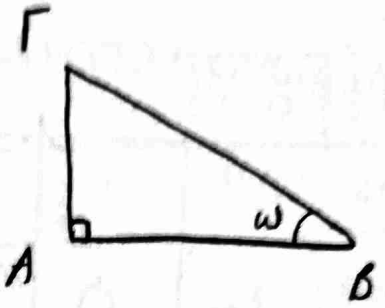
Τριγωνομετρικοί αριθμοί οξείας γωνίας

Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας οξείας γωνίας ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι οι εξής:



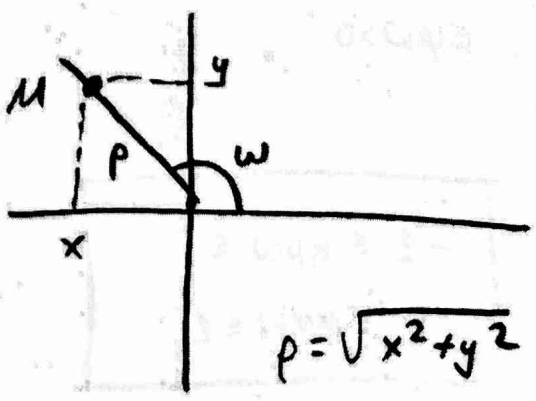
$$\eta\mu\hat{\omega} = \frac{\text{απ. κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{A\Gamma}{B\Gamma}$$

$$\sigma\upsilon\nu\hat{\omega} = \frac{\text{πρ. κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}} = \frac{AB}{B\Gamma}$$

$$\varepsilon\varphi\hat{\omega} = \frac{\text{απ. κάθετη}}{\text{πρ. κάθετη}} = \frac{A\Gamma}{AB}$$

$$\sigma\varphi\hat{\omega} = \frac{\text{πρ. κάθετη}}{\text{απ. κάθετη}} = \frac{AB}{A\Gamma}$$

Τριγωνομετρικοί αριθμοί οποιασδήποτε γωνίας



$$\eta\mu\omega = \frac{y}{\rho}$$

$$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{x}{\rho}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{y}{x}$$

$$\sigma\varphi\omega = \frac{x}{y}$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2}$$

