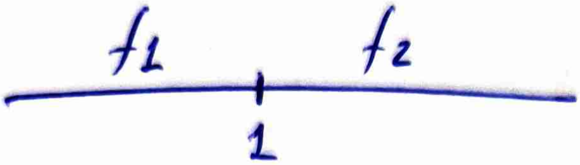
Ενότητα 11

4. (α) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1 \\ 3x-1, & x>1 \end{cases}$



$$\left.\begin{aligned} &\bullet \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-}(x^2+1) = 2 \\ &\bullet \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+}(3x-1) = 2 \end{aligned}\right\} \lim_{x\to 1} f(x) = 2$$

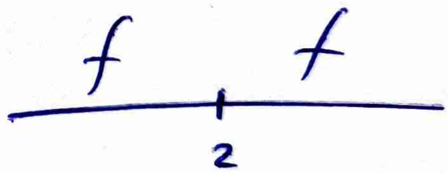
$$\|$$

$$f(1)=2$$

$$f(1)=1^2+1=2$$

Συνεχής στο 1.

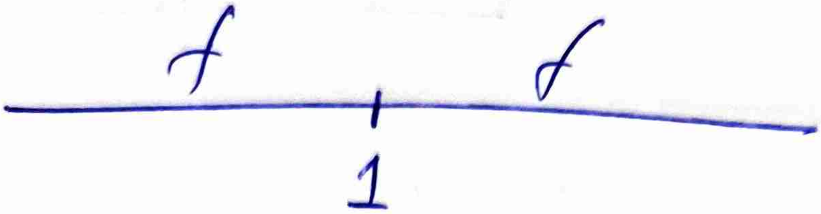
(γ) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2 \\ 4, & x=2 \end{cases}$



$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = 4$$

$f(2)=4$ Συνεχής στο 2.

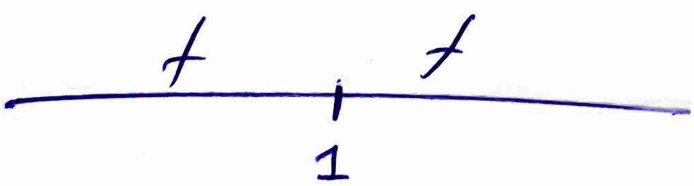
5. (α) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-5x+3}{x-1}, & x \neq 1 \\ -1, & x = 1 \end{cases}$



$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{2x^2-5x+3}{x-1} = -1$$

$f(1) = -1$ Συνεχής στο 1!

(β) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$



$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} = \frac{1}{2}$$

$f(1) = 3$ Η f όχι συνεχής στο 1.

7. (α) $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x<0 \\ (x+1)e^x, & x \geq 0 \end{cases}$

$f_1 \quad | \quad f_2$

0

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} x^2+1 = 1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} (x+1)e^x = 1 \end{aligned}\right\} \lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

$$f(0) = 1$$

Συνεχής στο 0.

(β) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ημx}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

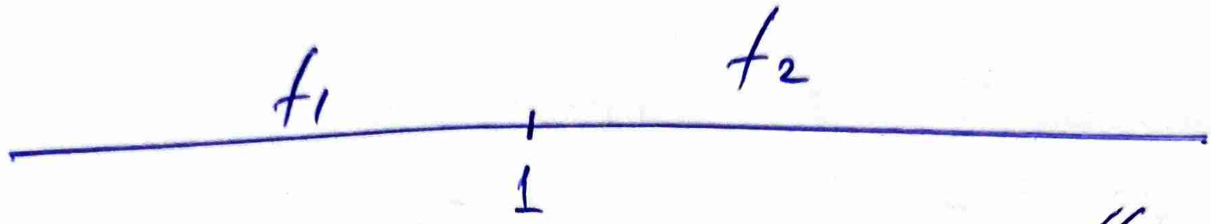
$f \quad | \quad f$

0

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{ημx}{x} = 1 \\ f(0) &= 1 \end{aligned}\right\}$$

Συνεχής στο 0.

