Διαγωνισμα 1°

(Σελ 267)

A1: σωστος ορισμος

A2: σωστος ορισμος.

A3: α Λ β Σ γ Σ δ Λ ε Σ.

B1: $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχεί.

- $f^2(x) = 3x^2+1$ $\quad f(0)=1$
- $xg(x)+2 = g(x)+f(x)$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$.

$f^2(x) = 3x^2+1$

$f^2(x) = \sqrt{3x^2+1}^{\,2}$

$|f(x)| = |\sqrt{3x^2+1}|$ $\quad (+)$

$|f(x)| = \sqrt{3x^2+1}$

$\xrightarrow{\text{Ρίζα } f(x)}$

$f(x)=0$

$|f(x)|=0$

$\sqrt{3x^2+1} = 0$

$3x^2+1=0$

Άτοπο!

Άρα $f(x) \neq 0$

B2. Αφού $f(x) \neq 0$ και συνεχής

$f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$

$f(0) = 1$

Άρα $f(x) > 0$

$$|f(x)| = \sqrt{3x^2+1}$$

$$f(x) = \sqrt{3x^2+1}$$

B3. $x\,g(x) + 2 = g(x) + \sqrt{3x^2+1}$

$$x\,g(x) - g(x) = \sqrt{3x^2+1} - 2$$

$$g(x)(x-1) = \sqrt{3x^2+1} - 2$$

Για $x \neq 1$ $\quad g(x) = \dfrac{\sqrt{3x^2+1} - 2}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{3x^2+1-4}{(x-1)\left(\sqrt{3x^2+1}+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{3\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{3x^2+1}+2\right)}$$

$$= \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

Αφου η $g(x)$ συνεχής

$$g(1) = \lim_{x\to 1} g(x) = \frac{3}{2}$$

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}, & x \neq 1 \\[2mm] \dfrac{3}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

B4. Νδο η εξίσωση $4g(x) = 7x$

έχει τουλ. ρίζα στο $(0,1)$

$$\underbrace{4g(x) - 7x}_{h(x)} = 0$$

$h(0) = 4g(0) = +4 > 0$

$h(1) = 4g(1) - 7 = 4 \cdot \frac{3}{2} - 7 = -1 < 0$

$h(0)h(1) = -4 < 0$

Bolzano $\exists x_0 \in (0,1)$

τ.ω $h(x_0) = 0$

Θεμα Γ

Γ1 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x f(x) + \eta\mu 2x}{x} = 3$

Θεωρω βοηθητικη συναρτηση

$g(x) = \dfrac{x f(x) + \eta\mu 2x}{x}$ άρα $\underline{\underline{\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 3}}$

$g(x)\, x = x f(x) + \eta\mu 2x$

$f(x) = \dfrac{g(x)\, x - \eta\mu 2x}{x}$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{g(x) \cancel{x}}{\cancel{x}} - \dfrac{2\eta\mu 2x}{2x} \right)$

$= 3 - 2 = 1$

Αφου f συνεχης $\underline{\underline{f(0) = 1}}$

Γ2 Ndo $f(x) > 0$

Αφου $f(x) \neq 0$ και συνεχής

$f(x) > 0$ ή $f(x) < 0$

αφου $f(0) = 1$

τοτε $f(x) > 0$.

Γ3 $f \downarrow$ $f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$

$\to f(x) > 0$

$f(x) = x$

$\underbrace{f(x) - x}_{h(x)} = 0$

H $h(x)$ συνεχής στο $[0,1]$ ως π.σ.σ.

$0 < 1$

$f \downarrow$

$f(0) > f(1)$

$1 > f(1)$

$h(0) = f(0) > 0$

$h(1) = f(1) - 1 < 0$

Bolzano $\exists\, \xi \in (0,1)$ τ.ω $h(\xi) = 0$

Μονοτονια $h(x)$

$\left.\begin{array}{l} \cdot\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \\ \cdot\ x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2 \end{array}\right\} \oplus$

$h \downarrow$

Το $\exists$ μοναδικο.

