Θεμα 110

$f: R \to R$ συνεχής

$e^{x} f(x) = x + f(x) \quad \forall x \in R$

(α) $e^{x} f(x) - f(x) = x$

$f(x)(e^{x}-1) = x$

$$\boxed{f(x) = \frac{x}{e^{x}-1} \quad , x \neq 0}$$

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{e^{x}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{e^{x}} = 1$$

γιατί η f είναι συνεχής

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^{x}-1} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}}$$

(β) $f'(x) = \dfrac{e^{x}-1-xe^{x}}{(e^{x}-1)^2}$

$\boxed{\varphi(x) = e^{x} - 1 - xe^{x}}$ $\quad$ $\boxed{\varphi(0) = 0}$

$\varphi'(x) = e^{x} - e^{x} - xe^{x}$

$\varphi'(x) = -xe^{x}$

$\to \varphi'(x) = 0 \Rightarrow -xe^{x} = 0 \Rightarrow \underline{x = 0}$

x		0	
φ'	$+$	0	$-$
φ	$\nearrow$		$\searrow$
f'	$-$		$-$
f	$\searrow$		$\searrow$

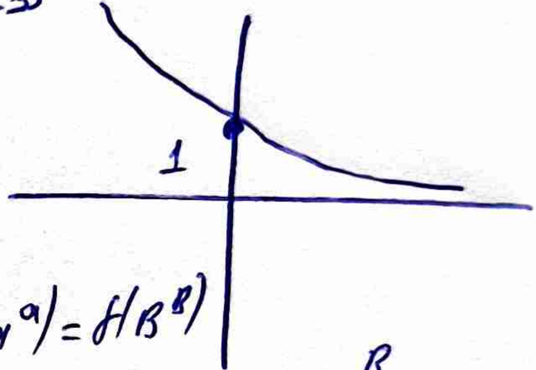
$\varphi(x) \leq \varphi(0) \Rightarrow \varphi(x) \leq 0$

άρα f αντιστρεψιμη

$D_{f^{-1}} = \Sigma T_f = (0,+\infty)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x-1} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$



(γ) Γνωρίζω ότι $0<\alpha<\beta$ και $f(\alpha^\alpha)=f(\beta^\beta)$

$\Rightarrow f$ 1-1 $\quad \alpha^\alpha = \beta^\beta \Rightarrow \ln\alpha^\alpha = \ln\beta^\beta$

$\alpha\ln\alpha = \beta\ln\beta$

$\boxed{h(x) = x\ln x}$

$h'(x) = \ln x + 1$

$h(\alpha) = h(\beta)$

Rolle

$h'(\xi) = 0$

$\xi \in (\alpha,\beta)$

$h'(\xi) = 0 \Rightarrow \ln\xi + 1 = 0$

$\ln\xi = -1$

$\xi = e^{-1}$

$\alpha < \xi < \beta$

$\Rightarrow \boxed{\alpha < e^{-1} < \beta}$

$\alpha < e^{-1} \Rightarrow \alpha < 1$

$\ln\alpha < \ln 1$

$\ln\alpha < 0$

$\alpha \ln\alpha < 0$

όμως $\alpha\ln\alpha = \beta\ln\beta$

$\beta\ln\beta < 0 \Rightarrow \ln\beta < 0$

$\underline{\underline{\beta < 1}}$

νδο $(x-a)\int_{\beta}^{a} \frac{f(x)}{\beta-a}\,dx = 1 + \ln x$ έχει (α,β) ρίζα.

$$\underbrace{\frac{x-a}{\beta-\alpha}\int_{\beta}^{a} f(x)\,dx - 1 - \ln x}_{g(x)} = 0$$

- $g(\alpha) = -1 - \ln\alpha > 0$
- $g(\beta) = \int_{\beta}^{a} f(x)\,dx - 1 - \ln\beta$

