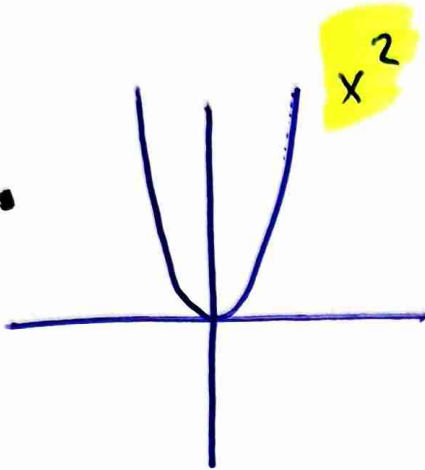


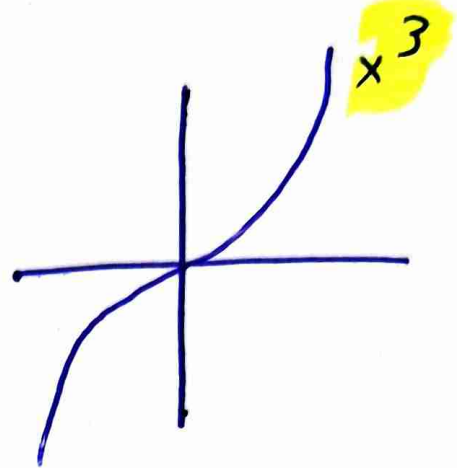
Βασικές

Συναρτήσεις

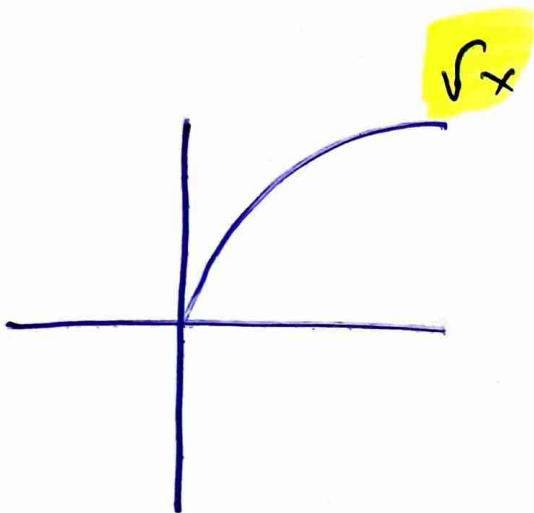
1.



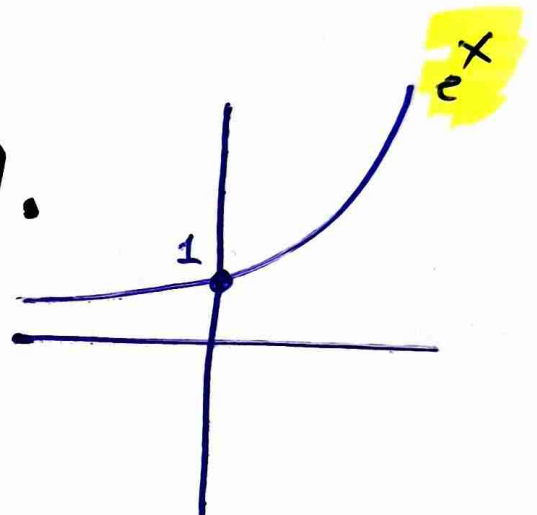
2.



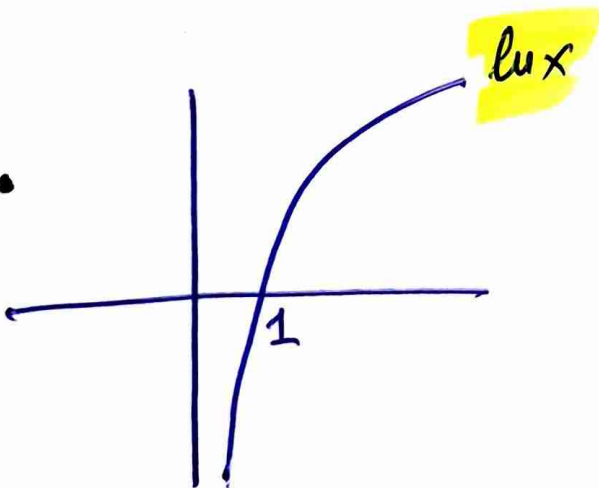
3.



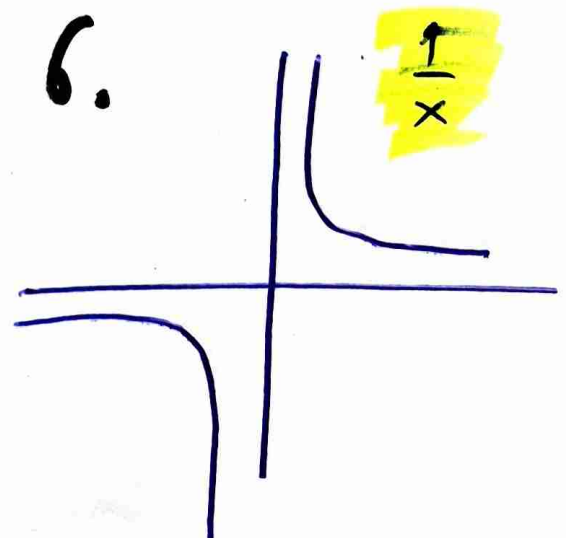
4.



5.