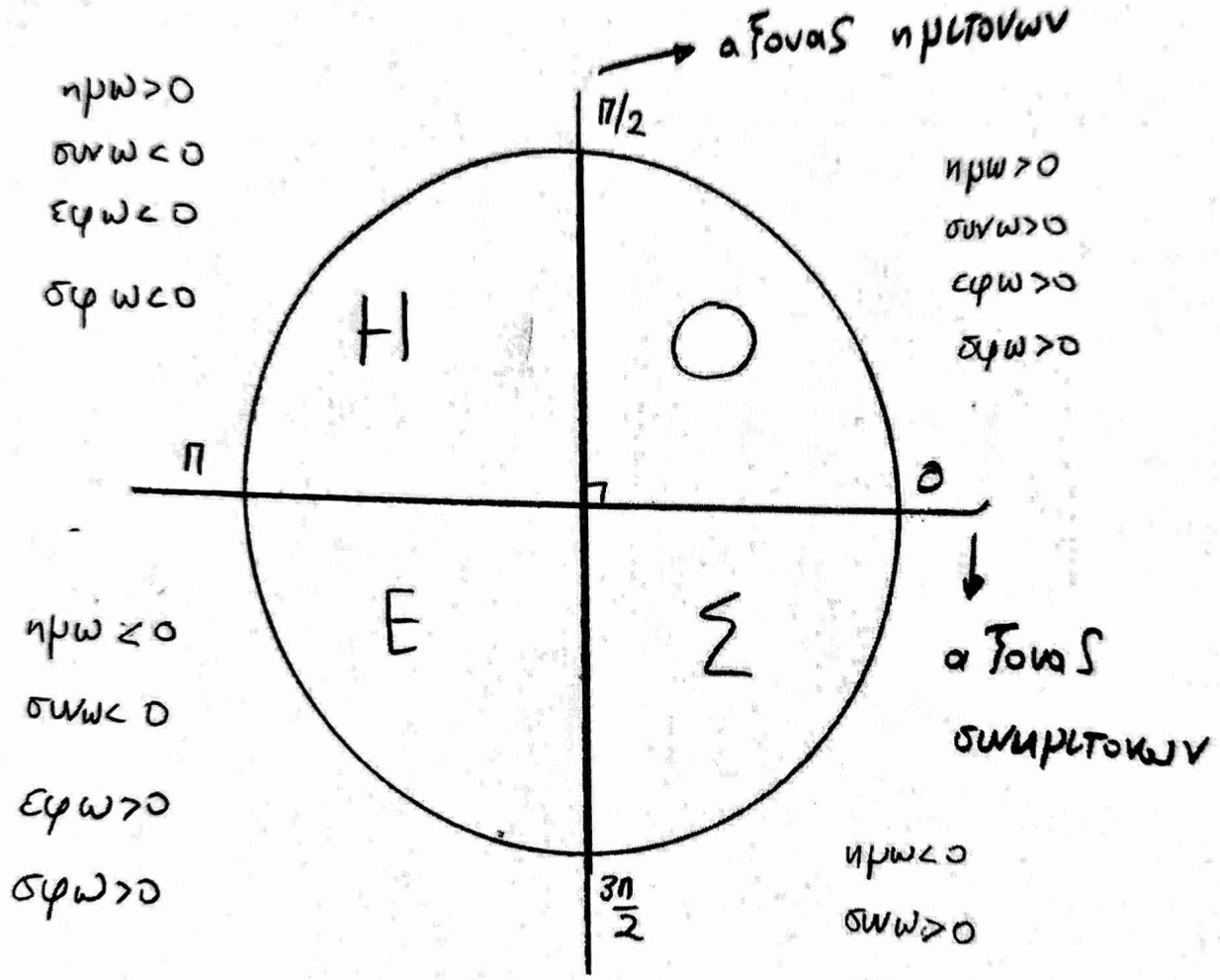
Μοίρες - rad

Μοίρες : μ

rad : α

$$\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}$$

Τριγωνομετρικός κύκλος



$$-1 \leq \eta\mu\omega \leq 1$$

$$-1 \leq \sigma\upsilon\nu\omega \leq 1$$

Τριγωνομετρικός πίνακας

Βασικών γωνιών

Μοίρες	0	30	45	60	90	180	270	360
rad	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
ημ	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1	0
συν	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0	1
εφ	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
σφ	-	$\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}/3$	0	-	0	-

Αναγωγή στο 1ο τεταρτημόριο

1. $\eta\mu(k\cdot 360+\omega)=\eta\mu\omega$

   $\sigma\upsilon\nu(k\cdot 360+\omega)=\sigma\upsilon\nu\omega$

   $\varepsilon\varphi(k\cdot 360+\omega)=\varepsilon\varphi\omega$

   $\sigma\varphi(k\cdot 360+\omega)=\sigma\varphi\omega$

2. $\eta\mu(-\omega)=-\eta\mu\omega$

   $\sigma\upsilon\nu(-\omega)=\sigma\upsilon\nu\omega$

   $\varepsilon\varphi(-\omega)=-\varepsilon\varphi\omega$

   $\sigma\varphi(-\omega)=-\sigma\varphi\omega$

3. $\eta\mu(180-\omega)=\eta\mu\omega$

   $\sigma\upsilon\nu(180-\omega)=-\sigma\upsilon\nu\omega$

   $\varepsilon\varphi(180-\omega)=-\varepsilon\varphi\omega$

   $\sigma\varphi(180-\omega)=-\sigma\varphi\omega$

4. $\eta\mu(180+\omega)=-\eta\mu\omega$

   $\sigma\upsilon\nu(180+\omega)=-\sigma\upsilon\nu\omega$

   $\varepsilon\varphi(180+\omega)=\varepsilon\varphi\omega$

   $\sigma\varphi(180+\omega)=\sigma\varphi\omega$

5. $\eta\mu(90-\omega)=\sigma\upsilon\nu\omega$

   $\sigma\upsilon\nu(90-\omega)=\eta\mu\omega$

   $\varepsilon\varphi(90-\omega)=\sigma\varphi\omega$

   $\sigma\varphi(90-\omega)=\varepsilon\varphi\omega$

6. $\eta\mu(90+\omega)=\sigma\upsilon\nu\omega$

   $\sigma\upsilon\nu(90+\omega)=-\eta\mu\omega$

   $\varepsilon\varphi(90+\omega)=-\sigma\varphi\omega$

   $\sigma\varphi(90+\omega)=-\varepsilon\varphi\omega$

Βασικοί τύποι τριγωνομετρίας

1. $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$

2. $(\eta\mu x)^2 = \eta\mu^2 x$ και $(\sigma\upsilon\nu x)^2 = \sigma\upsilon\nu^2 x$

3. $\varepsilon\varphi x = \dfrac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$ και $\sigma\varphi x = \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$

4. $\varepsilon\varphi x \cdot \sigma\varphi x = 1$

5. $\sigma\upsilon\nu^2 x = \dfrac{1}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$

6. $\eta\mu^2 x = \dfrac{\varepsilon\varphi^2 x}{1+\varepsilon\varphi^2 x}$

Βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις

1. $f(x) = \rho\,\eta\mu(\omega x) + c$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

Max $f: |\rho| + c$

Min $f: -|\rho| + c$

ωx	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	αναλογως				
$\eta\mu\omega x$	0	1	0	-1	0
$\rho\eta\mu\omega x$	0	ρ	0	$-\rho$	0
$f(x)$	c	$\rho+c$	c	$-\rho+c$	c

2. $f(x) = \rho\,\sigma\upsilon\nu\omega x + c$

$T = \frac{2\pi}{\omega}$

Max $f: |\rho| + c$

Min $f: -|\rho| + c$

ωx	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	αναλογως				
$\sigma\upsilon\nu\omega x$	1	0	-1	0	1
$\rho\sigma\upsilon\nu\omega x$	ρ	0	$-\rho$	0	ρ
$f(x)$	$\rho+c$	c	$-\rho+c$	c	$\rho+c$

Βασικές τριγωνομετρικές εξισώσεις

1. $\eta\mu x = \eta\mu\theta \iff x = 2k\pi + \theta$ ή $x = 2k\pi + \pi - \theta$, $k \in Z$

