

Καργαρίνα Κωνσταντίνη
Γιαυλιώτου



ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Α ΛΥΚΕΙΟΥ (09/11/25)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 10

A2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σ αν είναι σωστές ή με Λ αν είναι λανθασμένες.

1. Ισχύει η ισοδυναμία $\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ή $\beta = 0$. Λ
2. Ισχύει ότι $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$. Λ
3. Ισχύει $|\alpha|^2 - \alpha^2 = 0$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$. Σ
4. Ισχύει $d(x, -2) = |x - 2|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Λ
5. Αν $\alpha < \beta < 0$, τότε $\alpha^2 > \beta^2$. Σ

Μονάδες 10

A3. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα.

Ανίσωση που ικανοποιεί ο x	Διάστημα στο οποίο ανήκει ο x
$-1 < x \leq 2$	... $(-1, 2]$
... $-3 \leq x < 0$	$x \in [-3, 0)$
$x \leq 5$	... $x \in (-\infty, 5]$
... $x \geq -5$	$x \in (-5, +\infty)$
$x \leq 0$ ή $2 < x < 10$	...

Μονάδες 5

$x \in (-\infty, 0] \cup (2, 10)$

ΘΕΜΑ Β

B1. α) Να δείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει:

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10.$$

β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y , ώστε: $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$

Μονάδες 10

B2. Δίνεται η παράσταση $A = |x-1| + |y-3|$ με x, y πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους ισχύει: $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$.

Να αποδείξετε ότι: α) $A = x - y + 2$

β) $0 < A < 4$

Μονάδες 10

B3. Να δείξετε ότι αν $x > 4$, ισχύει ότι $x^3 > 4x^2 - 3x + 12$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:

α) $x^2 + y^2$

β) $2x - 3y$

γ) $\frac{6x}{y}$

Μονάδες 12

Γ2. Δίνεται $\alpha \in (-10, -6]$ και $\beta \in [-3, -2)$. Να βρείτε το διάστημα που ανήκει η παράσταση: $A = 2\alpha^2 - 3\beta^3$

Μονάδες 8

Γ3. Αν $x \cdot y = -2$ να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = \frac{(x^{-2} \cdot y^{-3})^3}{x^{-3} : (y^2)^3}$ Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Αν $-1 < x < 1$ να απλοποιηθεί η παράσταση $A = d(x, 1) - d(x, -1) - |-2x + 2|$.

Μονάδες 5

Δ2. Για $A = -2$, να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση

$B = \frac{(x+A)^3 + 8x(x+A)}{x^2 - A^2}$ και να την απλοποιήσετε.

Μονάδες 8

Δ3. Για $B = x + 2$ να απλοποιήσετε την παράσταση: $\Gamma = \frac{5|B|^2 + 3|B|}{25B^2 + 30|B| + 9}$.

Μονάδες 7

Δ4. Για $\Gamma = \frac{|x+2|}{5|x+2|+3}$ να γράψετε την Γ χωρίς απόλυτα, αν $-1 < x < 1$.

Μονάδες 5

$$\begin{array}{r} -8 \\ : 3 \\ \hline -24 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -27 \quad 2 \quad 36 \\ : 3 \quad 2 \quad 2 \\ \hline -81 \quad 72 \quad 1 \end{array}$$

A₁: Ανοδότη

A₂: 1) 1 2) 1 3) 2 4) 1 5) 2.

A₃: $-1 < x \leq 2 \quad (\Leftrightarrow) \quad x \in (-1, 2]$

$$-3 \leq x < 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x \in [-3, 0)$$

$$x \leq 5 \quad (\Leftrightarrow) \quad x \in (-\infty, 5]$$

$$x > -5 \quad (\Leftrightarrow) \quad x \in (-5, +\infty)$$

$$x \leq 0 \quad \vee \quad 2 < x < 10 \quad x \in (-\infty, 0] \cup (2, 10)$$

B₁: ⑥ $(x-1)^2 + (y+3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10$

$$\cancel{x^2} - \cancel{2x} + 1 + \cancel{y^2} + \cancel{6y} + 9 = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - \cancel{2x} + \cancel{6y} + 10$$

$$10 = 10 \quad \checkmark$$

⑦ $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0$

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 0$$

$$(x=1)$$

$$(y=-3)$$

$$B_2: \textcircled{a} A = |x-1|^{\oplus} + |y-3|^{\ominus} = x-1 - y+3 = x-y+2$$