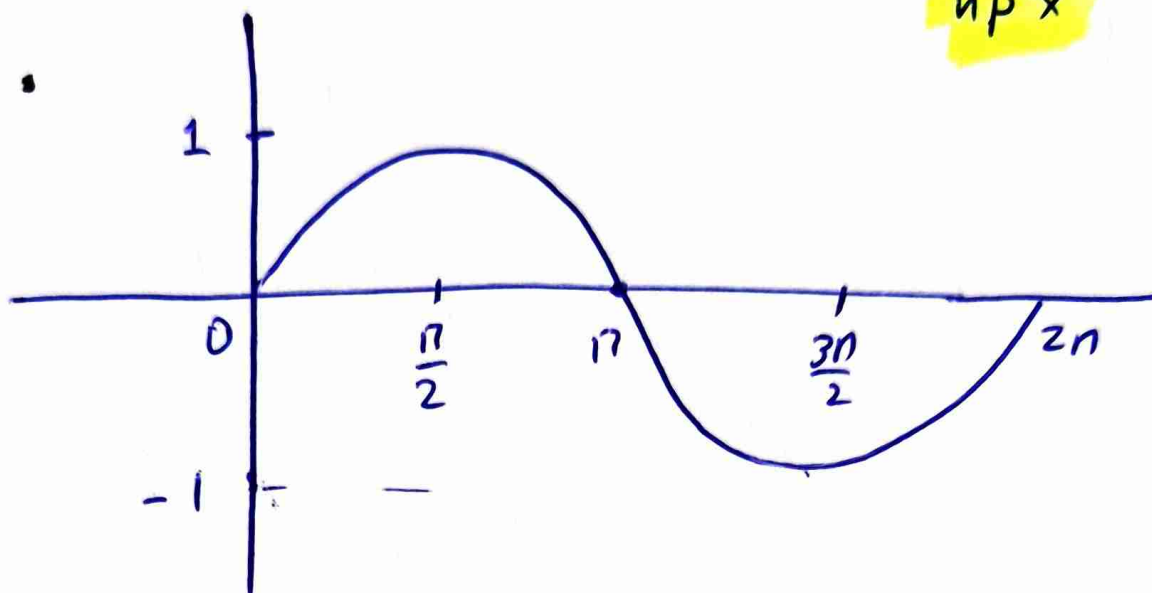


6.



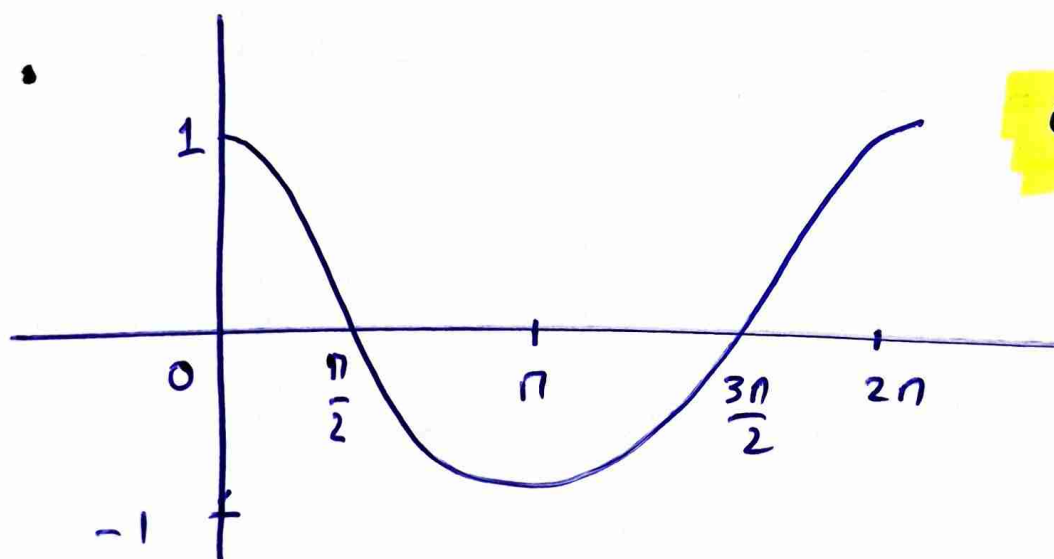
Τριγωνομετρικά

1.

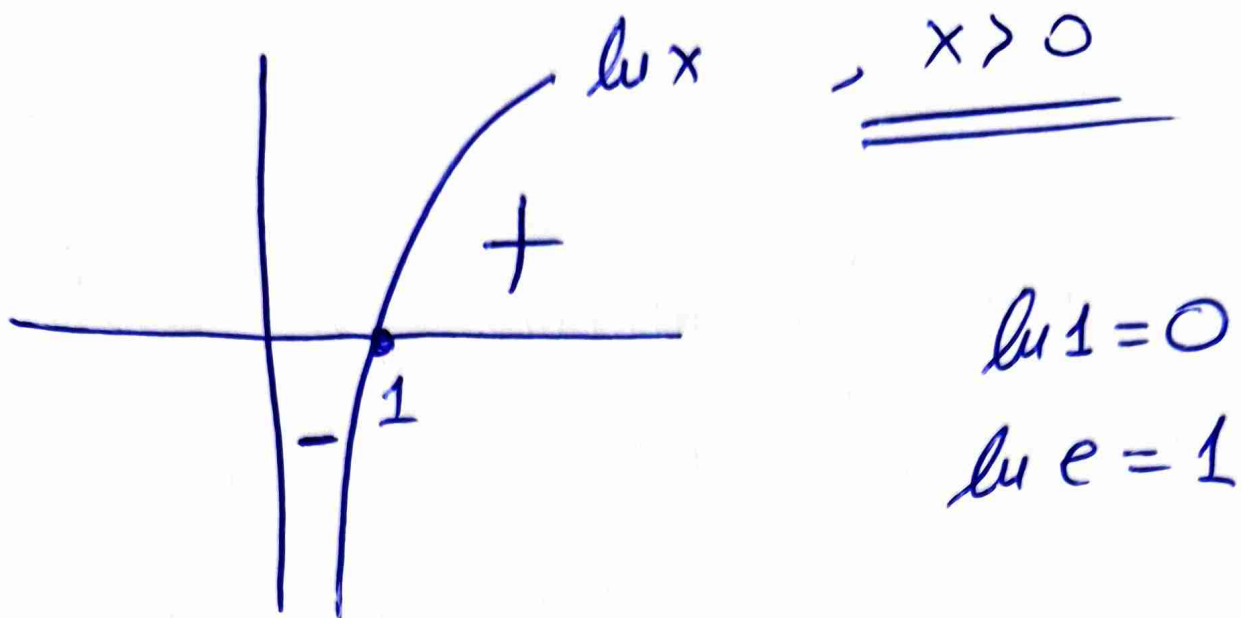


$\sin x$

2.