(7) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1}, & x<1 \\ 3, & x=1 \\ \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}, & x>1 \end{cases}$



• $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \dfrac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{\cancel{x-1}}$

$= 3$

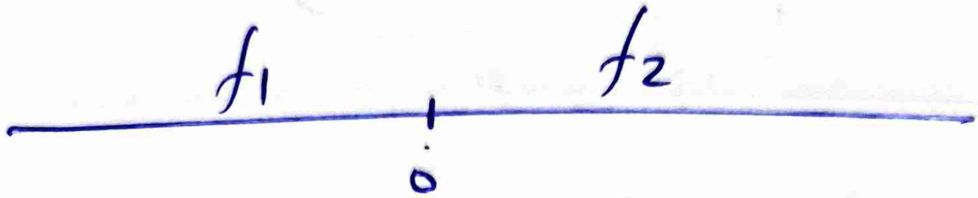
• $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}\right) = \lim_{x\to 1^+} \dfrac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}}$

$= 2$

Το $\lim_{x\to 1} f(x)$ δεν

υπάρχει.

8. ⓐ $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x<0 \\ 1, & x=0 \\ x^2+1, & x>0 \end{cases}$



$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} = e^{-\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2+1 = 1$$

Το $\lim_{x\to 0} f(x)$ δεν υπάρχει

Η $f(x)$ είναι συνεχής $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Όμως αφού η f <u>δεν</u> είναι συνεχής στο 0 <u>δεν</u> είναι συνεχής γενικά

(B) Είναι συνεχής στο $[0,1]$

H $f(x)$ είναι συνεχής στο $(0,1)$ ως π.σ.σ.

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1 \\ &f(0) = 1 \end{aligned}\right\} \checkmark$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^2+1 = 2 \\ &f(1) = 2 \end{aligned}\right\} \checkmark$$

Συνεχής στο $[0,1]$.

9. (α) $f(x) = \begin{cases} e^x + \alpha, & x \le 0 \\ x\ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$

Αφού η $f(x)$ είναι συνεχής

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

$$\lim_{x \to 0^-} e^x + \alpha = \lim_{x \to 0^+} x\ln(x+1)$$

$$e^0 + \alpha = 0$$

$$1 + \alpha = 0$$

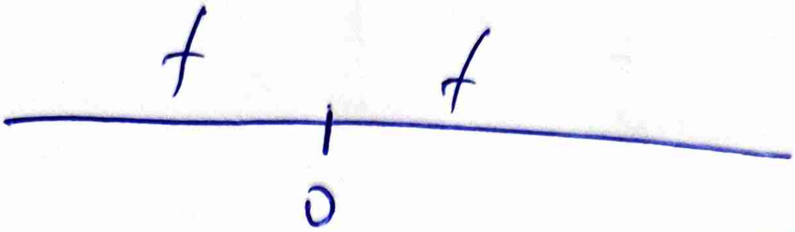
$$\alpha = -1$$

(β) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3+1}{x+1}, & x \neq -1 \\ \alpha, & x = -1 \end{cases}$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x+1} = \lim_{x \to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x^2-x+1)}{\cancel{x+1}} = 3.$$

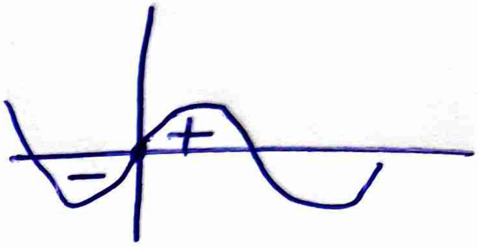
$f(-1) = \alpha \Rightarrow \alpha = 3$

20. (δ) $f(x) = \begin{cases} ημx \cdot ημ\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$



$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} ημx \cdot ημ\frac{1}{x}$ $\frac{ημ\infty}{χάσιμο}$

$-1 \leq ημ\frac{1}{x} \leq 1$



$\left|ημ\frac{1}{x}\right| \leq 1$

$|ημx| \cdot \left|ημ\frac{1}{x}\right| \leq 1 \cdot |ημx|$

$\left|ημx\, ημ\frac{1}{x}\right| \leq |ημx|$

$$\boxed{-|ημx| \leq ημx\, ημ\frac{1}{x} \leq |ημx|}$$

$\left.\begin{array}{l} \cdot \lim_{x \to 0} -|ημx| = 0 \\ \cdot \lim_{x \to 0} |ημx| = 0 \end{array}\right\}$ Από Κ.Π $\lim_{x \to 0} ημx\, ημ\frac{1}{x} = 0$

Άρα $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ και $f(0) = 0$ $\Leftrightarrow$

Συνεχής στο 0!