$$\bullet 1 < x < 4 \Rightarrow 0 < x-1 < 3$$

$$\bullet 2 < y < 3 \Rightarrow -1 < y-3 < 0$$

$$\textcircled{B} \bullet 1 < x < 4 \Rightarrow 4 > x > 1$$

$$\bullet 2 < y < 3 \Rightarrow -2 > -y > -3$$

$$2 > x-y > -2$$

$$4 > x-y+2 > 0$$

$$4 > A > 0$$

$$B_3: x^3 > 4x^2 - 3x + 12$$

$$x^3 - 4x^2 + 3x - 12 > 0$$

$$x^2(x-4) + 3(x-4) > 0$$

$$\boxed{(x-4)^{\oplus} (x^2+3)^{\oplus} > 0 \quad \checkmark}$$

$$\bullet x > 4 \Rightarrow x-4 > 0.$$

$$\Gamma: \textcircled{a} x^2 + y^2$$

$$\bullet 2 \leq x \leq 3 \Rightarrow 4 \leq x^2 \leq 9$$

$$\bullet 1 \leq y \leq 2 \Rightarrow 1 \leq y^2 \leq 4$$

$$\left. \begin{matrix} 4 \leq x^2 \leq 9 \\ 1 \leq y^2 \leq 4 \end{matrix} \right\} \textcircled{+} 5 \leq x^2 + y^2 \leq 13$$

$$\textcircled{B} 2x-3y$$

$$\bullet 2 \leq x \leq 3 \Rightarrow 4 \leq 2x \leq 6 \Rightarrow 6 \geq 2x \geq 4$$

$$\bullet 1 \leq y \leq 2 \Rightarrow -3 \geq -3y \geq -6 \quad \text{---} \oplus$$

$$3 \geq 2x-3y \geq -2.$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{6x}{y}$$

$$\bullet \quad 2 \leq x \leq 3 \Rightarrow 12 \leq 6x \leq 18 \Rightarrow 18 \geq 6x \geq 12$$

$$\bullet \quad 1 \leq y \leq 2 \Rightarrow 1 \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{2} \quad \text{---} \textcircled{1}$$

$$18 \geq \frac{6x}{y} \geq 6$$

$$\text{I}_2: \quad A = 2\alpha^2 - 3B^3$$

$$\bullet \quad -10 \leq \alpha \leq -6 \Rightarrow 100 \geq \alpha^2 \geq 36 \Rightarrow 200 \geq 2\alpha^2 \geq 72$$

$$\bullet \quad -3 \leq B \leq -2 \Rightarrow -27 \leq B^3 \leq -8$$

$$81 \geq -3B^3 \geq 24$$

$$281 \geq 2\alpha^2 - 3B^3 \geq 96$$

$$\text{I}_3: \quad A = \frac{(x^{-2}y^{-3})^3}{x^{-3} : (y^2)^3} = \frac{x^{-6}y^{-9}}{\frac{x^{-3}}{y^6}} = \frac{x^{-6}y^{-9}y^6}{x^{-3}}$$

$$A = \frac{x^{-6}y^{-3}}{x^{-3}} = x^{-3}y^{-3} = (xy)^{-3}$$

$$A = (-2)^{-3} = -\frac{1}{8}$$

$$\Delta: A = d(x, 1) - d(x, -1) - |-2x+2|$$

$$A = |x-1|^{\oplus} - |x+1|^{\oplus} - |-2x+2|^{\oplus} \quad \underline{\underline{-1 < x < 1}}$$

$$\bullet -1 < x < 1 \Rightarrow -2 < x-1 < 0$$

$$\bullet -1 < x < 1 \Rightarrow 0 < x+1 < 2$$

$$\bullet -1 < x < 1 \Rightarrow 2 > -2x > -2 \Rightarrow 4 > 2-2x > 0$$

$$A = -x+1 - (x+1) - (-2x+2)$$

$$A = \cancel{-x+1} - \cancel{x-1} + \cancel{2x-2}$$

$$A = -2.$$

$$\Delta 2: B = \frac{(x-2)^3 + 8x(x-2)}{x^2 - 4}$$

причем $x^2 - 4 \neq 0$
 $x^2 \neq 4$

$x \neq 2$ $x \neq -2$

$$B = \frac{\cancel{(x-2)}((x-2)^2 + 8x)}{(\cancel{x-2})(x+2)}$$

$$B = \frac{x^2 - 4x + 4 + 8x}{x+2} = \frac{x^2 + 4x + 4}{x+2}$$

$$B = \frac{(x+2)^2}{\cancel{x+2}} \Rightarrow \underline{\underline{B = x+2}}$$

Δ3:

$$\frac{5|B|^2 + 3|B|}{25|B|^2 + 30|B| + 9}$$

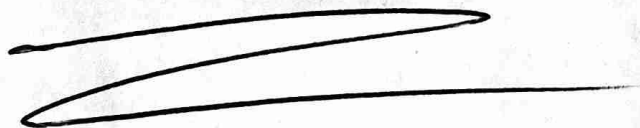
$$= \frac{|B| \cancel{(5|B| + 3)}}{(5|B| + 3)^2} = \frac{|B|}{(5|B| + 3)}$$