$\cos x$



SOS

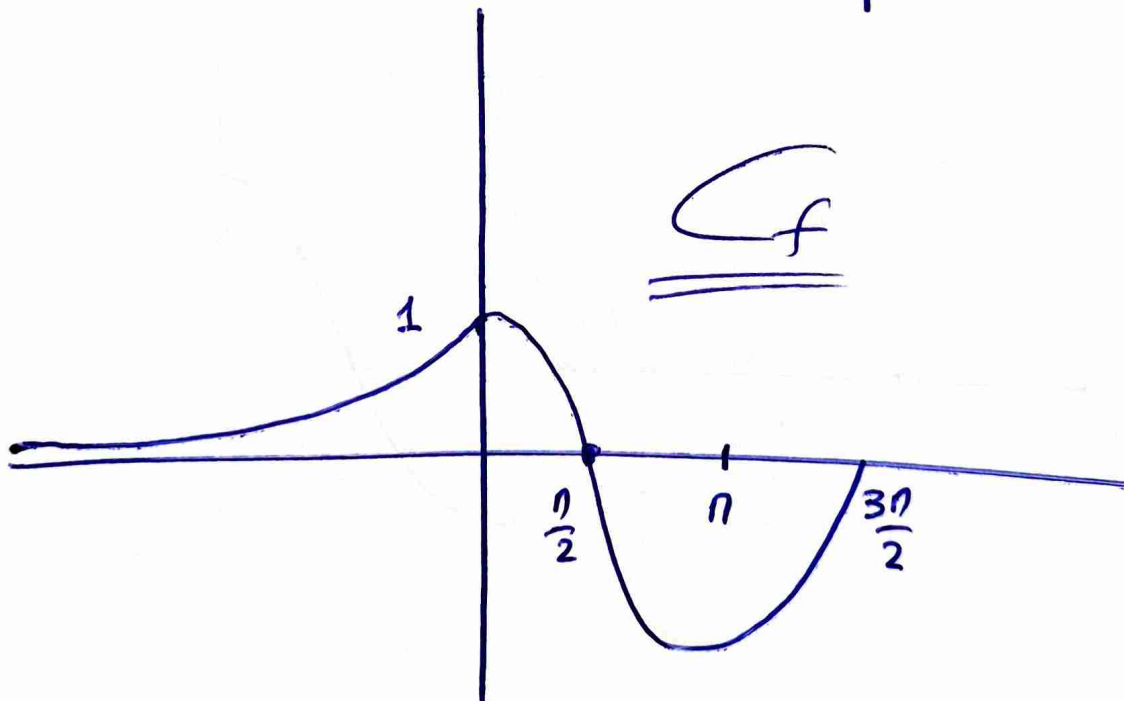
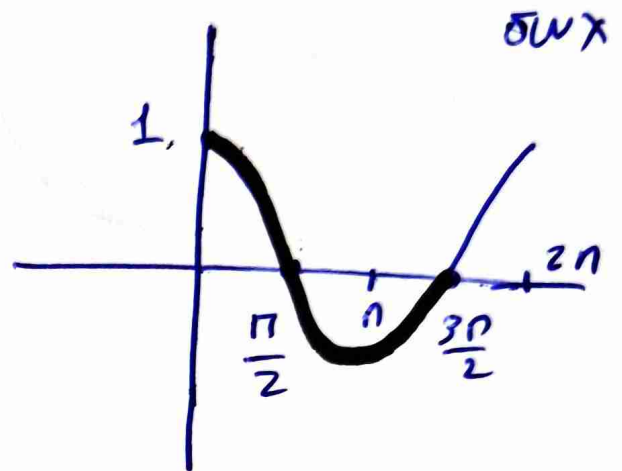
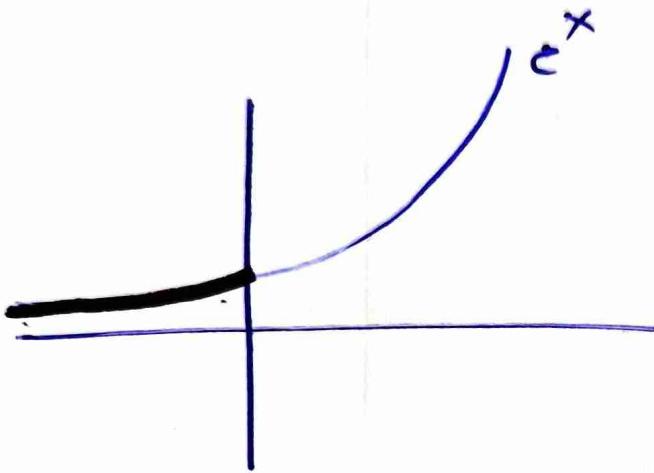
Το $\ln x$ δεν είναι θετικό πάντα!
 Ότι μπαίνει μέσα στο $\ln(\uparrow)$
 είναι θετικό πάντα.