Το $\alpha < e^{-1} \Rightarrow \ln\alpha < -1$

$\ln\alpha + 1 < 0$

$-\ln\alpha - 1 > 0$

$g(\alpha) > 0$

Αρκει νδο $\int_{\beta}^{a} f(x)\,dx - 1 - \ln\beta < 0$

$$\int_{\beta}^{a} f(x)\,dx < \ln\beta + 1$$

Γνωριζω οτι $e^{x} \geq x+1 \Rightarrow e^{x}-1 \geq x$

$$1 \geq \frac{x}{e^{x}-1} \Rightarrow 1 \geq f(x)$$

$$\int_{\beta}^{a} f(x)\,dx < \int_{\beta}^{a} 1 \Rightarrow \int_{\beta}^{a} f(x)\,dx < a-\beta$$

$\Rightarrow$ αφου $a<\beta \Rightarrow a-\beta<0$

$$\Rightarrow \int_{\beta}^{a} f(x)\,dx < 0$$

- $\beta > e^{-1}$

$\ln\beta > \ln e^{-1}$

$\ln\beta > -1$

$\ln\beta + 1 > 0$

$$\int_{\beta}^{a} f(x)\,dx < \ln\beta + 1$$

$$\Rightarrow g(\beta) < 0$$

Bolzano $\exists x_0 \in (a,\beta)$ τ.ω $g(x_0)=0$

$$g(x) = (x-a)\int_{\beta}^{a} \frac{f(x)}{\beta - a}\,dx - 1 - \ln x$$

$$g'(x) = \underbrace{\int_{\beta}^{a} \frac{f(x)}{\beta - a}\,dx}_{\kappa} - \frac{1}{x}$$

$$g'(x) = \kappa - \frac{1}{x}$$

Αν δείξω ότι $\kappa < 0$ τότε $g'(x) < 0$

g ↓ ακριβώς μία ρίζα

$$\int_{\beta}^{a} f(x)\,dx < 0$$

το $\beta > a \Rightarrow \beta - a > 0$

$$\frac{1}{\beta - a}\int_{\beta}^{a} f(x)\,dx < 0$$

$$\int_{\beta}^{a} \frac{f(x)}{\beta - a}\,dx < 0$$

(δ) $\int_1^{g(1)} f(x)\,dx > 0$ νδο $g(x) = \frac{1}{x}$ έχω ρίζα $(0,1)$.

$h(x) = x\,g(x) - 1$

$h(0) = -1 < 0$

$h(1) = g(1) - 1$

Αρκεί νδο $g(1) - 1 > 0 \Rightarrow g(1) > 1$

Γνωρίζω ότι $f(x) > 0$

επίσης $\int_1^{g(1)} f(x)\,dx > 0$

$\Rightarrow \int_1^{g(1)} |f(x)|\,dx > 0$

E з C_f, $x'x$, $x = 1$ $x = g(1)$

προφανώς $\underline{g(1) > 1}$

Θεμα 112

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(0)=0$ $\quad f'(0)=1$

$2f(x) + 4x f'(x) + (x^2+1) f''(x) = 0$

f συνεχ
f' συνεχ
f'

ⓐ Ndo $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

$$\underbrace{f(x)(x^2+1) - x}_{g(x)} = 0$$

$$g'(x) = f'(x)(x^2+1) + f(x)\,2x - 1$$

$$g''(x) = f''(x)(x^2+1) + f'(x)\,2x + f'(x)\,2x + f(x)\cdot 2$$

$$g''(x) = f''(x)(x^2+1) + 4x f'(x) + 2f(x) = 0$$

$$g'(x) = c \Rightarrow f'(x)(x^2+1) + 2x f(x) - 1 = c$$

$\underline{x=0}$

$f'(0) - 1 = c$

$1 - 1 = c \Rightarrow c = 0$

$$\underbrace{f'(x)(x^2+1) + 2x f(x)}\ - 1 = 0$$

$$\left[(x^2+1)f(x) - x\right]' = 0$$

$$(x^2+1)f(x) - x = c$$

$\underline{x=0}$

$$f(0) = c \Rightarrow c = 0$$

$$(x^2+1)f(x) = x \Rightarrow \boxed{f(x) = \frac{x}{x^2+1}}$$

(B) $$f'(x) = \frac{x^2+1 - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2 - (1-x^2)\,2(x^2+1)\,2x}{(x^2+1)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+1) - 4x(1-x^2)}{(x^2+1)^3} = \frac{-2x^3-2x-4x+4x^3}{(x^2+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3} = \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}$$

$$\rightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow 2x(x^2-3) = 0$$

$$x=0 \quad x=\sqrt{3} \quad x=-\sqrt{3}$$

x	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	
$2x$	$-$	$-\ 0\ +$		$+$
x^2-3	$+\ 0$	$-$	$-\ 0$	$+$
f''	$-$	$+$	$-$	$+$
f	$\frown$	$\smile$	$\frown$	$\smile$