$$= \frac{|x+2|}{5|x+2| + 3}$$

Δ4: $\overline{f} = \frac{\overset{+}{|x+2|}}{5\overset{+}{|x+2|} + 3}$

• $-1 < x < 1 \Rightarrow 1 < x+2 < 3$

$$f = \frac{x+2}{5(x+2)+3} = \frac{x+2}{5x+13}$$



Нюбта Р.1а

1. $x^v = a$ тогц $x = \sqrt[v]{a}$

Н.х $x^3 = 8$ тогц $x = \sqrt[3]{8} = 2$

$x^4 = 64 \Rightarrow x = \sqrt[4]{64} = 2$

2. $\sqrt[v]{a} \sqrt[v]{b} = \sqrt[v]{ab}$

3. $\frac{\sqrt[v]{a}}{\sqrt[v]{b}} = \sqrt[v]{\frac{a}{b}}$

4. $\sqrt[v]{a^v} = |a|$

5. $\sqrt[v]{a^v} = a$

6. $\sqrt[v]{a^p} = a^{\frac{p}{v}}$

$$27. \textcircled{82} \sqrt{5 \sqrt[3]{5 \sqrt[4]{25}}}$$

$$= \sqrt{5 \cdot \sqrt[3]{5 \cdot 25^{1/4}}}$$

$$= \sqrt{5 \sqrt[3]{5^1 \cdot (5^2)^{1/4}}}$$

$$= \sqrt{5 \sqrt[3]{5^1 \cdot 5^{2/4}}}$$

$$= \sqrt{5 \sqrt[3]{5^{6/4}}}$$

$$\sqrt{5 \cdot 5^{\frac{6}{4} \cdot \frac{1}{3}}}$$

$$\sqrt{5^1 \cdot 5^{1/2}} = \sqrt{5^{3/2}} = 5^{\frac{3/2}{2}} = 5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3}$$

$$27. \quad (8) \quad \frac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt{2\sqrt{2}}}{\sqrt[12]{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{4^{\frac{1}{3}}} \sqrt{2^1 \cdot 2^{\frac{1}{2}}}}{2^{\frac{1}{12}}} =$$

$$= \frac{4^{\frac{\frac{1}{3}}{2}} \sqrt{2^{\frac{3}{2}}}}{2^{\frac{1}{12}}}$$

$$= \frac{2^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{\frac{3}{2}}}{2^{\frac{1}{12}}} = \frac{2^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{\frac{3}{4}}}{2^{\frac{1}{12}}}$$

$$= \frac{2^{\frac{11}{12}}}{2^{\frac{1}{12}}} = 2^{\frac{10}{12}} = 2^{\frac{5}{6}} = \sqrt[6]{2^5}$$

$$\textcircled{52} \quad \frac{\sqrt{8} \sqrt[3]{4}}{\sqrt[6]{2}} = 4$$

$$\frac{8^{\frac{1}{2}} 4^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{6}}} = 4$$

$$\frac{(2^3)^{\frac{1}{2}} (2^2)^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{6}}} = 4$$

$$\frac{2^{\frac{3}{2}} 2^{\frac{2}{3}}}{2^{\frac{1}{6}}} = 4$$

$$\frac{2^{\frac{13}{6}}}{2^{\frac{1}{6}}} = 4$$

$$2^{\frac{12}{6}} = 4$$

$$\rightarrow 2^2 = 4 \quad \checkmark$$

$$\textcircled{8} \quad \sqrt[3]{9} \sqrt{3} \sqrt[4]{27} \sqrt[12]{3} = 9$$

$$9^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} \cdot 27^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{12}} = 9$$

$$(3^2)^{\frac{1}{3}} 3^{\frac{1}{2}} \cdot (3^3)^{\frac{1}{4}} 3^{\frac{1}{12}} = 9$$

$$3^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{2}} 3^{\frac{3}{4}} 3^{\frac{1}{12}} = 9$$

$$3^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{12}} = 9$$

$$3^{\frac{8}{12} + \frac{6}{12} + \frac{9}{12} + \frac{1}{12}} = 9$$

$$3^{\frac{24}{12}} = 9$$

$$3^2 = 9$$



29. ③ No $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[6]{3} = 3$

$$\sqrt[v]{a^p} = a^{\frac{p}{v}}$$

Enclosure

$$\sqrt[v]{a^p}^v = (a^{\frac{p}{v}})^v$$

$$a^p = a^{\frac{p}{v} \cdot v}$$

$$a^p = a^p \quad \checkmark$$

$$3^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{6}} = 3$$

$$3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = 3$$

$$3^{\frac{3}{6} + \frac{2}{6} + \frac{1}{6}} = 3$$

$$3^{\frac{6}{6}} = 3$$

$$3^1 = 3 \quad \checkmark$$

Εποραιο Μαθιμ

9

(21)

(25)

(27) α γ β ε .

(29) α γ ε .