Θετικά ποσοζυγία

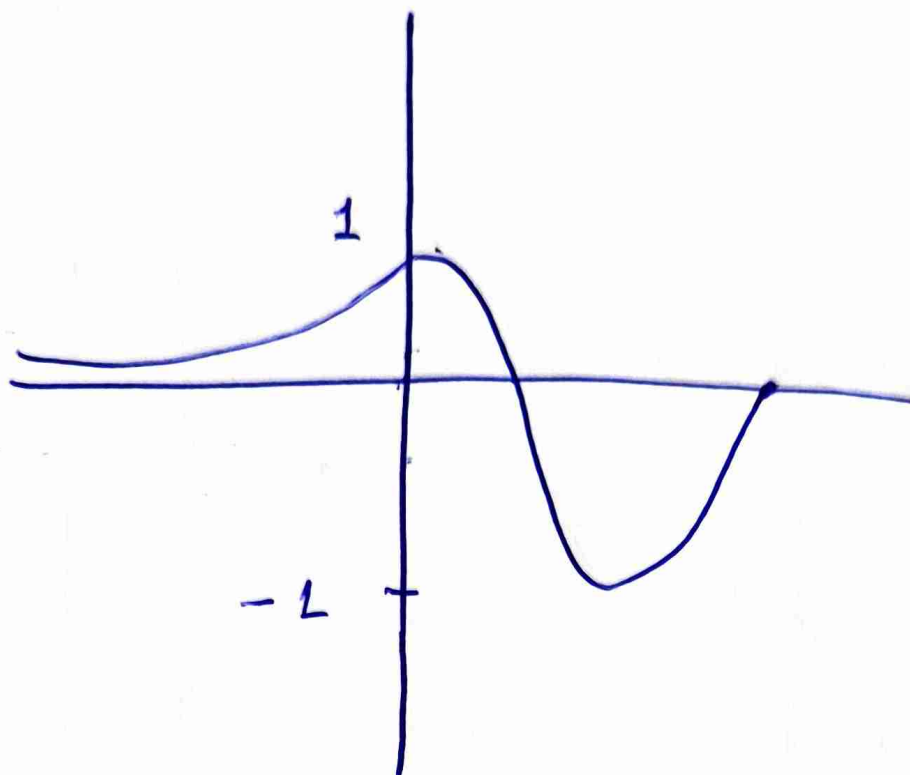
$\sqrt{x}$ e^x x^2 $|x|$

Άσκηση Σχεδίασης

Δίνεται $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \leq 0 \\ \sin x, & 0 < x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$



Πλνθός ριζών εξίσωσης $f(x) = \lambda$



A_v	$\lambda < -1$	0	ρίζα
A_v	$\lambda = -1$	1	ρίζα.
A_v	$-1 < \lambda < 1$	2	ρίζα
A_v	$\lambda = 1$	1	ρίζα.
A_v	$\lambda > 1$	0	ρίζα

Πλνθός ριζών τμ $f(x) = \lambda^2 + 1$

A_v $\lambda = 0$ 1 ρίζα.

A_v $\lambda \neq 0$ 0 ρίζα.

Σημαντική Σημείωση

Όταν θέλω να λύσω την εξίσωση

$$f(x) = 2$$

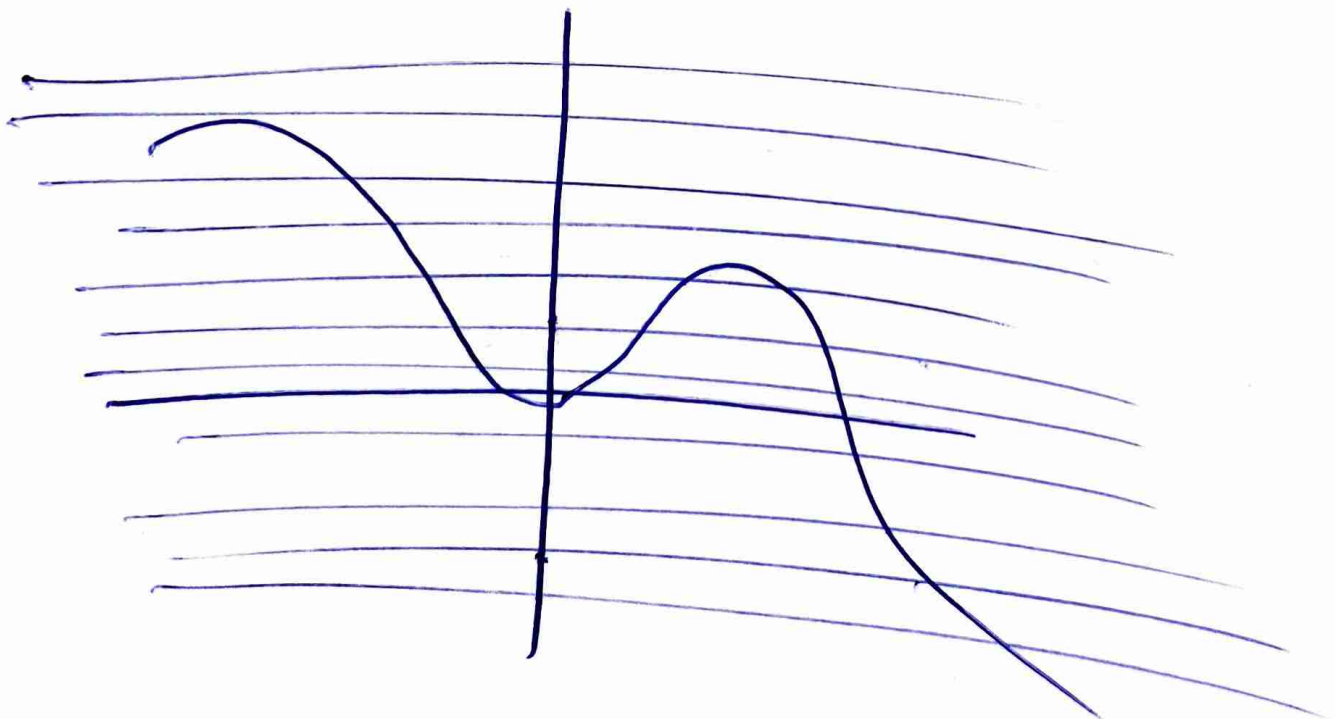
ή όταν θέλω να βρω το πλήθος

ρίζων της τότε στην ουσία

ψάχνω να βρω πόσες φορές

τέρνει η $f(x)$ την αριθμητική

(την οριζόντια γραμμή) $y = 2$



Άσκηση 1

Πότε δύο συναρτήσεις είναι ίσες;
Όταν έχουν ίδιο πεδίο ορισμού,
και ίδιο τύπο.

