ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$,

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_o \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε $f(x_o) = \eta$.

Μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Για κάθε συνάρτηση f, ορισμένη, παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, ισχύει $f'(x) > 0$».

α) Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα **Α**, αν είναι **αληθής**, ή το γράμμα **Ψ**, αν είναι **ψευδής**.
(μονάδα 1)

β) Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α)**.
(μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x^{2\nu+1}} \right) = +\infty$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$.

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B, αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται, αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$ έχει άξονα συμμετρίας τον $y'y$.

δ) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι πάντα διάστημα.

ε) Δίνεται ότι η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $\mathbb{R}$ και ότι η γραφική της παράσταση είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $A(x_o, f(x_o))$ της C_f, του οποίου η απόσταση από τον άξονα $x'x$ είναι μέγιστη (ή ελάχιστη), τότε σε αυτό το σημείο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$f:(1, +\infty) \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$ και

$g:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, με τύπο $g(x)=e^x$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

Μονάδες 5

Β2. Αν $(f \circ g)(x)=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$, με $x>0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι '1-1' και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 8

Β3. Αν $\varphi(x)=(f \circ g)^{-1}(x)=\ell n\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)$, με $x>1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία.

Μονάδες 6

Β4. Αν φ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Β3**, να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x\to 1^+} \varphi(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x\to +\infty} \varphi(x).$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{1-x} - \ell n\lambda, & x \le 0 \\ \eta\mu x + \lambda\sigma\upsilon\nu x, & 0<x<\dfrac{3\pi}{2} \end{cases}, \text{ με } \lambda>0.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda=1$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, 1)$, η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ίση με $\frac{\pi}{4}$.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Γ4. Ένα σημείο $M(\alpha, f(\alpha))$, με $\alpha \leq 0$, κινείται στη γραφική παράσταση της f. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M δίνεται από τον τύπο $\alpha'(t) = -\frac{\alpha(t)}{3}$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο M τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο B. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου B τη χρονική στιγμή t_o, κατά την οποία το σημείο M έχει τετμημένη -1.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_o \in (0, 1)$, στο οποίο η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι

$$f(x_o) = x_o^2 - (e+2)x_o + e - 1.$$

Μονάδες 7

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \to x_o} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_o)} + \eta\mu\left(\frac{1}{x - x_o}\right) \right],$$

όπου x_o το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο.

Μονάδες 6

Δ3. Αν x_o είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x = x_o$ για $x \in (x_o, 1)$ έχει μοναδική ρίζα ρ.

Μονάδες 5

Δ4. Αν x_o είναι το σημείο του ερωτήματος **Δ1** που η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και ρ είναι η ρίζα της εξίσωσης του ερωτήματος **Δ3**, να αποδείξετε ότι $f(x_o) > f(\rho)\,(f'(k) + 1)$ για κάθε $k \in (\rho, 1)$.

Μονάδες 7

Πανελλαδικές 2020

A1: 3.4

A2: 1.31

A3: 2.8

A4: α Λ β Σ γ Σ δ Σ ε Σ

B1: $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = \dfrac{e^x+2}{e^x-1}$

$x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$

$x \in \mathbb{R}$ $\quad e^x > 1$ $\quad D_{f\circ g} = (0,+\infty)$

$x > 0$

B2: Έστω $(f\circ g)(x_1) = (f\circ g)(x_2)$

$$\frac{e^{x_1}+2}{e^{x_1}-1} = \frac{e^{x_2}+2}{e^{x_2}-1} \Leftrightarrow (e^{x_1}+2)(e^{x_2}-1) = (e^{x_2}+2)(e^{x_1}-1)$$

$$\cancel{e^{x_1}e^{x_2}} - e^{x_1} + 2e^{x_2} - \cancel{2} = \cancel{e^{x_2}e^{x_1}} - e^{x_2} + 2e^{x_1} - \cancel{2}$$

$$3e^{x_2} = 3e^{x_1}$$

$$x_1 = x_2 \Rightarrow f\circ g : 1-1.$$

$$(f\circ g)(x) = y \iff y = \frac{e^x+2}{e^x-1} \Rightarrow y(e^x-1) = e^x+2$$

$$ye^x - y = e^x + 2$$

$$ye^x - e^x = y+2$$

$$e^x(y-1) = y+2 \Rightarrow e^x = \frac{y+2}{y-1} \qquad \underline{\underline{y \neq 1}}$$

$$x = \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right) \quad \text{πρπ} \quad \frac{y+2}{y-1} > 0$$

y		-2		1	
$y+2$	$-$	0	$+$		$+$
$y-1$	$-$		$-$		$+$
$\frac{y+2}{y-1}$	$+$		$-$		$+$

$$y \in (-\infty,-2) \cup (1,+\infty)$$

$$\boxed{(f\circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)}$$

Ορισ $x>0 \Rightarrow \ln\left(\frac{y+2}{y-1}\right) > 0 \Rightarrow \frac{y+2}{y-1} > 1$

$$\Rightarrow \frac{y+2}{y-1} - 1 > 0 \Rightarrow \frac{y+2-y+1}{y-1} > 0 \Rightarrow \frac{3}{y-1} > 0$$

$$y-1>0$$

$$\underline{\underline{y>1}}$$

$$D_{f\circ g^{-1}} = (1,+\infty).$$

B3 : $\varphi(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right), \quad x>1$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}} \cdot \left(\frac{x+2}{x-1}\right)' = \frac{x-1}{x+2} \cdot \frac{x-1-x-2}{(x-1)^2}$$

$$\varphi'(x) = \frac{-3}{(x+2)(x-1)} < 0 \qquad \varphi \searrow$$

Bii: $\lim_{x\to 1^+}\varphi(x) = \lim_{x\to 1^+}\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = +\infty$