$A\left(-\sqrt{3}, \frac{-\sqrt{3}}{4}\right)$ $\quad B(0,0)$ $\quad \Gamma\left(\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$$\lambda_{AB} = \frac{0-\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)}{0-(-\sqrt{3})} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{4}$$

$$\lambda_{B\Gamma} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}-0}{\sqrt{3}-0} = \frac{1}{4}$$

$\lambda_{AB} = \lambda_{B\Gamma} \Rightarrow A, B, \Gamma$ συνευθειακά.

δ) E : $(C_f, x'x, y'y, x=1$

$$E = \int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 \left|\frac{x}{x^2+1}\right| dx$$

$$= \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln(x^2+1)\right)_0^1 = \frac{1}{2}(\ln 2 - 0).$$

⑧ F παράγουσα της f

$$|f(x)| \le \frac{1}{2} \Rightarrow \left|\frac{x}{x^2+1}\right| \le \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \le \frac{x}{x^2+1} \le \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \le \frac{x}{x^2+1} \quad \text{και} \quad \frac{x}{x^2+1} \le \frac{1}{2}$$

$$-(x^2+1) \le 2x \qquad\qquad 2x \le x^2+1$$

$$0 \le x^2+1+2x \qquad\qquad 0 \le x^2-2x+1$$

$$0 \le (x+1)^2 \; ✓ \qquad\qquad 0 \le (x-1)^2 \; ✓$$

Ν.δ.ο. $|F(\beta)-F(\alpha)| \le \frac{1}{2}|\beta-\alpha|$

$$F'(\xi) = \frac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha} \Rightarrow f(\xi) = \frac{F(\beta)-F(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

$$|f(x)| \le \frac{1}{2} \Rightarrow |f(\xi)| \le \frac{1}{2}$$

$$\left|\frac{F(B)-F(a)}{B-a}\right| \leq \frac{1}{2}$$

$$\frac{|F(B)-F(a)|}{|B-a|} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow |F(B)-F(a)| \leq \frac{1}{2}|B-a|$$

Ⓔ $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[F(\sqrt{x^2+1})-F(x)\right]$

- $\sqrt{x^2+1} \geq x \Rightarrow x^2+1 \geq x^2 \Rightarrow 1 \geq 0$ ✓

$(0 \infty +\infty)$

Απο αριν $|F(B)-F(a)| \leq \frac{1}{2}|B-a|$

$$|F(\sqrt{x^2+1})-F(x)| \leq \frac{1}{2}|\sqrt{x^2+1}-x|$$

$$-\frac{1}{2}|\sqrt{x^2+1}-x| \leq F(\sqrt{x^2+1}-F(x)| \leq \frac{1}{2}|\sqrt{x^2+1}-x|$$

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{2}\left|\sqrt{x^2+1} - x\right| = 0 \\ &\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2}\left|\sqrt{x^2+1} - x\right| = 0 \end{aligned}\right\} \text{Από Κ.Π}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f\left(\sqrt{x^2+1}\right) - f(x) = 0$$

Αντιπαραγώγιση

Ενότητα 33

16. (γ) $f'(x) = 1 - \frac{3}{x^2}$, $f(1) = 2$

$f'(x) = \left(x + \frac{3}{x}\right)'$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$f(x) = x + \frac{3}{x} + c$