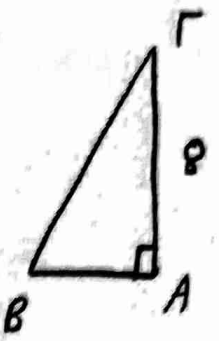
2. $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta \iff x = 2k\pi + \theta$ ή $x = 2k\pi - \theta$, $k \in Z$

3. $\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta \iff x = k\pi + \theta$, $k \in Z$

4. $\sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta \iff x = k\pi + \theta$, $k \in Z$

Ασκηση 1

Στο ορθογωνιο τριγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A}=90$) του διπλανου σχηματος ισχυει οτι $A\Gamma = 8$ cm και $\eta\mu\hat{B} = \frac{4}{5}$



(α) Να βρεις τις πλευρες $B\Gamma$, AB

Εινα $\eta\mu\hat{B} = \frac{8}{B\Gamma} \Leftrightarrow \frac{4}{5} = \frac{8}{B\Gamma} \Leftrightarrow 4B\Gamma = 40$

$\Leftrightarrow \boxed{B\Gamma = 10}$

Απο πυθ. θεωρημα

$AB^2 + 8^2 = 10^2$

$AB^2 = 100 - 64$

$AB^2 = 36 \Leftrightarrow \boxed{AB = 6}$

(β) Βρες τους τριγωνομετρικους αριθμους της γωνιας $\hat{\Gamma}$

$\eta\mu\hat{\Gamma} = \frac{6}{10}$

$\sigma\upsilon\nu\hat{\Gamma} = \frac{8}{10}$

$\varepsilon\varphi\hat{\Gamma} = \frac{6}{8}$

$\sigma\varphi\hat{\Gamma} = \frac{8}{6}$

Ασκηση 2

Να βρεθουν οι τριγωνομετρικοι αριθμοι των γωνιων 1140° και $\frac{49\pi}{6}$

και στη συνεχεια να βρεθουν τα προσημα των τριγωνομετρικων αριθμων των γωνιων 110° και $\frac{5\pi}{8}$ rad.

→ $1140 = 3\cdot 360 + 60$

αρα $\eta\mu(1140) = \eta\mu 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\varepsilon\varphi(1140) = \varepsilon\varphi 60 = \sqrt{3}$

$\sigma\upsilon\nu(1140) = \sigma\upsilon\nu 60 = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\sigma\varphi(1140) = \sigma\varphi 60 = \frac{\sqrt{3}}{3}$

→ $\frac{49\pi}{6} = \frac{48\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 8\pi + \frac{\pi}{6}$

αρα $\eta\mu\left(\frac{49\pi}{6}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\varepsilon\varphi\left(\frac{49\pi}{6}\right) = \varepsilon\varphi\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{49\pi}{6}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\sigma\varphi\left(\frac{49\pi}{6}\right) = \sigma\varphi\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

→ Η γωνια 110° ανηκει στο 2ο τεταρτημοριο

αρα $\eta\mu 110 > 0$, $\sigma\upsilon\nu 110 < 0$, $\varepsilon\varphi 110 < 0$, $\sigma\varphi 110 < 0$

→ Η γωνια $\frac{5\pi}{3} = 300^\circ$ ανηκει στο 4ο τεταρτημοριο

αρα $\eta\mu\frac{5\pi}{8} < 0$, $\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{3} > 0$, $\varepsilon\varphi\frac{5\pi}{3} < 0$, $\sigma\varphi\frac{5\pi}{3} < 0$.

Άσκηση 3

Να βρείτε τη μέγιστη και τη ελάχιστη τιμή των παραστάσεων.

(α) $A = 3\eta\mu x - 4\sigma\upsilon\nu y$

Είναι $-1 \leq \eta\mu x \leq 1$ και $-1 \leq \sigma\upsilon\nu y \leq 1$

$\Leftrightarrow -3 \leq 3\eta\mu x \leq 3$

$4 \geq -4\sigma\upsilon\nu y \geq -4$

$-4 \leq -4\sigma\upsilon\nu y \leq 4$

$\oplus$

$-7 \leq 3\eta\mu x - 4\sigma\upsilon\nu y \leq 7.$

$-7 \leq A \leq 7$

(β) $B = 5 - 3\eta\mu^2 x$

Είναι $-1 \leq \eta\mu x \leq 1 \Leftrightarrow |\eta\mu x| \leq 1$

$|\eta\mu x|^2 \leq 1^2$

$0 \leq \eta\mu^2 x \leq 1$

$0 \geq -3\eta\mu^2 x \geq -3$

$5 \geq 5 - 3\eta\mu^2 x \geq 2$

Άρα $2 \leq B \leq 5$

Άσκηση 4

Δίνεται γωνία ω ώστε $\eta\mu\omega = \frac{5}{13}$

και $\frac{\pi}{2} < \omega < \pi$

Να βρείτε $\sigma\upsilon\nu\omega$, $\varepsilon\varphi\omega$, $\sigma\varphi\omega$

Γνωρίζω ότι $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{13}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 - \frac{25}{169} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{144}{169}$

άρα $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{12}{13}$ ή $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{12}{13}$

αλλά $\omega \in$ 2ο τεταρτημόριο άρα $\sigma\upsilon\nu\omega < 0$

συνεπώς $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{12}{13}$

Τώρα $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} = \frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}} = -\frac{5}{12}$

$\sigma\varphi\omega = -\frac{12}{5}$

Ασκηση 5

Δίνεται γωνια ω ωστε $\pi < \omega < \frac{3\pi}{2}$

και $4\varepsilon\varphi\omega - 6\sigma\varphi\omega + 5 = 0$

Να βρεθουν τους τριγωνομετρικους αριθμους της γωνιας ω.