$\to \lim_{x\to 1^+}\frac{x+2}{x-1} = 3\cdot(+\infty) = +\infty$

$\lim_{x\to +\infty}\varphi(x) = \lim_{x\to +\infty}\ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = 0$

$\to \lim_{x\to +\infty}\frac{x+2}{x-1} = \lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x} = 1$

Γ1: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{1-x} - \ln\lambda\right) = 1-\ln\lambda$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(\eta\mu x + \lambda\,\sigma\upsilon\nu x) = 0+\lambda = \lambda$

Αφού είναι συνεχής $1-\ln\lambda = \lambda \Rightarrow \ln\lambda+\lambda-1=0$

$\varphi(\lambda)=\varphi(1)$

φ 1-1

$\lambda = 1$

$\boxed{\varphi(x) = \ln x + x - 1}$

$\varphi'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$

$\varphi \nearrow \Rightarrow \varphi$ 1-1

Γ2: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & x\le 0\\ ημx+συνx, & 0<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0^-}\frac{1-1+x}{(1-x)x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{(1-x)x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1-x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ημx+συνx-1}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{ημx}{x}+\frac{συνx-1}{x}=1$$

$f'(0)=1$

$\underline{\underline{\hat{\omega}=45}}$

Γνωρίζω εφ$\hat{\omega}=1$

Γ3: Αφού η f είναι παρ/μη στο 0

Το 0 <u>δεν</u> είναι κρίσιμο σημείο.

$\underline{x\le 0}$

$f_1(x)=\dfrac{1}{1-x}$

$f_1'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}>0$

$\underline{\frac{3\pi}{2}>x>0}$

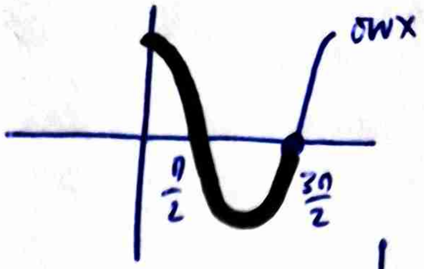
$f_2(x)=ημx+συνx$

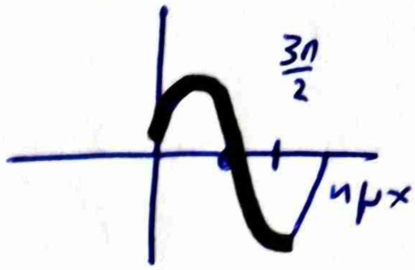
$f_2'(x)=συνx-ημx$

$\longrightarrow f_2'(x)=0 \Rightarrow συνx=ημx$

$\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu x$

$\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$





- $x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} - x$

ή

- ~~$x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} + x$~~ Αδύνατη

$2x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$

$$\boxed{x = \kappa\pi + \frac{\pi}{4}}$$

$\kappa = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ✓

$\kappa = 1 \Rightarrow x = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$ ✓

$\kappa = 2 \Rightarrow x = 2\pi + \frac{\pi}{4}$ ✗ γιατί $\notin \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Κρίσιμα σημεία

$x = \frac{\pi}{4}$ $\quad$ $x = \frac{5\pi}{4}$

Γενικά

$\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\sigma\upsilon\nu x = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Τριγωνομετρική εξίσωση