$$f(x) = x - \ln(e^x - 1)$$

$$g(x) = \ln\left(\frac{e^x}{e^x - 1}\right)$$

Είναι
ίσες;

D_f

$$\text{Προσ } e^x - 1 > 0$$

$$e^x > 1$$

$$\ln e^x > \ln 1$$

$$x > 0$$

$$D_f = (0, +\infty)$$

$$D_g = (0, +\infty).$$

D_g

$$\text{προσ } \frac{e^x}{e^x - 1} > 0$$

$$\text{και } e^x - 1 \neq 0$$

$$e^x \neq 1$$

$$\ln e^x \neq \ln 1$$

$$\underline{\underline{x \neq 0}}$$

$$\frac{e^x}{e^x - 1} > 0$$

$$\Rightarrow e^x - 1 > 0$$

$$e^x > 1$$

$$\underline{\underline{x > 0}}$$

Εχω οπως ιδω ωπο;

$$\begin{aligned} g(x) &= \ln\left(\frac{e^x}{e^x-1}\right) = \ln e^x - \ln(e^x-1) = \\ &= x - \ln(e^x-1) = f(x) \end{aligned}$$

Αρα εινα ιδει!

$$2. \textcircled{\varepsilon} f(x) = \frac{|x| - 3}{|x|}$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 3|x|}{x^2}$$

$$\underline{D_f}$$

$$\text{Почему } |x| \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$

$$D_f = \mathbb{R}^*$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 3|x|}{x^2} = \frac{|x|^2 - 3|x|}{|x|^2} =$$

$$= \frac{\cancel{|x|} (|x| - 3)}{|x| \cancel{|x|}} = \frac{|x| - 3}{|x|} = f(x)$$

/оес/!

Евотута
3

$$\underline{D_g}$$

$$\text{почему } x^2 \neq 0$$

$$x \neq 0$$

$$D_g = \mathbb{R}^*$$

3. (B) $f(x) = \ln x^2$
 $g(x) = 2 \ln x$

D_f

πρην $x^2 > 0$

$D_f = \mathbb{R}^*$

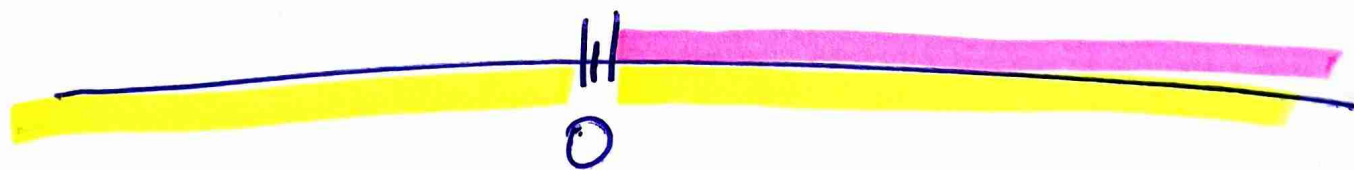
D_g

πρην $x > 0$

$D_g = (0, +\infty)$.

Αφού $D_f \neq D_g$ δεν είναι ισχύ!

$g(x) = 2 \ln x = \ln x^2 = f(x)$ έχω ίδιο πρ.



Εν γὰρ δεν είναι ισχύ!

Οπότε στο $(0, +\infty)$ είναι ισχύ.

$$\textcircled{1} \quad f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}+2}$$

$$\underline{D_f}$$

Πρέπει $x \geq 0$ και $\sqrt{x}+2 \neq 0$
που ισχύει!

$$D_f = [0, +\infty)$$

$$g(x) = \sqrt{x} - 2$$

$$\underline{D_g}$$

Πρέπει $x \geq 0$

$$D_g = [0, +\infty)$$

$\subseteq$ $x \in \mathbb{R}$, $\delta \omega$ κατ'ορισμόν.

$$f(x) = \frac{x-4}{\sqrt{x}+2} = \frac{(x-4)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} =$$

$$= \frac{(x-4)(\sqrt{x}-2)}{\sqrt{x}^2 - 2^2} = \frac{\cancel{(x-4)}(\sqrt{x}-2)}{\cancel{x-4}} = \sqrt{x}-2$$

$$= g(x)$$

Ισχύει!

Πραγματικές συναρτήσεις

Έστω ότι έχω δύο συναρτήσεις

$$f(x) \quad \text{και} \quad g(x)$$

Παρατηρώ ότι κάθε μία έχει το
πεδίο ορισμού D_f και D_g .

$$\left. \begin{aligned} (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (f-g)(x) &= f(x) - g(x) \\ (f \cdot g)(x) &= f(x) \cdot g(x) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} D_{f+g} &= D_{f-g} = D_{f \cdot g} \\ &= D_f \cap D_g \end{aligned}$$

Τα καλά!

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Πρέπει $x \in D_f \cap D_g$ και $g(x) \neq 0$.