$x = 1$

$f(1) = 1 + 3 + c$

$2 = 4 + c$

$c = -2$

$f(x) = x + \frac{3}{x} - 2$

17. (β) $f'(x) = 3^x - 2x + \frac{1}{\sqrt{x}}$ $\quad f(1) = \frac{3}{\ln 3}$

$f'(x) = \left(\frac{3^x}{\ln 3} - x^2 + 2\sqrt{x}\right)'$

$f(x) = \frac{1}{\ln 3} 3^x - x^2 + 2\sqrt{x} + c$

$x = 1$

$f(1) = \frac{3}{\ln 3} - 1 + 2 + c \Rightarrow \cancel{\frac{3}{\ln 3}} = \cancel{\frac{3}{\ln 3}} + 1 + c$

$c = -1$

22. α) $f'(x) = 2x\,\text{συν}x - x^2\,\text{ημ}x$ $\qquad f(0)=2$

$$f'(x) = (\text{συν}x \cdot x^2)'$$

$$f(x) = x^2\,\text{συν}x + c$$

$\underline{x=0}$

$f(0) = c = 2$ $\qquad \boxed{f(x) = x^2\,\text{συν}x + 2}$

β) $f'(x) = \dfrac{x\,\text{συν}x - \text{ημ}x}{x^2}$ $\qquad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}$

$$f'(x) = \left(\frac{\text{ημ}x}{x}\right)'$$

$$f(x) = \frac{\text{ημ}x}{x} + c$$

$\underline{x=\frac{\pi}{2}}$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\text{ημ}\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} + c$$

$$\frac{1}{\pi} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} + c \rightarrow \frac{1}{\pi} = \frac{2}{\pi} + c$$

$$c = -\frac{1}{\pi}$$

23. B $f'(x^2) = 2x-3$ $\quad\quad f(4)=1$

$f'(x^2) = (x^2-3x)'$

$f(x^2) = x^2-3x+c$

$f(4) = 4-6+c$

$1 = -2+c \quad\quad c=3$

$f(x^2) = x^2-3x+c$

$x^2=t$

$x=\sqrt{t}$

$f(t) = t-3\sqrt{t}+3$

$f(x) = x-3\sqrt{x}+3$

24. (B) $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f(1) = f'(1) = 1$

$f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)'$

$f'(x) = \frac{1}{x} + c$

$\underline{x=1}$

$f'(1) = 1 + c$

$1 = 1 + c$

$\underline{\underline{c = 0}}$

$f'(x) = \frac{1}{x}$

$f'(x) = (\ln x)'$

$f(x) = \ln x + c$

$\underline{x=1}$

$f(1) = \ln 1 + c$

$1 = c$.

$f(x) = \ln x + 1$.

(δ) $f''(x) = \sigma\upsilon\nu x - e^{-x}$

$f(0) = f'(0) = 1$

$f''(x) = \left(\eta\mu x + e^{-x}\right)'$

$f'(x) = \eta\mu x + e^{-x} + c$

$x = 0$

$f'(0) = 0 + 1 + c$

$1 = 1 + c$

$c = 0$

$\Rightarrow f'(x) = \eta\mu x + e^{-x}$,

$f'(x) = \left(-\sigma\upsilon\nu x - e^{-x}\right)$

$f(x) = -\sigma\upsilon\nu x - e^{-x} + c$

$f(0) = -1 - 1 + c$

$1 = -2 + c$

$c = 3$

$f(x) = 3 - \sigma\upsilon\nu x - e^{-x}$

26. $f''(x) = g''(x) + \frac{1}{x^2}$, $x > 0$

$f''(x) = \left(g'(x) - \frac{1}{x}\right)'$

$f(1) = g(1) + 1$

$f'(1) = g'(1)$

$f'(x) = g'(x) - \frac{1}{x} + c$

$\cancel{f'(1)} = \cancel{g'(1)} - 1 + c$

$c = 1$

$f'(x) = g'(x) - \frac{1}{x} + 1$

$f'(x) = \left(g(x) - \ln x + x\right)'$

$f(x) = g(x) - \ln x + x + c$

$f(1) = g(1) - \ln 1 + 1 + c$

$\cancel{g(1)+1} = \cancel{g(1)} + \cancel{1} + c$

$c = 0$.

$f(x) = g(x) - \ln x + x$.