21. ⑧ $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}}, & x > 0 \\ \eta\mu x, & x \le 0 \end{cases}$

f_1 | 0 | f_2

• $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{\sqrt{x}}} = e^{-\infty} = 0$

$\longrightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \ln x \, \frac{1}{\sqrt{x}} =$

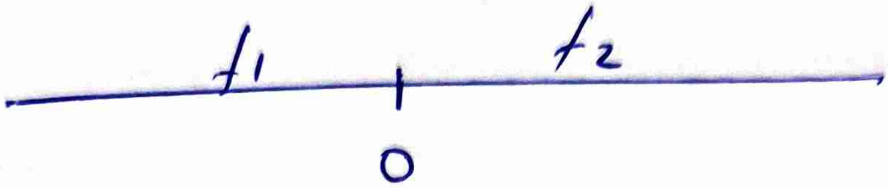
$= (-\infty)(+\infty) = -\infty$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \eta\mu x = 0$

$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$

$f(0) = 0$ ✓

22. $f(x) = \begin{cases} x^2 ημ\frac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x=0 \\ x e^{\frac{1}{x}}, & x<0 \end{cases}$



• $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x e^{\frac{1}{x}} = 0\cdot e^{-\infty} = 0\cdot 0 = 0$

• $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 ημ\frac{1}{x}$ $\quad \frac{ημ\infty}{χάος}$

$-1 \le ημ\frac{1}{x} \le 1$

$\boxed{-x^2 \le x^2 ημ\frac{1}{x} \le x^2}$

• $\lim_{x\to 0^+} -x^2 = 0$

• $\lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$

Άρα Κ.Π

$\lim_{x\to 0^+} x^2 ημ\frac{1}{x} = 0.$

Άρα $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$

$f(0) = 0$

Συνεχής στο 0!

Η $f(x)$ συνεχής στο $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$

ως π.δ.σ. και αφού

είναι συνεχής και στο 0

είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Ενότητα 12

8. (Β) $\dfrac{x^2+1}{x} + \dfrac{x^4+1}{x-1} = 1$

$\Delta = (0,1)$

$$(x-1)(x^2+1) + x(x^4+1) = x(x-1)$$

$$\underbrace{(x-1)(x^2+1) + x(x^4+1) - x(x-1)}_{f(x)} = 0$$

Η $f(x)$ είναι συνεχής $[0,1]$ ως π.σ.σ

$$\left.\begin{aligned} f(0) &= -1 \\ f(1) &= 2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &f(0)\,f(1) < 0 \\ &\text{Bolzano } \exists\, \xi \in (0,1) \text{ τ.ω } f(\xi) = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\xi^2+1}{\xi} + \frac{\xi^4+1}{\xi-1} = 1$$

(δ) $\dfrac{e^x}{x-1} + \dfrac{\ln x}{x-2} = 1 \qquad (1,2)$

$$(x-2)e^x + (x-1)\ln x = (x-1)(x-2)$$

$$\underbrace{(x-2)e^x + (x-1)\ln x - (x-1)(x-2)}_{f(x)} = 0$$

Η $f(x)$ συνεχής $[1,2]$ ως π.σ.σ

$$\left.\begin{aligned} f(1) &= -e \\ f(2) &= \ln 2 > 0 \end{aligned}\right\} f(1)f(2) < 0$$

$2>1$
$\ln 2 > \ln 1$
$\ln 2 > 0$

Bolzano $\exists\, x_0 \in (1,2)$ τ.ω $f(x_0) = 0$.

$$\frac{e^{x_0}}{x_0-1} + \frac{\ln x_0}{x_0-2} = 1$$

9. $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχή.