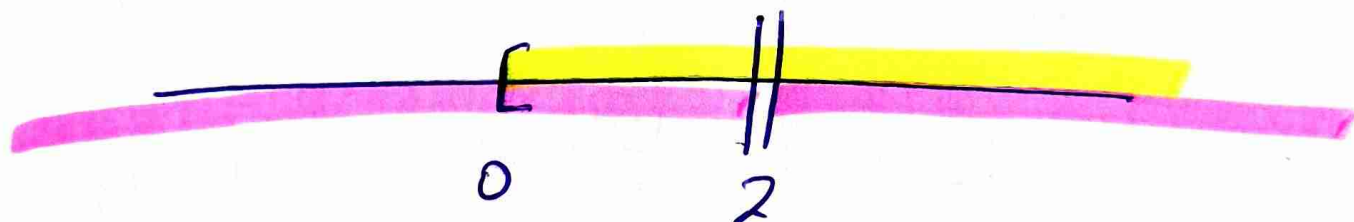
Азшшш 2

$$\text{Сотш} \quad f(x) = \sqrt{e^x - 1}, \quad x \geq 0$$

$$g(x) = \frac{x-1}{x-2}, \quad x \neq 2$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{e^x - 1} + \frac{x-1}{x-2}$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [0, 2) \cup (2, +\infty)$$



$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{e^x - 1} - \frac{x-1}{x-2}$$

$$D_{f-g} = [0, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{e^x - 1} \cdot \frac{x-1}{x-2}$$

$$D_{f \cdot g} = [0, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{e^x - 1}}{\frac{x-1}{x-2}} = \frac{(x-2)\sqrt{e^x - 1}}{x-1}$$

$$\text{при } g(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{x-1}{x-2} \neq 0$$

$$x-1 \neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{x \neq 1}}$$

$$\text{еще } x \in [0, 2) \cup (2, +\infty)$$

$$D_{f/g} = [0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$$

B1 $\in \sigma_{TW}$ $h, g : [1, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$(g \cdot h)(x) = g(x)h(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

$$= \sqrt{x}^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x - \frac{1}{x}$$

$$D_{g \cdot h} = D_g \cap D_h = [1, +\infty)$$

$$\left(\frac{g}{h}\right)(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x}^2 + 1}{\sqrt{x}^2 - 1} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$h(x) \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x} \neq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x}^2 \neq 1 \Rightarrow \underline{x \neq 1} \quad D_{g/h} = (1, +\infty).$$

Συνθεση Συναρτησεων

Ασκηση 3

Εστω $f(x) = \sqrt{x-1}$, $x \geq 1$ $D_f = [1, +\infty)$

$g(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$ $D_g = \mathbb{R}^*$

• $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$

$$\boxed{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f}$$

$$x \neq 0$$

$$\frac{1}{x} \geq 1$$

$$\frac{1}{x} - 1 \geq 0$$

$$\frac{1-x}{x} \geq 0$$

x	0	1
1-x	+	-
x	-	+
$\frac{1-x}{x}$	-	+

$$x \in (0, 1)$$

$$D_{f \circ g} = (0, 1)$$

- $(g \circ f)(x) = g(h(x)) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

$$\boxed{x \in D_f \quad \text{or} \quad h(x) \in D_g}$$

$$x \geq 1$$

$$\sqrt{x-1} \neq 0$$

$$x-1 \neq 0$$

$$x \neq 1$$

$$D_{g \circ f} = (1, +\infty)$$

- $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x$

$$\boxed{x \in D_g \quad \text{or} \quad g(x) \in D_g}$$

$$x \neq 0$$

$$\text{or} \quad \frac{1}{x} \neq 0 \quad \text{never}$$

$$D_{g \circ g} = \mathbb{R}^*$$

- $(f \circ f)(x) = f(h(x)) = \sqrt{\sqrt{x-1} - 1}$

$$\boxed{x \in D_f \quad \text{or} \quad h(x) \in D_f}$$

$$x \geq 1$$

$$\sqrt{x-1} \geq 1$$

$$\Rightarrow x-1 \geq 1$$

$$x \geq 2$$

$$D_{f \circ f} = [2, +\infty)$$

Πανελλήνιες 2026

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = 2 \ln(x-1)$$

$$g: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \quad g(x) = \sqrt{x-2} + 1$$

$$\psi_{\alpha\chi\nu\omega} \text{ τη } (f \circ g)(x)$$

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = 2 \ln(\sqrt{x-2} + 1 - 1) \\ &= 2 \ln(\sqrt{x-2}) = \ln \sqrt{x-2}^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{x \in D_g \text{ και } g(x) \in D_f} = \ln(x-2)$$