Γ4 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\,\eta\mu x\right) \underset{\chi\pi o\iota\lambda\mu}{\overset{\eta\mu\infty}{=}}$

$-1 \leq \eta\mu x \leq 1$

$\boxed{-f(x) \leq f(x)\,\eta\mu x \leq f(x)}$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} -f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \end{array}\right\}$ Απο Κ.Π $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\,\eta\mu x = 0.$

Δ1

$f(0)=1$

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχή.

$$f^2(x)=1+2xf(x),$$

$$f^2(x)-2xf(x)=1$$

$$f^2(x)-2xf(x)+x^2=x^2+1.$$

$$\left(f(x)-x\right)^2=\sqrt{x^2+1}^{\,2}$$

$$|f(x)-x|=\left|\overset{+}{\sqrt{x^2+1}}\right|$$

$$|\overset{+}{h(x)}|=\sqrt{x^2+1}$$

Ρ.Π $h(x)$

$h(x)=0$

$|h(x)|=0$

$\sqrt{x^2+1}=0$

Άτοπο

$h(x)\neq 0$ και συνεχή

$h(x)>0$ ή $h(x)<0$

$h(0)=f(0)-0=1$

$h(x)>0$

$h(x)=\sqrt{x^2+1}$

$f(x)-x=\sqrt{x^2+1}$

Δ2.

Αφού $f \nearrow$ $\qquad$ $f \nearrow$

τότε f αντιστρ.

$$D_{f^{-1}} = \Sigma T_f.$$

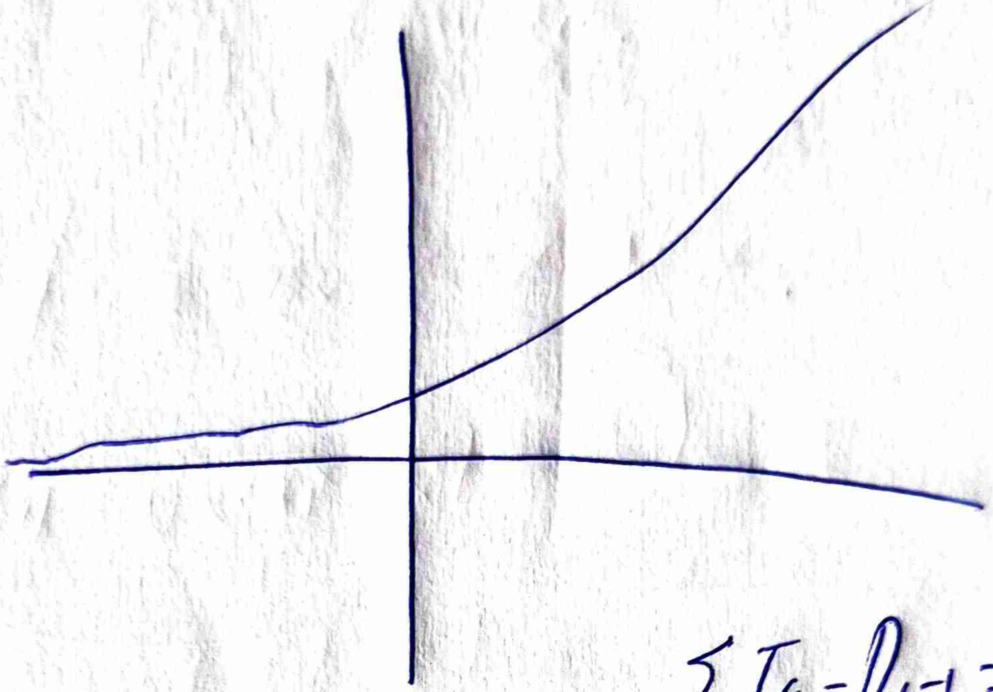
$$f(x) = \sqrt{x^2+1} + x$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+1}+x\right) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}{\sqrt{x^2+1}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}+x = +\infty.$$



$$\Sigma T_f = D_{f^{-1}} = (0,+\infty)$$

Δ3 Νδο η $\dfrac{f(a)}{x-1}+\dfrac{f(\beta)}{x-2}=0$

έχει ρίζα $(1,2)$

$$\underbrace{f(a)(x-2)+f(\beta)(x-1)}_{h(x)}=0$$

$$\left.\begin{aligned} h(1) &= -f(a) \\ h(2) &= f(\beta) \end{aligned}\right\} \quad h(1)h(2) = -\underbrace{f(a)f(\beta)}_{+} < 0$$

και $f(x)>0$

Bolzano ✓

Δ4

$$\lim_{x\to 0} f^{-1}(x)\ln x = (-\infty)(-\infty) = +\infty.$$

$$\lim_{x\to 0^+} f^{-1}(x) \xlongequal{\text{θέτω } f^{-1}(x)=t}$$

$f(f^{-1}(x)) = f(t)$

$x = f(t)$

$x \to 0^+$

$t \to -\infty$

$$= \lim_{t\to -\infty} t = -\infty$$