Επειδη $\varepsilon\varphi\omega \cdot \sigma\varphi\omega = 1 \Leftrightarrow \sigma\varphi\omega = \frac{1}{\varepsilon\varphi\omega}$

αρα $4\varepsilon\varphi\omega - 6\frac{1}{\varepsilon\varphi\omega} + 5 = 0$

Θετω $\varepsilon\varphi\omega = t$ αρα $4t - 6\frac{1}{t} + 5 = 0$

$\Leftrightarrow 4t^2 + 5t - 6 = 0$

$\Delta = 25 + 16 \cdot 6$

$\Delta = 121$

$t = \frac{-5 \pm 11}{8}$ $\begin{cases} t = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = \frac{3}{4} \\ t = -2 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega = -2 \end{cases}$

αλλα η γωνια $\omega \in 3ο$ τεταρτημοριο

οπου εχει $\varepsilon\varphi\omega > 0$ αρα $\varepsilon\varphi\omega = \frac{3}{4}$

Συνεπώς $\sigma\varphi\omega = \frac{4}{3}$.

Τώρα $\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2}$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\frac{16}{9}} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{\frac{25}{9}} = \frac{9}{25}$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{3}{5} \quad \text{ή} \quad \sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$$

Δεκτό, το $\sigma\upsilon\nu\omega = -\frac{3}{5}$

Οπότε $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega} \Leftrightarrow \frac{3}{4} = \frac{\eta\mu\omega}{-\frac{3}{5}}$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{5} = \eta\mu\omega \Leftrightarrow \eta\mu\omega = -\frac{9}{20}.$$

Άσκηση 6

Αν ισχύει ότι $3\eta\mu\theta + 4\sigma\upsilon\nu\theta = 5$

να υπολογίσετε η παράσταση

$$A = 5\sigma\upsilon\nu\theta - 4\varepsilon\varphi\theta$$

Είναι $3\eta\mu\theta = 5 - 4\sigma\upsilon\nu\theta \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \frac{5-4\sigma\upsilon\nu\theta}{3}$

Επίσης $\eta\mu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5-4\sigma\upsilon\nu\theta}{3}\right)^2 + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{(5-4\sigma\upsilon\nu\theta)^2}{9} + \sigma\upsilon\nu^2\theta = 1$$

$$\Leftrightarrow 25 - 40\sigma\upsilon\nu\theta + 16\sigma\upsilon\nu^2\theta + 9\sigma\upsilon\nu^2\theta = 9$$

$$25\sigma\upsilon\nu^2\theta - 40\sigma\upsilon\nu\theta + 16 = 0$$

$$(5\sigma\upsilon\nu\theta - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow 5\sigma\upsilon\nu\theta - 4 = 0$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{4}{5}$$

Επειδή $3\eta\mu\theta + 4\sigma\upsilon\nu\theta = 5$

$$3\eta\mu\theta + 4\cdot\frac{4}{5} = 5 \Leftrightarrow 3\eta\mu\theta + \frac{16}{5} = 5$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\theta = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{3}{4}$$

Άρα $A = 5\cdot\frac{4}{5} - 4\cdot\frac{3}{4} = 1$.

Ασκηση 7

(α) Να εξεταστει, αν υπαρχουν τιμες του x για τις οποιες ισχυει συγχρονως οτι $\eta\mu x = \frac{2}{3}$ και $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{3}$

Εστω οτι υπαρχει τετοια γωνια x.

Τοτε $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$

$\Leftrightarrow \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = 1 \Leftrightarrow \frac{5}{9} = 1$ Ατοπο!.

(β) Να βρεθει το k ωστε να υπαρχει γωνια ω και να ισχυει οτι

$$\eta\mu\omega = \frac{k}{k+2} \quad \text{και} \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \frac{k+1}{k+2}$$

Προπει $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{k}{k+2}\right)^2 + \left(\frac{k+1}{k+2}\right)^2 = 1$

$\Leftrightarrow \frac{k^2}{(k+2)^2} + \frac{(k+1)^2}{(k+2)^2} = 1 \Leftrightarrow k^2 + k^2 + 2k + 1 = k^2 + 4k + 4$

$\Leftrightarrow k^2 - 2k - 3 = 0$ $\quad (k=3)$ $\quad (k=-1)$

Άσκηση 8

Να αποδειχθούν οι παρακάτω ισότητες

(α) $\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1+\varepsilon\varphi x} + \frac{\eta\mu^2 x}{1+\sigma\varphi x} = 1 - \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$

Είναι $\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{1+\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}} + \frac{\eta\mu^2 x}{1+\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}} = 1 - \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$

$\Leftrightarrow \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x}{\frac{\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}} + \frac{\eta\mu^2 x}{\frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}} = 1 - \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$

$\frac{\sigma\upsilon\nu^3 x}{\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x} + \frac{\eta\mu^3 x}{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x} = 1 - \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$

$\frac{\sigma\upsilon\nu^3 x + \eta\mu^3 x}{\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x} = 1 - \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$

