώγου π.χ $\int_0^1 x^3 - 2\ln x + e^{-x} dx$

2. κλάσμα.

1. $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = (\ln|x^2+1|)'_0$

2. $\int_0^2 \frac{3x-1}{x^2-1} dx$ Μέθοδος Α, Β

3. $\int_0^1 \frac{3x^3-1}{x^2+1} dx$ Διαίρεση πολυνομίων

4. $\int_0^n 2x \ln x dx$, $\int_0^n x^2 \sin x dx$, $\int_0^1 x \cdot e^{-x}$,

$\int_1^e x^3 \ln x dx$ παραγοντική ολοκλήρωση

5. $\int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{x+1}} dx$ ΘΕΤΩ

Εμβαδόν Επίπεδου Χωρίου

1. $E: (f, x'x, x=a, x=b)$

$$E = \int_a^b |f(x)| dx$$

Το τίτουμε εδώ είναι το προσήκον f .

Απαραίτητη αντικατάσταση μέσω στο
αυτό.

1. Αν η $f(x) \geq 0$ από την οψη τελικώς.

2. Μονοτονία $f(x)$ εντός $a < x < b$
 $f \neq 0$
 $f(a) < f(x) < f(b)$
Βρίσκουμε συμπέρασμα

Προσοχή

$E: (f, x'x, x=a)$ } Λαμβάνουμε τα ελάχιστα και
 $E: (f, x'x)$ } ακρο

Λύση των $f(x) = 0$ να βρω ρίζα
ώστε να μην στο ακρο.

Αν στο διάστημα ολοκλήρωσης υπάρχει
ρίζα ρ τότε $E = \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^{\rho} f(x) dx + \int_{\rho}^b |f(x)| dx$

$$2. E = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx, \quad x=a, x=b$$

$$E = \int_a^b |h(x) - g(x)| dx \quad \text{οπου } h(x) \text{ είναι για το πρώτο}$$

$$3. E = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx, \quad y=y_0, x=a, x=b$$

Εχω ορίσει πρώτο

Είτε είναι η ίδια $y=y_0$

Είτε είναι ο x'

Απαιτείται Σχημα!

Επορω Μαθημα

35

21 αβ

22

23

24

37

3

5

6

7

8 αδ

36

2 αβ

3 αβ

4 αβ

Την παρασταση $27/2$

Τοστ σεσε ολοκληρωματα
που υπολογιστε