30. $(x-1)f'(x) = 3x^2-2x-1$ $\qquad f(0)=1$

$$f'(x) = \frac{3x^2-2x-1}{x-1}, \quad x \neq 1.$$

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2-2x-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{6x-2}{1} = 4$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2-2x-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 4, & x=1 \end{cases}$$

3	−2	−1	1
↓	3	1	
3	1	0	

$$f'(x) = \begin{cases} 3x+1, & x \neq 1 \\ 4, & x=1 \end{cases}$$

$3x^2-2x-1 = (x-1)(3x+1)$

$f'(x) = 3x+1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \left(\frac{3x^2}{2}+x\right)'$$

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2+x + c$$

$\underline{x=0}$

$1 = c$

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2+x+1$$

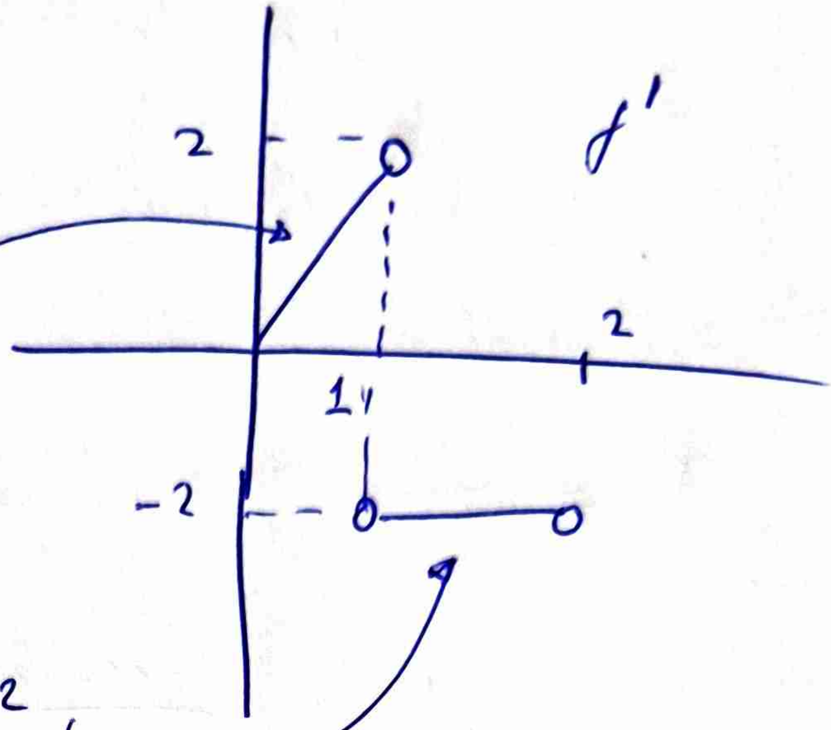
31.

$y = \alpha x$

$2 = \alpha \cdot 1$

$\alpha = 2$

$y = 2x$



$$f'(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1 \\ -2, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + C_1, & 0 \leq x \leq 1 \\ -2x + C_2, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$f(0) = 0^2 + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ -2x + C_2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Αφού f συνεχής

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x)$$

$$1^2 = -2 \cdot 1 + c_2$$

$$1 = -2 + c_2$$

$$c_2 = 3$$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ -2x + 3, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}}$$

2025

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in\mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x)=F(x)+c$, για κάποιο $c\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 6

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.

Μονάδες 5

Α3. Πότε η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Έστω $f:A\to\mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι "1-1". Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης, f^{-1}, της f είναι το σύνολο τιμών της f.

β) Αν f,g,h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h\circ(g\circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h\circ g)\circ f$ και ισχύει $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

γ) Αν $\nu\in\mathbb{N}^*$, ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x^{2\nu}}=-\infty$.

δ) Αν μια συνάρτηση είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ, τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

ε) Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f\circ g)'(x_0)=f'(g(x_0))\cdot g'(x_0)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x^3+\alpha x^2+9x-3$, όπου $\alpha\in\mathbb{R}$. Δίνεται ακόμα ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0=1$.

Β1. Να βρείτε την τιμή του α.