$\frac{(\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu^2 x - \sigma\upsilon\nu x \eta\mu x + \eta\mu^2 x)}{\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x} = 1 - \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x$

$\Leftrightarrow 1 - \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x = 1 - \eta\mu x \sigma\upsilon\nu x.$

Άσκηση 9

Να αποδειχθούν οι ανισότητες

(α) $(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)^2 \leq 2$

Είναι $\eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x \leq 2$

$1 + 2\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x \leq 2$

$2\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x \leq 1$

$2\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x \leq \eta\mu^2 x + \sigma\upsilon\nu^2 x$

$0 \leq \eta\mu^2 x - 2\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x$

$0 \leq (\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x)^2$

(β) $-5 \leq 3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x \leq 5$

$|3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x| \leq 5$

$(3\eta\mu x + 4\sigma\upsilon\nu x)^2 \leq 25$

$9\eta\mu^2 x + 24\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x + 16\sigma\upsilon\nu^2 x \leq 25$

$9(1-\sigma\upsilon\nu^2 x) + 24\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x + 16(1-\eta\mu^2 x) \leq 25$

$9 - 9\sigma\upsilon\nu^2 x + 24\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x + 16 - 16\eta\mu^2 x \leq 25$

$9\sigma\upsilon\nu^2 x + 16\eta\mu^2 x - 24\eta\mu x\,\sigma\upsilon\nu x \geq 0 \quad (\Leftrightarrow (3\sigma\upsilon\nu x - 4\eta\mu x)^2 \geq 0$

Άσκηση 10

Να υπολογιστεί η παράσταση

$$A = \frac{\eta\mu(24\pi-\theta)\cdot\sigma\upsilon\nu(37\pi-\theta)\cdot\varepsilon\varphi(15\pi+\theta)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{21\pi}{2}-\theta\right)}{\eta\mu\left(\frac{17\pi}{2}+\theta\right)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\frac{23\pi}{2}-\theta\right)\cdot\sigma\varphi\left(\frac{27\pi}{2}+\theta\right)\varepsilon\varphi(\theta-12\pi)}$$

- $\eta\mu(24\pi-\theta) = \eta\mu\theta$
- $\sigma\upsilon\nu(37\pi-\theta) = \sigma\upsilon\nu(36\pi+\pi-\theta) = \sigma\upsilon\nu(\pi-\theta) = -\sigma\upsilon\nu\theta$
- $\varepsilon\varphi(15\pi+\theta) = \varepsilon\varphi(14\pi+\pi+\theta) = \varepsilon\varphi(\pi+\theta) = \varepsilon\varphi\theta$
- $\sigma\varphi\left(\frac{21\pi}{2}-\theta\right) = \sigma\varphi\left(\frac{20\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sigma\varphi\left(10\pi+\frac{\pi}{2}-\theta\right) =$

$$= \sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \varepsilon\varphi\theta$$

- $\eta\mu\left(\frac{17\pi}{2}+\theta\right) = \eta\mu\left(\frac{16\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \eta\mu\left(8\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right) =$

$$= \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \sigma\upsilon\nu\theta$$

- $\sigma\upsilon\nu\left(\frac{23\pi}{2}-\theta\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{22\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sigma\upsilon\nu\left(11\pi+\frac{\pi}{2}-\theta\right)$

$$= \sigma\upsilon\nu\left(10\pi+\pi+\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sigma\upsilon\nu\left(\pi+\frac{\pi}{2}-\theta\right) = -\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) =$$

$$= -\eta\mu\theta.$$

• $\sigma\varphi\left(\frac{27\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\varphi\left(\frac{26\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\varphi\left(13\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right)$

$=\sigma\varphi\left(12\pi+\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\varphi\left(\pi+\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=-\varepsilon\varphi\theta$

• $\varepsilon\varphi\left(\theta-12\pi\right)=-\varepsilon\varphi\left(12\pi-\theta\right)=-\varepsilon\varphi\left(-\theta\right)=\varepsilon\varphi\theta$.

Ара $A=\dfrac{(-n\mu\theta)(-\sigma\omega\theta)\,\varepsilon\varphi\theta\,\varepsilon\varphi\theta}{\sigma\omega\theta\;\;(-n\mu\theta)(-\varepsilon\varphi\theta)\,\varepsilon\varphi\theta}=1$.

Άσκηση 11

Να αποδειχθούν οι ισότητες.

(α) $\eta\mu^2\left(\frac{5\pi}{6}-\omega\right)+\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{3}-\omega\right)=1$.

Είναι $\eta\mu\left(\frac{5\pi}{6}-\omega\right)=\eta\mu\left(\frac{6\pi}{6}-\frac{\pi}{6}-\omega\right)=\eta\mu\left(\pi-\frac{\pi}{6}-\omega\right)$

$=\eta\mu\left(\pi-\left(\frac{\pi}{6}+\omega\right)\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}+\omega\right)$

Άρα $\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{6}+\omega\right)+\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{3}-\omega\right)=1$

Παρατηρώ ότι $\left(\frac{\pi}{6}+\omega\right)+\left(\frac{\pi}{3}-\omega\right)=\frac{\pi}{2}$

Άρα $\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{3}-\omega\right)\right)+\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{3}-\omega\right)=1$.