$$x \geq 2$$

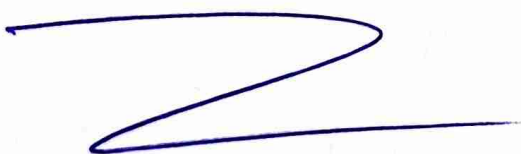
$$\sqrt{x-2} + 1 > 1$$

$$\sqrt{x-2} > 0$$

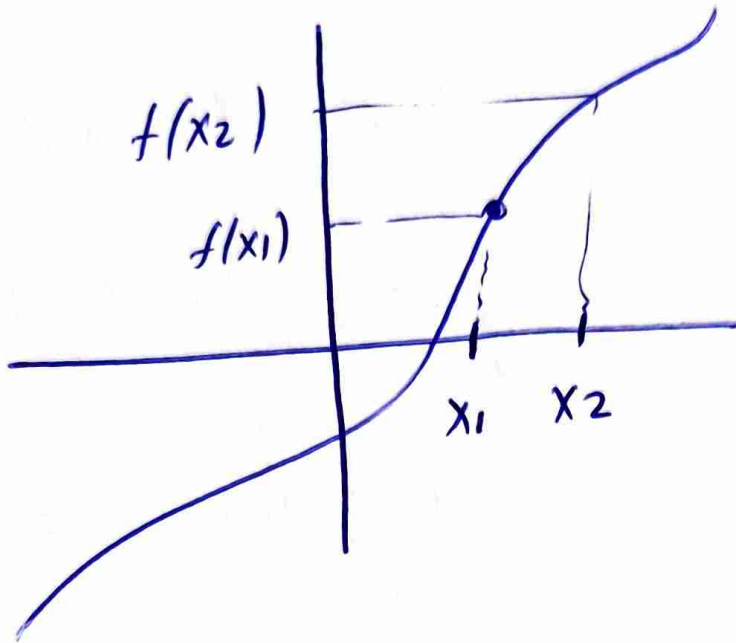
$$D_{f \circ g} = (2, +\infty)$$

$$x-2 > 0$$

$$x > 2$$



Γνησιω/ αυξουσα

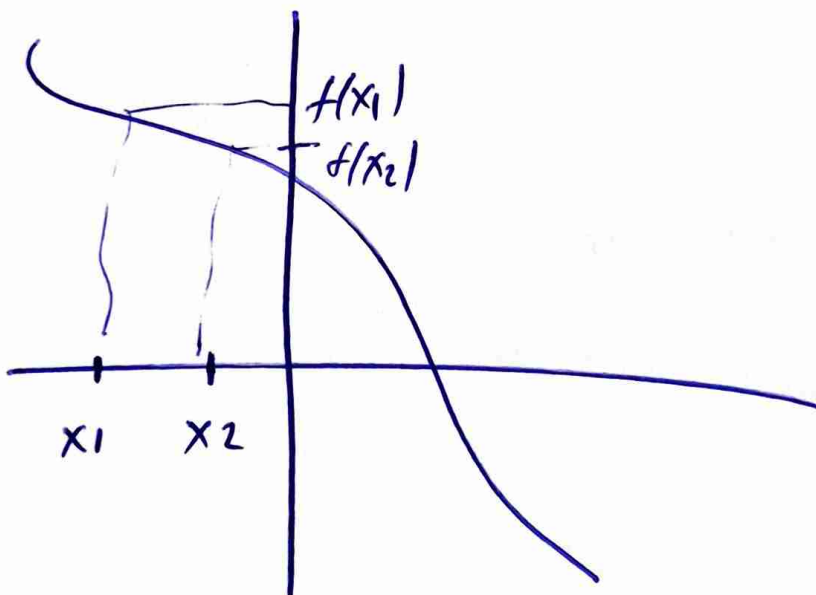


$$x_1 < x_2$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

$$\forall x_1, x_2 \in \Delta$$

Γνησιω/ φθινουσα



$$x_1 < x_2$$

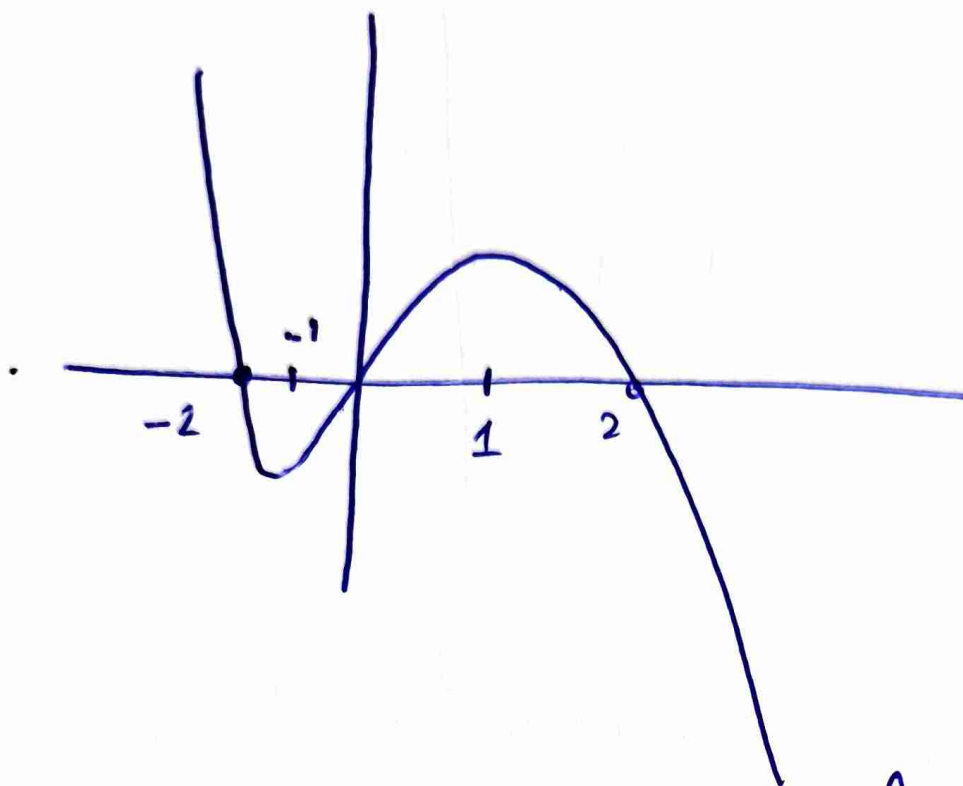
$$f(x_1) > f(x_2)$$

$$\forall x_1, x_2 \in \Delta$$

Γνησιω/ ποσοζουσα

Αν η $f \nearrow$ ή $f \searrow$ είναι γν. ποσοζουσα!

Άσκηση 4



Η $f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα

$$x \in (-\infty, -1] \text{ και } [1, +\infty)$$

Η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα

$$x \in [-1, 1]$$

→ Σύγκριση του $f(2026)$, $f(2027)$

$$2026 < 2027$$

$$f \nabla \forall x > 1$$

$$f(2026) > f(2027).$$

Άσκηση 5

Εστω $f(x) = x^3 + 3x - 5$

Μονotonia

Οσα x

τοσα

χτίζεται.

$$\begin{aligned} & \bullet x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \\ & \bullet x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 < 3x_2 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} & \bullet x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \\ & \bullet x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 < 3x_2 \end{aligned}} \right\} \oplus$$
$$3x_1 - 5 < 3x_2 - 5$$

$$x_1^3 + 3x_1 - 5 < x_2^3 + 3x_2 - 5$$

$$\underline{f(x_1) < f(x_2)}$$

$f \nearrow$

→ Συγκρίνουμε $f(2026)$ και $f(2027)$

$$2026 < 2027$$

$f \nearrow$

$$f(2026) < f(2027)$$

Χ ΤΙΣΕΡΑΤΑ

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 7 < x_2 - 7$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 5x_1 < 5x_2$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 < x_2^2, \quad x_1, x_2 \text{ θετικα}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -3x_1 > -3x_2$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^2 > x_2^2 \quad x_1, x_2 \text{ αρητικα}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \quad x_1, x_2 \text{ ομοσημα.}$$

Άσκηση 6

Δίνεται $f(x) = e^x + \ln x - 1$, $x > 0$.