Μονάδες 5

Στα ερωτήματα Β2 έως Β4 να θεωρήσετε ότι $\alpha=-6$.

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει τρεις θετικές πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 10

Β3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 6

Β4. Έστω $g(x)=x+f(x)$, $x\in\mathbb{R}$. Αν $\xi\in\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στα σημεία $A(\xi,f(\xi))$ και $B(\xi,g(\xi))$, αντίστοιχα, τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} e^x\eta\mu x, & x<0 \\ \sqrt{x^2+x}, & x\geq 0\end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$ (μονάδες 2) αλλά όχι παραγωγίσιμη στο x_0 (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει την ευθεία $(\varepsilon): y=x+\frac{1}{2}$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\xi\in(-\pi,0)$.

Μονάδες 5

Γ4. Ένα κινητό M ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, $x\geq 0$, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του M, $x'(t)$, να είναι θετικός για κάθε $t\geq 0$. Να εξετάσετε εάν υπάρχει χρονική στιγμή $t_0\geq 0$ τέτοια ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του M να είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x του M.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ και μια παράγουσα, F, της f στο $(0,+\infty)$ για τις οποίες ισχύει ότι:

$$xf(x)=2F(x)\ln x\text{, για κάθε } x>0.$$

Δίνεται ακόμα ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1,f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y=2x$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{F(x)}{x^{\ln x}}$, $x>0$, είναι σταθερή.

Μονάδες 6

Δ2. i) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{\ln x}$. (μονάδες 4)

ii) Να αποδείξετε ότι $F(1)=1$ (μονάδες 3) και $F(x)=x^{\ln x}$, για κάθε $x>0$ (μονάδες 2).

Μονάδες 9

Δ3. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση F (μονάδες 2) και να λύσετε την εξίσωση $F(x^2)=F(x)-(x-1)^2$ στο διάστημα $(0,+\infty)$ (μονάδες 3).

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης F, τις ευθείες $x=1$, $x=e$ και τον άξονα $x'x$ ισχύει $E>2e-3$.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους / τις εξεταζόμενες)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο **μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των **φωτοαντιγράφων** αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

8

Α1: Αποδειξη ολοκληρωματα

Α2: Βασικο Θεωρημα.

Α3: Βασικοί ορισμοί

Α4: (α) Σ (β) Σ (γ) Λ (δ) Λ (ε) Σ

Β1: Fermat $f'(1)=0$

$f'(x)=3x^2+2\alpha x+9$

$f'(1)=3+2\alpha+9=0 \Rightarrow 2\alpha=-12 \Rightarrow \boxed{\alpha=-6}$

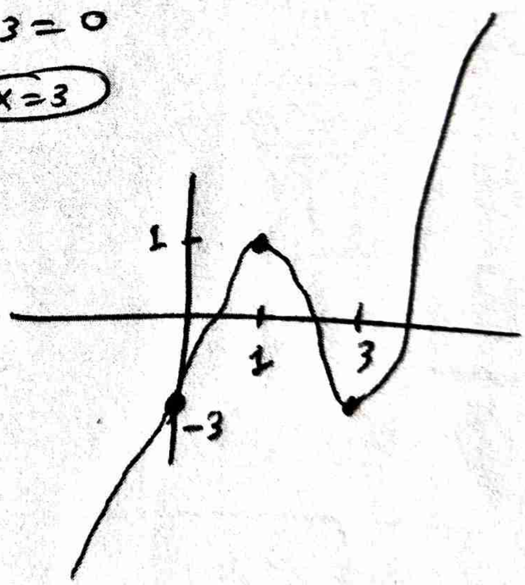
Β2: $f(x)=x^3-6x^2+9x-3$

$f'(x)=3x^2-12x+9=3(x^2-4x+3)$

$\rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0$

$x=1$ $x=3$

x		1		3	
f'	$+$		$-$		$+$
f	$-\infty$ ↗	1	↘	-3	↗



$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$f(1)=1$

$f(3)=-3$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Όταν $x<0 \Rightarrow f(x)<f(0) \Rightarrow f(x)<-3$ άρα

η $f(x)$ δεν έχει ρίζα πριν το 0.