→ $\sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu\theta$

$\Leftrightarrow$

$x = 2\kappa\pi \pm \theta$

→ $\eta\mu x = \eta\mu\theta$

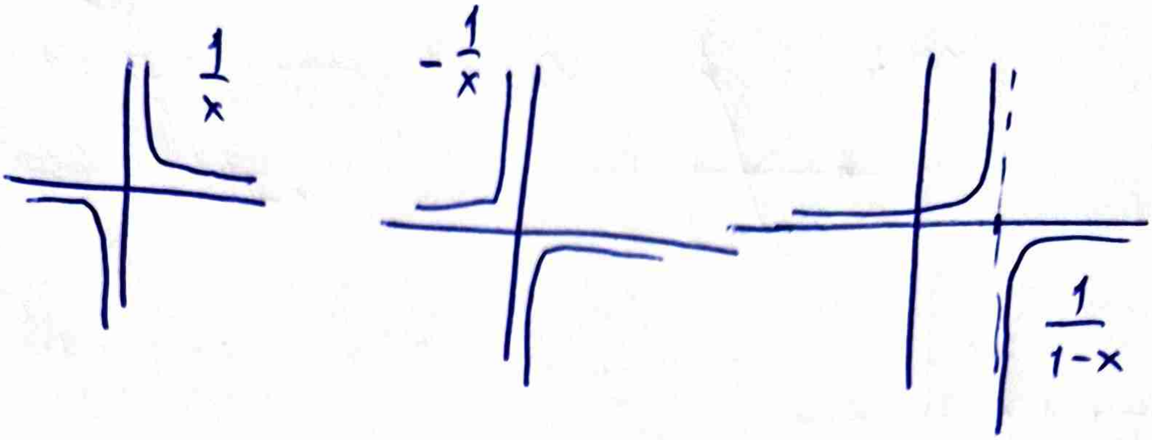
$\Leftrightarrow$

$x = 2\kappa\pi + \theta$

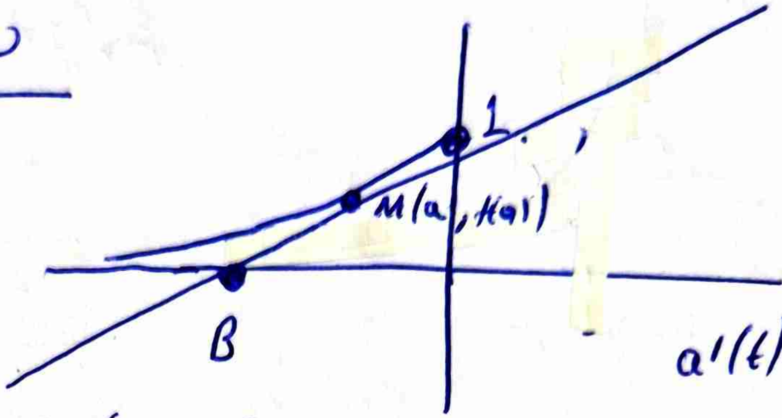
ή

$x = 2\kappa\pi + \pi - \theta$.

T4:



Εδω



$a'(t) = -\frac{a(t)}{3}$

$y - f(a) = f'(a)(x-a)$

$\frac{x'x}{y=0}$

$-f(a) = f'(a)(x-a)$

$-\frac{1}{1-a} = \frac{1}{(1-a)^2}(x-a)$

$\Rightarrow -(1-a) = x - a$

$-1+a = x - a$

$x = 2a - 1$

$\alpha(t_0) = -1$

$x(t) = 2a(t) - 1$

$x'(t) = 2a'(t)$

$x'(t) = -2\frac{a(t)}{3}$

$x'(t_0) = -2\frac{a(t_0)}{3}$

$x'(t_0) = -2\frac{-1}{3} = \frac{2}{3}.$

Δ1: $f(x) = e^x + x^2 - ex - 1$

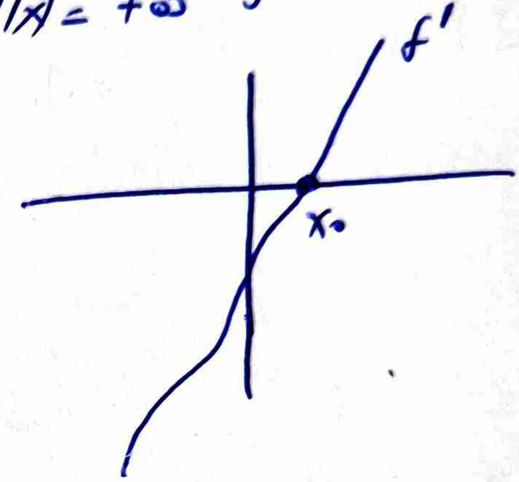
$f'(x) = e^x + 2x - e$

$f''(x) = e^x + 2 > 0$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
f''	$+$
f'	$\nearrow$
f	

<u>Σύνολο Τιμών $f'(x)$</u>

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty \\ \lim_{x\to+\infty} f'(x) = +\infty\end{array}\right\} \Sigma T_{f'} = \mathbb{R}$$



- f' συνεχής
- $f' \nearrow$
- $\Sigma T_{f'} = \mathbb{R}$

Το $0 \in \Sigma T_{f'}$ άρα

$\exists!\ x_0$ τ.ω $f'(x_0) = 0$

<u>Εδώ</u>

$f'(0) = 1 - e < 0$

$f'(1) = 2 > 0$

Bolzano το $x_0 \in (0, 1)$.

x		x_0	
f''	$+$		$+$
f'	$\nearrow -$	0	$+ \nearrow$
f	$\searrow$		$\nearrow$

<u>$f(x) \geq f(x_0)$</u>

$$f(x_0) = e^{x_0} + x_0^2 - e x_0 - 1$$

Γνωρίζω ότι $f'(x_0) = 0$

$$e^{x_0} + 2x_0 - e = 0$$

$$\boxed{e^{x_0} = e - 2x_0}$$

$$f(x_0) = e - 2x_0 + x_0^2 - e x_0 - 1$$

$$f(x_0) = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1 .$$

Δ2: $$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + ημ\frac{1}{x - x_0}$$

$$-1 \le ημ\frac{1}{x - x_0} \le 1$$

$$\boxed{\frac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1 \le \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + ημ\frac{1}{x - x_0} \le 1 + \frac{1}{f(x) - f(x_0)}}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} - 1 = +\infty$$ γιατί $f(x) \ge f(x_0)$

$$\lim_{x \to x_0} 1 + \frac{1}{f(x) - f(x_0)} = +\infty$$ γιατί $f(x) \ge f(x_0)$.