$\sigma\upsilon\nu^2\left(\frac{\pi}{3}-\omega\right)+\eta\mu^2\left(\frac{\pi}{3}-\omega\right)=1$.

$1=1$.

(β) Αν A,B,Γ γωνίες τριγώνου τότε $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}$

Γνωρίζω ότι $A+B+\Gamma=180 \Leftrightarrow \frac{A}{2}+\frac{B+\Gamma}{2}=90 \Leftrightarrow \frac{B+\Gamma}{2}=90-\frac{A}{2}$

άρα $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\eta\mu\left(90-\frac{A}{2}\right) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}$.

Άσκηση 12

Να γίνει η γραφική παράσταση των συναρτήσεων

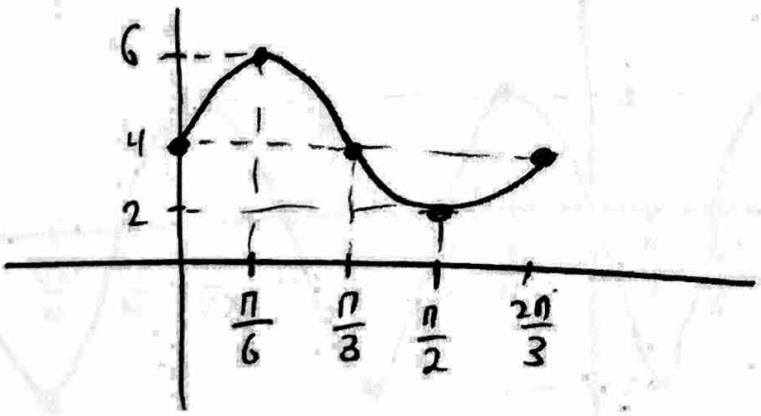
(α) $f(x) = 4 + 2\eta\mu 3x$, $x \in [0, \frac{2\pi}{3}]$

Περίοδος: $T = \frac{2\pi}{\omega} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{3}$.

Max: $|\rho| + c = |2| + 4 = 2 + 4 = 6$

Min: $-|\rho| + c = -|2| + 4 = 2$

$3x$	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
x	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$
$\eta\mu 3x$	0	1	0	-1	0
$2\eta\mu 3x$	0	2	0	-2	0
$f(x)$	4	6	4	2	4

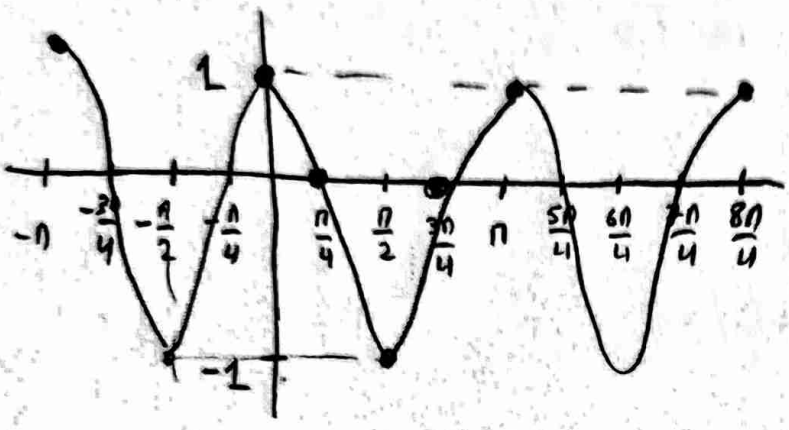


(B) $g(x) = \sigma\upsilon\nu\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ στο $[-\pi, 2\pi]$

Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x) = \sigma\upsilon\nu 2x$

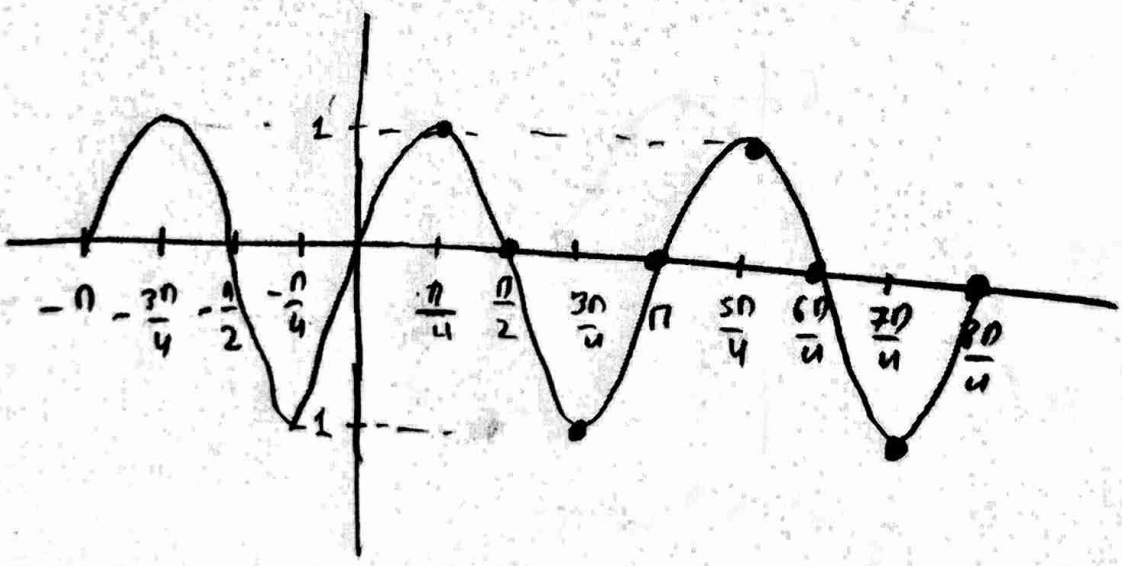
$$T = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Επομ $-1 \le \sigma\upsilon\nu 2x \le 1$ άρα $-1 \le h(x) \le 1$