Νδο η εξίσωση $f(x)=\dfrac{2e^x-3}{x^2-x}$ έχει

τουλ. ρίζα $(0,1)$,

$$(x^2-x)f(x)=2e^x-3$$

$$\underbrace{(x^2-x)f(x)-2e^x+3}_{h(x)}=0$$

Η $h(x)$ συνεχής στο $[0,1]$ ως π.σ.σ.

$$\left.\begin{aligned} h(0)&=-2+3=1 \\ h(1)&=-2e+3<0 \end{aligned}\right\} h(0)h(1)<0$$

Bolzano $\exists\,\xi\in(0,1)$ τ.ω $h(\xi)=0$

$$f(\xi)=\frac{2e^{\xi}-3}{\xi^2-\xi}.$$

11. (δ) Ν.δ.ο η εξίσωση $e^x - 1 = συνx$ έχει στο $(0, \frac{π}{2})$ μοναδική ρίζα.

$$\underbrace{e^x - 1 - συνx}_{f(x)} = 0$$

Η $f(x)$ συνεχής $[0, \frac{π}{2}]$ ω π.δ.δ

$f(0) = e^0 - 1 - συν0 = 1 - 1 - 1 = -1 < 0$

$f(\frac{π}{2}) = e^{π/2} - 1 - συν\frac{π}{2} = e^{π/2} - 1 ; > 0$

• $\frac{π}{2} > 0 \Rightarrow e^{\frac{π}{2}} > e^0 \Rightarrow e^{\frac{π}{2}} > 1 \Rightarrow e^{\frac{π}{2}} - 1 > 0$

$f(0) f(\frac{π}{2}) < 0$ Bolzano $\exists ξ \in (0, \frac{π}{2})$ τ.ω $f(ξ) = 0$

• $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$

$e^{x_1} - 1 < e^{x_2} - 1$

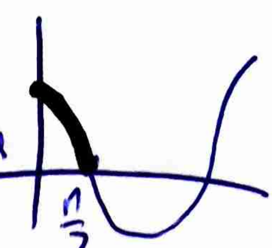
(+) $e^ξ - 1 = συνξ$.

• $x_1 < x_2 \Rightarrow συνx_1 > συνx_2$

$-συνx_1 < -συνx_2$

το ξ μοναδικό

$f \nearrow$


$\frac{π}{2}$

13. Νδο η $f(x) = e^x + 2x - 3$ τέμνει τον $x'x$ στο $(0, 1)$ ακριβώς μια φορά.

$f(0) = e^0 + 2 \cdot 0 - 3 = -2$

$f(1) = e^1 + 2 \cdot 1 - 3 = e + 2 - 3 = e - 1 > 0$

$f(0) f(1) < 0$

Bolzano $\exists \xi \in (0,1)$ τω $f(\xi) = 0$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$ $+$
- $x_1 < x_2 \rightarrow 2x_1 - 3 < 2x_2 - 3$

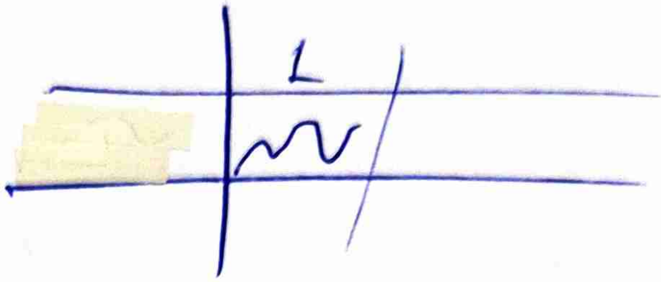
το ξ μοναδικό.