Από Κ.Π $$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x) - f(x_0)} + ημ\frac{1}{x - x_0} = +\infty .$$

Δ3: $f(x)+x=x_0 \quad \forall x\in(x_0,1)$

$$\underbrace{f(x)+x-x_0}_{h(x)}=0$$

$h(x_0)=f(x_0)+x_0-x_0=f(x_0)<0$

$h(1)=f(1)+1-x_0=1-x_0>0$ αφού $x_0\in(0,1)$

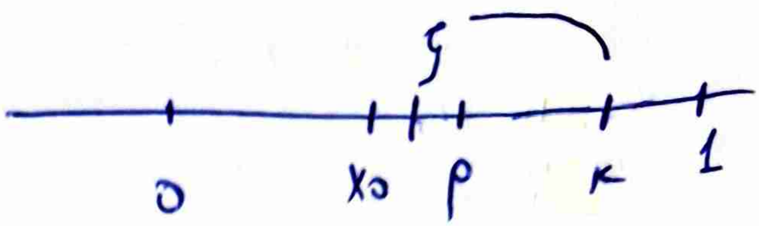
$x_0<1 \Rightarrow f(x_0)<f(1) \Rightarrow f(x_0)<0$

Bolzano $\exists \rho\in(x_0,1)$ τ.ω. $h(\rho)=0$

$h'(x)=f'(x)+1>0$ $h \nearrow$ ρ μοναδικό.

$\forall x>x_0$ η $f'(x)>0$

Δ4:



νδο $f(x_0) > f(p)\,(f'(\kappa)+1)$

$$\boxed{\begin{aligned} f(p)+p &= x_0 \\ f(p) &= x_0 - p \end{aligned}}$$

$$f(x_0) > (x_0-p)(f'(\kappa)+1)$$

$$f(x_0) > (x_0-p)\,f'(\kappa) + x_0 - p$$

$$\boxed{f(x_0) > (x_0-p)\,f'(\kappa) + f(p)}$$

αρκεί νδο

$$f'(\xi) = \frac{f(p)-f(x_0)}{p-x_0}$$

$$\xi < \kappa \Rightarrow f'(\xi) < f'(\kappa) \Rightarrow \frac{f(p)-f(x_0)}{p-x_0} < f'(\kappa)$$

$$\Rightarrow f(p) - f(x_0) < f'(\kappa)(p-x_0)$$

$$f(p) < (p-x_0)\,f'(\kappa) + f(x_0).$$

$$f(x_0) > f(p) - (p - x_0) f'(c)$$

$$f(x_0) > (x_0 - p) f'(c) + f(p)$$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 16 ΙΟΥΝΙΟΥ 2021

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Να αποδείξετε ότι αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

Α3. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Ισχύει $|\eta\mu x|<|x|$, για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

β) Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού Α ισχύει ότι $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$, για κάθε $x\in A$.

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

δ) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι κυρτή στο Δ.

ε) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α,β], τότε η f παίρνει στο [α,β] μια μέγιστη τιμή, Μ, και μια ελάχιστη τιμή, m.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+1)=(x+1)\cdot e^{-x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να δείξετε ότι $f(x)=x\cdot e^{1-x}$, $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 3

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Β3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, αν υπάρχουν.

Μονάδες 9

Β4. Να βρείτε:

(i) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f (μονάδες 4).

(ii) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ (μονάδες 3).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\alpha x^3-3x^2-x+1, & x\le 0\\ \text{συν}x, & 0<x\le\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$, με $\alpha<-3$.

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της (μονάδες 3) αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ2. (i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμιά από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ (μονάδες 3).

(ii) Να βρεθεί το μοναδικό $\xi\in\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi)=0$ (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ3. Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 6

Γ4. Να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση

$$\ln x = \frac{1}{x} \qquad (1)$$

έχει μοναδική ρίζα, x_0, η οποία ανήκει στο (1, e).

Μονάδες 4

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1) και η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ έχει τύπο $f(x) = (\ln x_0) \cdot (x+1) - \ln x - 1$.

Δ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0, το $f(x_0) = 0$.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x) = x \cdot e^{-x},\ x \in \mathbb{R} \qquad \text{και} \qquad h(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1},\ x \in \mathbb{R}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

Μονάδες 8

Δ4. Έστω η συνάρτηση $\varphi:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, συνεχής, με $f(x) > \varphi(x)$, για κάθε $x > 0$. Θεωρούμε τα σημεία $A(x, f(x))$ και $B(x, \varphi(x))$, με $x > 0$. Αν η απόσταση των σημείων Α και Β γίνεται ελάχιστη στο $x = x_0$, να δείξετε ότι το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης φ.