$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\sigma\upsilon\nu 2x$	1	0	-1	0	1
$h(x)$	1	0	-1	0	1

Συνεπώς η γραφική παράσταση της $g(x)$ είναι μετατοπισμένη κατά $\frac{\pi}{4}$ δεξιά.



extra

$$f(x) = 3\sin 2x + 1$$

- $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

- $-1 \le \sin 2x \le 1$

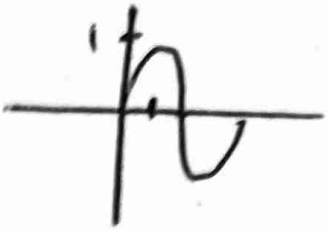
$$-3 \le 3\sin 2x \le 3$$

$$-2 \le 3\sin 2x + 1 \le 4$$

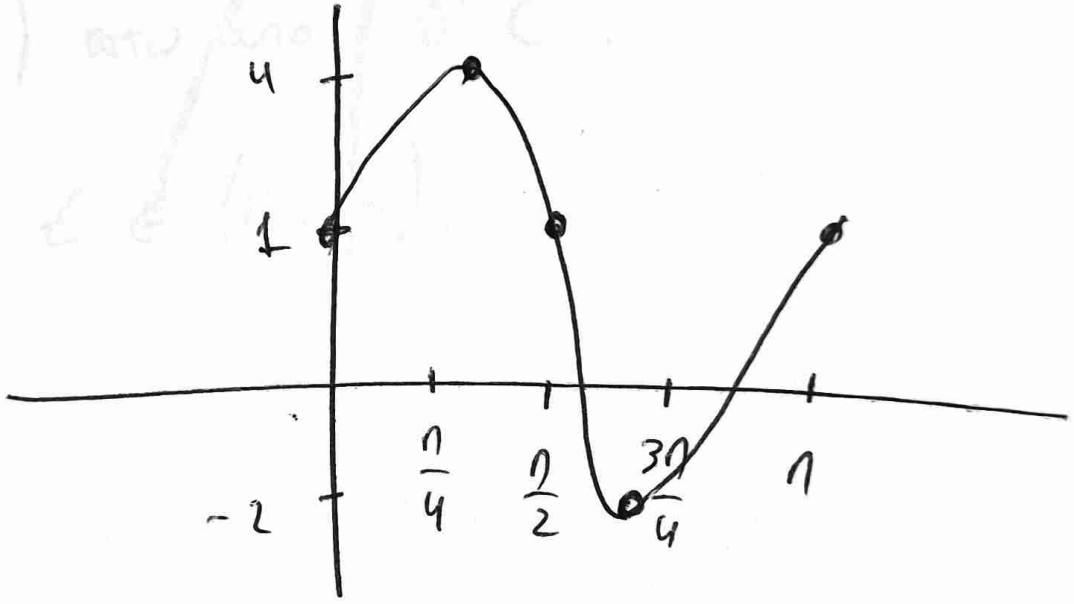
$$-2 \le f(x) \le 4$$

-2 ↓ min　　4 ↓ max.

Συντομη τροπη



$2x$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$\eta\mu 2x$	0	1	0	-1	0
$3\eta\mu 2x$	0	3	0	-3	0
$f(x)$	1	4	1	-2	1



Άσκηση 17

Να λυθούν οι τριγωνομετρικές εξισώσεις.

(α) . $\eta\mu x = \frac{1}{2}$

Είναι $\eta\mu x = \eta\mu\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \boxed{x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}}$

η

$x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6}$

$\boxed{x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}}$

(β) $3\eta\mu x - 5 = 0$

Είναι $\eta\mu x = \frac{5}{3}$ Αδύνατη αφού $-1 \le \eta\mu x \le 1$

(γ) $\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

Είναι $\sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \sigma\upsilon\nu\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi + x + \frac{\pi}{4}$ ή $x - \frac{\pi}{3} = 2k\pi - x - \frac{\pi}{4}$

Αδύνατη!

$2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$

$x = k\pi + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{8}$

$\boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{24}}$.