1. Μονotonia

- $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$ (+)
- $x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Rightarrow \ln x_1 - 1 < \ln x_2 - 1$

$$e^{x_1} + \ln x_1 - 1 < e^{x_2} + \ln x_2 - 1$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{f(x_1)} < \underbrace{\hspace{10em}}_{f(x_2)} \quad f \uparrow$$

2. $\forall x > 1 \text{ v} \delta \text{ o } e^x + \ln x > e$

$$\begin{array}{l} \text{L} \rightarrow \forall x > 1 \\ f \uparrow \end{array}$$

$$f(x) > f(1)$$

$$e^x + \ln x - 1 > e + \ln 1 - 1$$

$$e^x + \ln x - 1 > e - 1$$

$$e^x + \ln x > e$$

3. $\forall \alpha < \beta \quad \forall \delta > 0 \quad \ln \frac{\alpha}{\beta} < e^{\beta} - e^{\alpha}$

οπότε α, β θετικά.

$$\alpha < \beta$$

$f \uparrow$

$$f(\alpha) < f(\beta)$$

$$e^{\alpha} + \ln \alpha - x < e^{\beta} + \ln \beta - x$$

$$\ln \alpha - \ln \beta < e^{\beta} - e^{\alpha}$$

$$\boxed{\ln \frac{\alpha}{\beta} < e^{\beta} - e^{\alpha}}$$

4. $\forall x > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad f(x+1) - f(x) > 0$

$$x < x+1$$

$f \uparrow$

$$f(x) < f(x+1)$$

$$0 < f(x+1) - f(x)$$

5. $\forall x > 1 \quad \text{v.d.} \quad f(x^2) > f(x)$

$$\forall x > 1 \quad \text{ist} \quad x^2 > x$$

$f \uparrow$

$$f(x^2) > f(x)$$

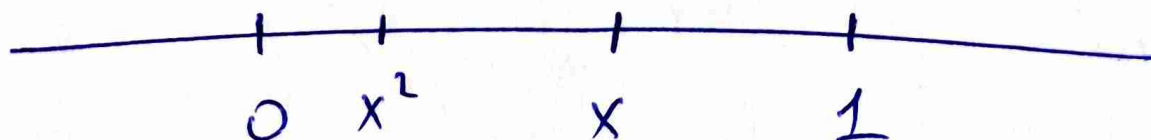
6. $\forall 0 < x < 1 \quad \text{v.d.} \quad f(x^2) < f(x)$

$$\forall x \in (0, 1)$$

$$x^2 < x$$

$f \uparrow$

$$f(x^2) < f(x)$$



Askmon 7

↪ σ_{TW} $f \downarrow$. Na $\lambda u \text{ Dow}$

OL OWIOWOW

1.

$$f(x) > f(3)$$

$f \downarrow$

$$x < 3$$

2.

$$f(2x+1) < 5 \quad \text{or} \quad f(3) = 5$$

$$f(2x+1) < f(3)$$

$f \downarrow$

$$2x+1 > 3$$

$$2x > 2$$

$$\underline{\underline{x > 1}}$$

$$3. \quad f(x^2 - 3x) \geq f(2 - 4x)$$

$f \downarrow$

$$x^2 - 3x \leq 2 - 4x$$

$$x^2 - 3x - 2 + 4x \leq 0$$

$$x^2 + x - 2 \leq 0$$

x	-2	1
$x^2 + x - 2$	+	-

$x \in [-2, 1]$

$$4. \quad f(f(3x-1)) < f(f(2x+3))$$

$f \downarrow$

$$f(3x-1) > f(2x+3)$$

$f \downarrow$

$$3x - 1 < 2x + 3$$

$$3x - 2x < 3 + 1$$

$$\underline{\underline{x < 4}}$$

Άσκηση 8

Εστω $f(x) = x^5 + x - 2, \quad x \in \mathbb{R}$

1. Ανίσωση

$$x < \frac{2}{x^4 + 1}$$

$$x(x^4 + 1) < 2$$

$$x^5 + x < 2$$

$$x^5 + x - 2 < 0$$

$$f(x) < 0$$

$$f(x) < f(1)$$

$f \nearrow$

$$\underline{\underline{x < 1}}$$

Μονotonia

$$\bullet x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^5 < x_2^5$$

$$\bullet x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \quad (+)$$

$$x_1^5 + x_1 - 2 < x_2^5 + x_2 - 2$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

$f \nearrow$

2. Answer $x^4 - \frac{2}{x} > -1$ on $(0, +\infty)$

$$x^5 - 2 > -x$$

$$x^5 + x - 2 > 0$$

$$f(x) > f(1)$$

f'

$$\underline{\underline{x > 1}}$$

3. $\ln^5 x + \ln x < 2$

for $\underline{\underline{x > 0}}$

$$\ln^5 x + \ln x - 2 < 0$$

$$f(\ln x) < f(2)$$

f'

$$\ln x < 1$$

$$e^{\ln x} < e^1$$

$$\underline{\underline{0 < x < e}}$$

4. $f(2x-1) + 2 > x^5 + x$

$$f(2x-1) > x^5 + x - 2$$

$$f(2x-1) > H(x)$$

$$f \uparrow$$

$$2x-1 > x$$

$$2x - x > 1$$

$$x > 1$$



Επορευ

Μαθημα

Παρασκευή

10:30 - 12

Ενοτητα 3

② α β γ δ

③ α

⑤

⑥

⑧

⑨

Ενοτητα 4

②

③

④

⑤

⑫