Μονάδες 7

Πανελλήνιες 2021

A1: 3.18

A2: 1.15

A3: 1.3

A4: α Σ β Λ γ Σ δ Σ ε Σ

B1: $f(x+1)=(x+1)e^{-x}$

Θέτω $x+1=t$

$x=t-1$

$f(t)=(t-1+1)e^{-(t-1)}$

$f(t)=te^{-t+1}$

$f(t)=te^{1-t}$ ή $\boxed{f(x)=xe^{1-x}}$

B2: $f'(x)=e^{1-x}-xe^{1-x}=e^{1-x}(1-x)$

$\rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow e^{1-x}(1-x)=0 \Rightarrow \underline{x=1}$

x		1	
f'	+	0	−
f	↗		↘

B3 : $f'(x) = e^{1-x}(1-x)$

$f''(x) = -e^{1-x}(1-x) - e^{1-x}$

$f''(x) = -e^{1-x}(1-x+1) = -e^{1-x}(2-x)$

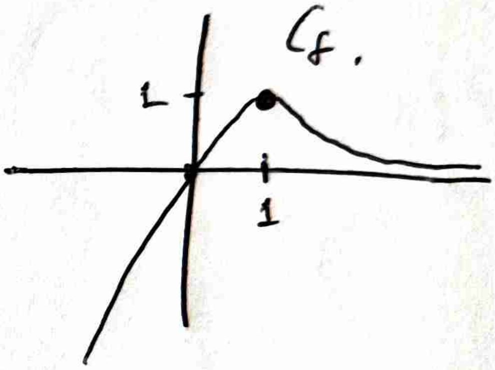
$$\boxed{f''(x) = 2e^{1-x}(x-2)}$$

$\longrightarrow f''(x) = 0 \Rightarrow 2e^{1-x}(x-2) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x=2}}$

x		2	
f''	$-$	0	$+$
f	$\frown$		$\smile$

B4 : i)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x e^{1-x} = (-\infty)(+\infty) = -\infty$

• $f(1) = 1$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x e^{1-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^{x-1}} =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0$

$[T_f = (-\infty, 1]]$.

$$f(x)=\lambda$$

ii).

Αν $\lambda \le 0$ τοτε 1 ρίζα.

Αν $0<\lambda<1$ τοτε 2 ρίζ

Αν $\lambda = 1$ τοτε 1 ρίζα

Αν $\lambda > 1$ καμία ρίζα.

Γ1: $f(x)=\begin{cases} ax^3-3x^2-x+1, & x\le 0 \\ συνx, & 0<x\le \frac{3\pi}{2} \end{cases}$ $\quad a<-3$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-}(ax^3-3x^2-x+1)=1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} συνx = 1 \end{aligned}\right\} \lim_{x\to 0} f(x)=1$$

$f(0)=1$ και αφου $f(0)=\lim_{x\to 0} f(x)$ συνεχής

στο 0.

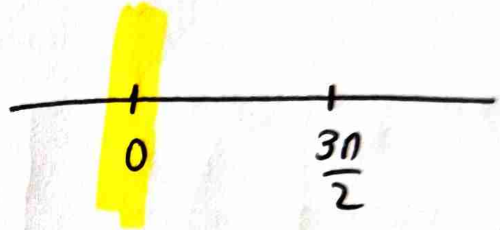
Η f συνεχής στο $(-\infty,0)$ και $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right]$ ως π.σ.σ

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{ax^3-3x^2-x+1-1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{ax^3-3x^2-x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{3ax^2-6x-1}{1} = -1$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{συν x - 1}{x} = 0$$

Η f όχι παρ/μη στο 0.



Γ2: i) Η f συνεχής $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

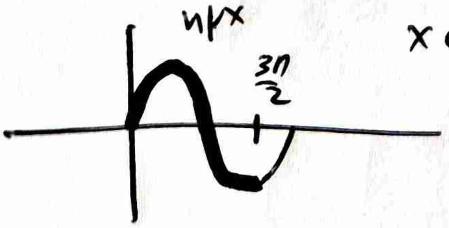
Η f παρ/μη $\left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = συν\,\frac{3\pi}{2} = 0 \end{array}\right\} f(0) \neq f\left(\frac{3\pi}{2}\right) \text{ άρα}$$

δεν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Rolle.

ii). $f'(x) = 0 \Rightarrow -ημx = 0 \Rightarrow ημx = 0$

$x = \pi$



$x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$.

μοναδική ρίζα.

Γ3: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$

Για να είναι παράλληλη στον $x'x$

πρέπει $f'(x_0) = 0$

Για $x < 0$ η $f'(x) = 0$

$\Rightarrow 3ax^2 - 6x - 1 = 0$

$\Delta = 36 + 12a = 12(3+a) < 0$ Αδύνατη!

όμως $a < -3 \Rightarrow a + 3 < 0$

Άρα $\nexists x < 0$ τ.ω $f'(x) = 0$.

Γ4:

$\underline{x < 0}$

$f_1(x) = ax^3 - 3x^2 - x + 1$

$f_1'(x) = 3ax^2 - 6x - 1$

$\Delta < 0$

διατηρεί πρόσημο

ομόσημο του α.

$a < -3$

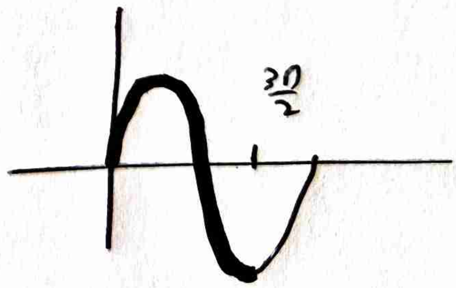
$f_1'(x) < 0$.