(δ) $\sigma\varphi\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\sigma\varphi x=0$

Είναι $\sigma\varphi\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-\sigma\varphi x$

$\sigma\varphi\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\sigma\varphi(-x)$

$x-\frac{\pi}{4}=k\pi-x$

$2x=k\pi+\frac{\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \boxed{x=\frac{k\pi}{2}+\frac{\pi}{8}}$

(ε) $\sigma\upsilon\nu(2x)+\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$

$\sigma\upsilon\nu(2x)=-\sigma\upsilon\nu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

$\sigma\upsilon\nu(2x)=\sigma\upsilon\nu\left(\pi-x+\frac{\pi}{3}\right)$

$2x=2k\pi+\pi-x+\frac{\pi}{3}$

$3x=2k\pi+\frac{4\pi}{3}$

$\boxed{x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{4\pi}{9}}$

ή $2x=2k\pi-\pi+x-\frac{\pi}{3}$

$\boxed{x=2k\pi-\frac{4\pi}{3}}$

(ι) $\eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+\sigma\upsilon\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=0$

Given $\sigma\upsilon\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=-\eta\mu\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$

$\sigma\upsilon\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\eta\mu\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$

$\sigma\upsilon\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sigma\upsilon\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}+2x\right)$

$\sigma\upsilon\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\sigma\upsilon\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)$

$\frac{\pi}{4}+x=2k\pi+\frac{\pi}{4}+2x$ ή $\frac{\pi}{4}+x=2k\pi-\frac{\pi}{4}-2x$

$-x=2k\pi$ $\qquad 3x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$

$\boxed{x=-2k\pi}$ $\qquad \boxed{x=\frac{2k\pi}{3}-\frac{\pi}{6}}$

(ια) $2\eta\mu x\,\sigma\upsilon x-\frac{1}{2}=2\sigma\upsilon x-\eta\mu x$

$2\eta\mu x\sigma\upsilon x-2\sigma\upsilon x=1-\eta\mu x$

$2\sigma\upsilon x\left(\eta\mu x-1\right)+\eta\mu x-1=0 \Leftrightarrow$

$\left(\eta\mu x-1\right)\left(2\sigma\upsilon x+1\right)=0$

$\eta\mu x=1$ ή $\sigma\upsilon x=-\frac{1}{2}$

$\boxed{x=2k\pi+\frac{\pi}{2}}$ $\qquad \boxed{x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}}$

(θ) $\eta\mu x \cdot c\varphi x = 1 + \sigma\upsilon\nu x + \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$, $\sigma\upsilon\nu x \neq 0$

Είναι $\sigma\upsilon\nu x \, \eta\mu x \, \varepsilon\varphi x = \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x + 1$

$\sigma\upsilon\nu x \, \eta\mu x \, \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} = \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x + 1$

$\eta\mu^2 x = \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x + 1 \Leftrightarrow$

$1 - \sigma\upsilon\nu^2 x = \sigma\upsilon\nu x + \sigma\upsilon\nu^2 x + 1$

$0 = 2\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x (2\sigma\upsilon\nu x + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x = 0$ ή $2\sigma\upsilon\nu x + 1 = 0$

απορ/ται $\sigma\upsilon\nu x = -\frac{1}{2}$

$\boxed{x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}}$

(i) $\eta\mu x - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x = 0$

Έστω ότι $\eta\mu x = 0$ τότε $\sigma\upsilon\nu x = 0$ που είναι Άτοπο!

Άρα $\eta\mu x \neq 0$

Συνεπώς $1 - \sqrt{3}\sigma\varphi x = 0 \Leftrightarrow \sigma\varphi x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$\Leftrightarrow \boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{3}}$

(Ε) $4\sigma\upsilon\nu^2x + 8\eta\mu x - 7 = 0$

Είναι $4(1-\eta\mu^2x) + 8\eta\mu x - 7 = 0$

$4 - 4\eta\mu^2x + 8\eta\mu x - 7 = 0$

$-4\eta\mu^2x + 8\eta\mu x - 3 = 0$

Θέτω $\eta\mu x = t$ άρα $-4t^2 + 8t - 3 = 0$

$\Delta = 64 - 48 = 16$

$t = \frac{-8 \pm 4}{-8}$ → $t = \frac{1}{2}$ ή $t = \frac{3}{2}$

άρα $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ ή $\eta\mu x = \frac{3}{2}$

$x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}$

Άτοπο!

Προσοχή

Να λυθεί η εξίσωση

$$\varepsilon\varphi x = \sqrt{3} \quad \text{στο } [-\pi, 2\pi]$$

$$\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi \frac{\pi}{3}$$

$$\boxed{x = k\pi + \frac{\pi}{3}}$$

$$-\pi \le x \le 2\pi$$

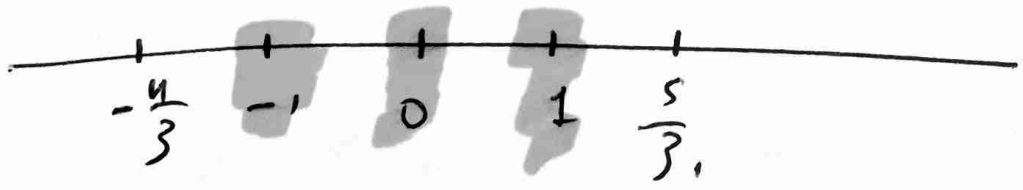
$$-\pi \le k\pi + \frac{\pi}{3} \le 2\pi$$

$$-1 \le k + \frac{1}{3} \le 2$$

$$-3 \le 3k + 1 \le 6$$

$$-4 \le 3k \le 5$$

$$-\frac{4}{3} \le k \le \frac{5}{3} \qquad k \in \mathbb{Z}$$



$k = 0$

$x = \frac{\pi}{3}$

$k = 1$

$x = \pi + \frac{\pi}{3}$

$x = \frac{4\pi}{3}$

$k = -1$

$x = -\pi + \frac{\pi}{3}$

$x = -\frac{2\pi}{3}$