$x<1$	$1 \leq x \leq 3$	$x>3$
• f συνεχής	• f συνεχής	• f συνεχής
• $f \nearrow$	• $f \searrow$	• $f \nearrow$
• $\Sigma T_f = (-\infty, 1]$	• $\Sigma T_f = [-3, 1]$	• $\Sigma T_f = [-3, +\infty)$
Το $0 \in \Sigma T_f$	Το $0 \in \Sigma T_f$	Το $0 \in \Sigma T_f$
α $\exists!\, \xi_1 > 0$	άρα $\exists!\, \xi_2 > 0$	άρα $\exists!\, \xi_3 > 0$
τ.ω $f(\xi_1)=0$	τ.ω $f(\xi_2)=0$	τ.ω $f(\xi_3)=0$

B3 $f''(x) = 6x-12$

$\rightarrow 6x-12=0 \Rightarrow x=2$

x		2	
f''	$-$		$+$
f	$\frown$		$\smile$

B4 $y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi) \Rightarrow y=f'(\xi)(x-\xi)+f(\xi)$

$y-g(\xi)=g'(\xi)(x-\xi) \Rightarrow y=g'(\xi)(x-\xi)+g(\xi)$

$$\boxed{\begin{aligned} g(x) &= x+f(x) \\ g'(x) &= 1+f'(x) \end{aligned}}$$

$$f'(\xi)(x-\xi) + f(\xi) = g'(\xi)(x-\xi) + g(\xi)$$

$$f'(\xi)(x-\xi) + \cancel{f(\xi)} = (1+f'(\xi))(x-\xi) + \xi + \cancel{f(\xi)}$$

$$\cancel{f'(\xi)x} - \cancel{\xi f'(\xi)} = x - \cancel{\xi} + \cancel{xf'(\xi)} - \cancel{\xi f'(\xi)} + \cancel{\xi}$$

$$\rightarrow \boxed{x=0}$$

Γ1 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{x}\eta\mu x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x^2+x} = 0$

$\left.\right\} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$, $f(0) = 0$ ✓

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x}\eta\mu x - 0}{x} = \lim_{x\to 0} e^{x}\frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+x}}{\sqrt{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{x^2+x}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{\frac{x+1}{x}} = +\infty$$

Γ2: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{x}\eta\mu x = 0$ Μ×Φ

$y=0$

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} = +\infty$ δεν έχει φθάνουσα στο $+\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = 1$

$\lim_{x\to+\infty} (f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}$

$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}$

$y = x+\frac{1}{2}$

$+\infty$

Γ3 Αρκεί ν.δ.ο. η εξίσωση $f(x) = x+\frac{1}{2}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-\pi,0)$.

$\underbrace{e^{x}\eta\mu x - x - \frac{1}{2}}_{\varphi(x)} = 0$

$\varphi(-\pi) = e^{-\pi}\cancel{\eta\mu(-\pi)}^{\,0} + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0$

$\varphi(0) = -\frac{1}{2} < 0$

Bolzano $\exists\, \xi \in (-\pi, 0)$ τ.ω. $\varphi(\xi) = 0$

Γ4

$x'(t) > 0$

$$y'(t) = x'(t)$$

$$\frac{2x(t)\cancel{x'(t)} + \cancel{x'(t)}}{2\sqrt{x^2(t)+x(t)}} = \cancel{x'(t)} \qquad \text{αφου } x'(t)>0$$

$$2x(t)+1 = 2\sqrt{x^2(t)+x(t)}$$

Πρεπει απλα να λυσω την εξισωση

$$2\sqrt{x^2+x} = 2x+1 \qquad \begin{matrix} 2x+1 \geq 0 \\ x^2+x \geq 0 \end{matrix}$$

$$4(x^2+x) = (2x+1)^2$$

$$4x^2+4x = 4x^2+4x+1$$

$0=1$ Αδυνατη! Δεν υπαρχει τετοιο σημειο.