$\underline{0 < x < \frac{3\pi}{2}}$

$f_2(x) = \sigma\upsilon\nu x$

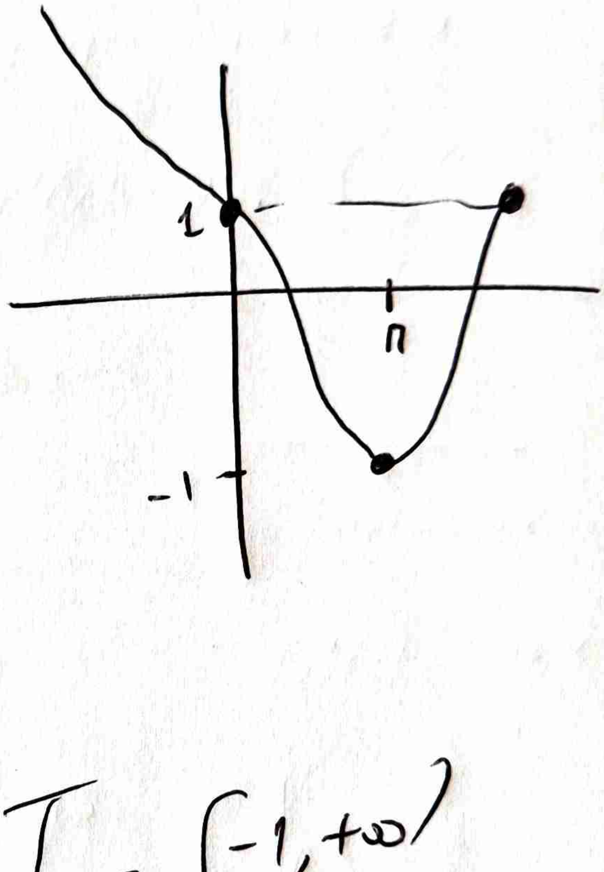
$f_2'(x) = -\eta\mu x$

$x = \pi$



x	$-\infty$		0		π		$\frac{3\pi}{2}$
f_1'		$-$		////////		////////	
f_2'		////////		$-$	0	$+$	
f'		$-$		$-$		$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} ax^3-3x^2-x+1 = +\infty$$



$f(0) = 1$

$f(\pi) = -1$

$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\eta\mu\frac{3\pi}{2} = 1$

$$\sum T_f = [-1,+\infty)$$

$f(x) \geq -1.$

Δ1: $\ln x = \frac{1}{x} \Rightarrow \ln x - \frac{1}{x} = 0$

$\boxed{\text{Θεωρώ } \varphi(x) = \ln x - \frac{1}{x}}$

$\varphi(1)\varphi(e) < 0$

$\varphi(1) = \ln 1 - \frac{1}{1} = -1$

Bolzano. $\exists\, x_0 \in (1, e)$

$\varphi(e) = \ln e - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{e} > 0$

τ.ω $\varphi(x_0) = 0$

Η $\varphi(x)$ συνεχής στο $[1, e]$

$\varphi'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$

$\varphi \nearrow$ το x_0 μοναδικό.

$\ln x_0 = \frac{1}{x_0}$

$x_0 \in (1, e)$

Δ2: $f(x) = \ln x_0 (x+1) - \ln x - 1$

$f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} = \frac{x - x_0}{x x_0}$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x - x_0}{x x_0}}$$

$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x - x_0 = 0 \Rightarrow x = x_0$

x		x_0	
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

$f(x_0) = \ln x_0 (x_0 + 1) - \ln x_0 - 1$

$f(x_0) = \frac{1}{x_0}(x_0 + 1) - \frac{1}{x_0} - 1$

$f(x_0) = 1 + \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0} - 1 = 0.$

Δ3: $g(x) = x e^{-x}$

$$h(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$$

$$g(x) = h(x) \Leftrightarrow x e^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$$

$$\ln(x e^{-x}) = \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$$

$$\ln x + \ln e^{-x} = (x+1)\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)$$

$$\ln x - x = (x+1)(\ln x_0 - \ln e)$$

$$\ln x - x = (x+1)(\ln x_0 - 1)$$

$$\ln x - \cancel{x} = \ln x_0 (x+1) - \cancel{x} - 1$$

$$0 = \ln x_0 (x+1) - \ln x - 1$$

$$0 = f(x)$$

Η εξισωση αυτη εχει μοναδικη ριζα το x_0 απο τα προηγουμενα ερωτηματα αφου το $A(x_0, f(x_0))$ ειναι ολικο ελαχιστο.