$f \nearrow$

15. $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής ↓

$0 < f(x) < 1 \quad \forall x \in [0,1]$

Νδο η $f(x)$ τέμνει την $y=x$ ακριβώς μία φορά $(0,1)$.



$$f(x) = x$$

$$\underbrace{f(x) - x}_{g(x)} = 0$$

Η $g(x)$ συνεχής στο $[0,1]$ ως π.σ.σ

$g(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0$

$g(1) = f(1) - 1 < 0$ $\quad$ $0 < f(0) < 1$

$0 < f(1) < 1$

$g(0)\,g(1) < 0$ $\quad$ $\underline{-1 < f(1) - 1 < 0}$

Bolzano $\exists\, \xi \in (0,1)$ τ.ω $g(\xi) = 0$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

(+)

- $x_1 < x_2 \Rightarrow -x_1 > -x_2$

$$g(x_1) > g(x_2)$$

g ↘.

T_0 ξ ponwsiсa

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} e^{x}\eta\mu x & , \ x<0 \\ \sqrt{x^2+x} & , \ x\geq 0 \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$ (μονάδες 2) αλλά όχι παραγωγίσιμη στο x_0 (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 7

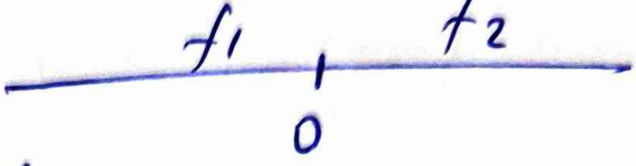
Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει την ευθεία $(\varepsilon): y=x+\frac{1}{2}$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\xi\in(-\pi,0)$.

Μονάδες 5

Πανελλήνιες 2025

$$f(x)=\begin{cases} e^x\,\eta\mu x, & x<0 \\ \sqrt{x^2+x}, & x\geq 0 \end{cases}$$

Γ1



$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} e^x\,\eta\mu x = 1\cdot 0 = 0 \\ &\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x^2+x}=0 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\lim_{x\to 0} f(x)=0 \\ &f(0)=0 \end{aligned}$$

Συνεχής στο 0!

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x\,\eta\mu x}{x}=\lim_{x\to 0^-} e^x\,\frac{\eta\mu x}{x}$$

$$=1\cdot 1=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+x}^{\,2}}{x\sqrt{x^2+x}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+x}{x\sqrt{x^2+x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cancel{x}(x+1)}{\cancel{x}\sqrt{x^2+x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}(x+1)\frac{1}{\sqrt{x^2+x}}=1\cdot +\infty=+\infty$$

Γ2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x \eta\mu x$ $\xrightarrow[\chi\alpha\sigma\iota\mu\omega]{\eta\mu\omega}$

$$-1 \le \eta\mu x \le 1$$

$$\boxed{-e^x \le e^x \eta\mu x \le e^x}$$

$\cdot \lim\limits_{x\to-\infty} -e^x = -0 = 0$

$\cdot \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

Από Κ.Π.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

$\cdot \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+x} = +\infty$

$\cdot \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}}{x}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\cancel{x}} = 1$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+x} - x\right)\left(\sqrt{x^2+x} + x\right)}{\sqrt{x^2+x} + x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{\sqrt{x^2+x}}^{\,2} - x^2}{\sqrt{x^2+x} + x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^2} + x - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2+x} + x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)} + x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}} + \cancel{x}} = \frac{1}{2}$$

13. $f(x) = x + \frac{1}{2}$ $\quad (-\pi, 0)$

$$\underbrace{f(x) - x - \frac{1}{2}}_{g(x)} = 0$$

Η $g(x)$ συνεχής $[-\pi, 0]$ ως π.δ.σ

$$g(-\pi) = f(-\pi) + \pi - \frac{1}{2} = \pi - \frac{1}{2} > 0$$

$$\to f(-\pi) = e^{-\pi}\, \eta\mu(-\pi) = 0$$

$$g(0) = f(0) - 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} < 0$$

$$g(-\pi)\, g(0) < 0$$

Bolzano $\exists\, x_0 \in (-\pi, 0)$

τ.ω. $g(x_0) = 0$.

Επομενο Μαθημα

Δευτερα 11:30 – 1.

Ενοτητα 11.

20 γ

21 α β γ

Ενοτητα 12

2

4 α

5

6 α

8 αγ.

10

11 αγ.

12

14.