$x^{\ln x} = e^{\ln^2 x}$

Δ1

$$g(x) = \frac{F(x)}{x^{\ln x}}$$

$$g'(x) = \frac{f(x)\, x^{\ln x} - F(x)\, x^{\ln x}\, 2\ln x\, \frac{1}{x}}{x^{2\ln x}}$$

$$g'(x) = \frac{f(x) - F(x)\, 2\ln x\, \frac{1}{x}}{x^{\ln x}} = \frac{\overset{0}{\cancel{x f(x) - 2\ln x\, F(x)}}}{x \cdot x^{\ln x}} = 0$$

$g(x) = c$

Δ2 Γνωρίζω ότι $f'(1) = 2$ και $f(1) = 0$

i) $\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = 2.$

ii). $F(x) = \frac{x f(x)}{2\ln x}, \quad x \neq 1, \quad x > 0$

$\lim_{x\to 1} F(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x f(x)}{2\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{x}{2} \frac{f(x)}{\ln x} = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$

F συνεχής $\Rightarrow F(1) = 1$

$g(x) = c \Rightarrow \frac{F(x)}{x^{\ln x}} = c \Rightarrow F(x) = c\, x^{\ln x}$

$F(1) = c = 1 \Rightarrow F(x) = x^{\ln x}.$

Δ3

$F'(x) = x^{\ln x} \, \frac{2\ln x}{x}$

$\boxed{x^{\ln x} = e^{\ln x^{\ln x}} = e^{\ln^2 x}}$

$\longrightarrow F'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0$ $\quad \underline{x=1}$

x	1	
F'	−	+
F	↘	↗

$F(x) \geq F(1)$

$F(x) \geq 1$

$F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$ $\quad \underline{\underline{x=1}}$

$\underline{x<1}$

$\underbrace{F(x^2) - F(x)}_{+} + \underbrace{(x-1)^2}_{+} = 0$

- $x^2 < x \Rightarrow F(x^2) > F(x) \Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0$

$\underline{x>1}$

$\underbrace{F(x^2) - F(x)}_{+} + \underbrace{(x-1)^2}_{+} = 0$

- $x < x^2 \Rightarrow F(x) < F(x^2) \Rightarrow F(x^2) - F(x) > 0$

Δυ $E = \int_1^e |F(x)|\,dx = \int_1^e |x^{\ln x}|\,dx$

$E = \int_1^e F(x)\,dx$

Αρκει νδο $\int_1^e F(x)\,dx > 2e-3$

$x^{\ln x} = e^{\ln x^{\ln x}} = e^{\ln^2 x}$

$e^x \geq x+1$

$e^{\ln^2 x} \geq \ln^2 x + 1$

$F(x) \geq \ln^2 x + 1$

$\int_1^e F(x)\,dx \geq \int_1^e \ln^2 x + 1\,dx$

$\rightarrow \int_1^e \ln^2 x + 1\,dx = (x\ln^2 x)_1^e - \int_1^e x\frac{2\ln x}{x}\,dx + e - 1$

$= 2e - 2\int_1^e \ln x\,dx - 1 = 2e - 2\left((x\ln x)_1^e - e + 1\right) - 1$

$= 2e - 2(e - e + 1) - 1 = 2e - 3$

Δ2

Διευκρίνιση

(i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{\ln x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f'(x)}{\frac{1}{x}} = \dfrac{f'(1)}{1} = 2$

για να δεχτώ το σημείο αυτό πρέπει η $f'(x)$ να είναι συνεχής.

$x f(x) = 2F(x)\ln x$

$f(x) = 2\,\dfrac{F(x)\ln x}{x}$

$f'(x) = 2\,\dfrac{(F(x)\ln x)'x - F(x)\ln x}{x^2}$

$f'(x) = 2\,\dfrac{\left(f(x)\ln x + F(x)\frac{1}{x}\right)x - F(x)\ln x}{x^2}$

Η f' συνεχής ως π.ό.σ

B' τρόπος

$\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{\ln x} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{\ln x} \overset{f(1)=0}{=\!=} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\frac{\ln x}{x-1}} = \dfrac{f'(1)}{1} = 2.$

$x f(x) = 2F(x)\ln x$

$x=1$

$f(1) = 0$

$\to \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x} = 1$