κοινη εφαπτομενη στο κοινο σημειο $A(x_0, H(x_0))$

$$\begin{cases} g(x_0) = h(x_0) \\ g'(x_0) = h'(x_0) \end{cases}$$

Αρκει νδο $g'(x_0) = h'(x_0)$

$$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1-x)$$

$$h'(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \ln\left(\frac{x_0}{e}\right) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \cdot (\ln x_0 - \ln e) =$$

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a.} \qquad = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} (\ln x_0 - 1)$$

Αρκει νδο $g'(x_0) = h'(x_0)$

$$e^{-x_0}(1-x_0) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} (\ln x_0 - 1)$$

$$e^{-x_0}(1-x_0) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \left(\frac{1}{x_0} - 1\right)$$

$$e^{-x_0}\cancel{(1-x_0)} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot \frac{\cancel{1-x_0}}{x_0}$$

$$e^{-x_0} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot \frac{1}{x_0} \rightarrow \frac{x_0}{e^{x_0}} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}$$

$$\ln \frac{x_0}{e^{x_0}} = \ln \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}$$

$$\ln x_0 - \ln e^{x_0} = (x_0+1)\ \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)$$

$$\frac{1}{x_0} - x_0 = (x_0+1)(\ln x_0 - \ln e)$$

$$\frac{1}{x_0} - x_0 = (x_0+1)\left(\frac{1}{x_0} - 1\right)$$

$$\cancel{\frac{1}{x_0}} - \cancel{x_0} = \cancel{1} - \cancel{x_0} + \cancel{\frac{1}{x_0}} - \cancel{1}$$

$$0 = 0.$$

Δ4: $A(x, f(x))$ και $B(x, g(x))$, $x > 0$

Η αποσταση των A, B

$$d(A,B) = \sqrt{(x-x)^2 + (g(x)-f(x))^2} = \sqrt{(g(x)-f(x))^2}$$

$$d(x) = |\overset{\ominus}{g(x) - f(x)}| = f(x) - g(x) \Rightarrow \underline{\underline{d(x) = f(x) - g(x)}}$$

• $f(x) > g(x)$

Αφού η απόσταση $d(x) = f(x) - \varphi(x)$ γίνεται ελάχιστη στο x_0 έχω ακρότατο άρα

$$d(x) \geq d(x_0)$$

Fermat $d'(x_0) = 0$

$$d'(x) = f'(x) - \varphi'(x)$$

$$d'(x_0) = f'(x_0) - \varphi'(x_0) = 0$$

$$f'(x_0) = \varphi'(x_0)$$

$$0 = \varphi'(x_0)$$

Άρα το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της $\varphi(x)$.

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c,$$

όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c,$$

με $c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

Α3. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim_{x \to +\infty} \alpha^x = 0$.

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x) \neq 0$, για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.

γ) Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $R_2 = \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$.

δ) Ισχύει ότι $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} = 1$.

ε) Αν $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:(-\infty,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^4-2x^2+1$ και η συνάρτηση $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x}$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h=f\circ g$.

Μονάδες 6

Β2. Αν $h(x)=(x-1)^2$, $x\in[0,1]$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι "1−1" (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} της h (μονάδες 6).

Μονάδες 9

Β3. Έστω $h^{-1}(x)=1-\sqrt{x}$, $x\in[0,1]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{h^{-1}(x)}{1-x}, & x\in[0,1)\\ \dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}.$$

(i) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0,1]$. (μονάδες 6)

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=\eta\mu\alpha$, όπου $\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$. (μονάδες 4)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Δίνεται ακόμα ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ και για την παράγωγο f' της f ισχύει ότι:

$$f'(x)=\begin{cases}-2, & x<-1\\ 3x^2-1, & x>-1\end{cases}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\begin{cases}-2x-2, & x\le -1\\ x^3-x, & x>-1\end{cases}$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f σε σημείο $A(x_0,f(x_0))$ με $x_0>-1$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -2.

Μονάδες 5

Γ3. Έστω $y=2x-2$ η εξίσωση της ευθείας (ε) του ερωτήματος Γ2. Ένα σημείο $M(x,y)$ με $x>2$ κινείται κατά μήκος της ευθείας (ε). Έστω ακόμα Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΚΓ, όπου Κ είναι η προβολή του σημείου Μ στον άξονα $x'x$ και Γ είναι το σημείο με συντεταγμένες (2,0). Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο Β(3,4) ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε τη χρονική στιγμή t_0.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to-\infty}\left[\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\dfrac{f(-x)}{1-x^3}\right]$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=x-\ln(3x)$$

Δ1. **i)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1,x_2, με $x_1<1<x_2$. (μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. (μονάδες 2)

Μονάδες 8

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ1.

Δ2. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι:

$$E=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2-2)\ .$$

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι: $f(2-x_1)<0$.

Μονάδες 4

Δ4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση: $2f(x)+\ln 3=1+f'(x_2)(x-x_2)$ έχει λύση.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Πανελλήνιες 2022

B1 $h(x) = (f\circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x}^2 - 1)^2 = (x-1)^2$

$\left[f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 \quad = (x^2-1)^2 \right]$ $\qquad D_h = [0,1]$.

$x \in D_g$ και $\quad g(x) \in D_f$

$x \geq 0 \qquad \sqrt{x} \leq 1$

$\qquad\qquad x \leq 1$

B2 $h'(x) = 2(x-1) \leq 0 \qquad h \downarrow$ άρα 1-1.

$h(x) = y \Rightarrow y = (x-1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{y}^2 = (x-1)^2$

$y \geq 0$

$|\overset{\oplus}{\sqrt{y}}| = |\overset{\ominus}{x-1}| \Leftrightarrow \sqrt{y} = 1 - x \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{y}$

$h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$

$0 \leq x \leq 1$

$0 \leq 1 - \sqrt{y} \leq 1 \qquad D_{h^{-1}} = [0,1]$.

$0 \leq 1 - \sqrt{y}$ και $\quad 1 - \sqrt{y} \leq 1$

$\sqrt{y} \leq 1 \qquad -\sqrt{y} \leq 0$

$y \leq 1 \qquad ✓$

B3

$$\varphi(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x\in[0,1) \\ \dfrac{1}{2}, & x=1 \end{cases}$$

i) $\lim\limits_{x\to 1^-} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{1}{2}$

Η $\varphi(x)$ συνεχής στο $(0,1)$ ως πράξη συνεχών συναρτήσεων και

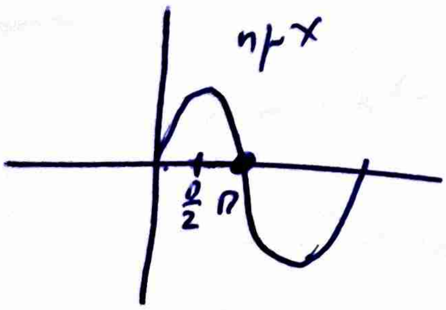
$\varphi(0)=\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x)$ και $\varphi(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} \varphi(x)$

Άρα η $\varphi(x)$ είναι συνεχής $[0,1]$.

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(0)=1 \\ \varphi(1)=\frac{1}{2}\end{array}\right\} \varphi(0)\neq\varphi(1) \text{ άρα ισχύει!}$$

ii). ν.δ.ο $\exists x_0\in(0,1)$ τ.ω $\varphi(x_0)=\eta\mu\alpha$

$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.



Όταν $\alpha\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ το $\eta\mu\alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.

άρα από ΘΕΤ $\exists x_0\in(0,1)$ τ.ω $\varphi(x_0)=\eta\mu\alpha$.

Θεμα Γ

Γ1 $f'(x)=\begin{cases} -2, & x<-1 \\ 3x^2-1, & x>-1 \end{cases}$

$f(x)=\begin{cases} -2x+c_1, & x<-1 \\ x^3-x+c_2, & x\geq -1 \end{cases}$ συνεχής

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 2+c_1$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = c_2$

$\Big\}\; c_2 = 2+c_1$

$f(0)=0 \Rightarrow \underline{c_2=0}$ $\quad \underline{c_1=-2}$.

$$\boxed{f(x)=\begin{cases} -2x-2, & x\leq -1 \\ x^3-x, & x>-1 \end{cases}}$$

Γ2 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \longrightarrow (0,-2)$

$-2-(x^3-x)=(3x^2-1)(-x)$

$-2-x^3+\cancel{x}=-3x^3+\cancel{x}$

$2x^3=2$

$x^3=1$

$x=1$

$y-f(1)=f'(1)(x-1)$

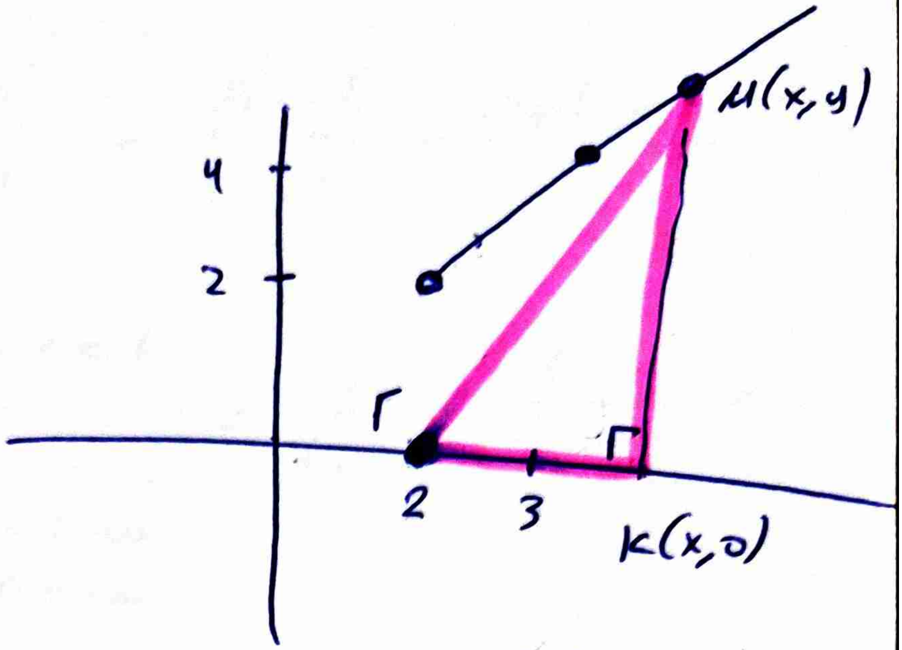
$y-0=2(x-1)$ $\quad$ $\boxed{\varepsilon: y=2x-2}$

Γ3 $y=2x-2$

$x(t_0)=3$

$y(t_0)=4$

$x'(t_0)=2$.



$y(t)=2x(t)-2$

$y'(t)=2x'(t)$

$y'(t_0)=2x'(t_0)$

$y'(t_0)=4$

$E=\frac{B.U}{2}$

$E=\frac{(x-2)y}{2}$

$E(t)=\frac{1}{2}(x(t)-2)\,y(t)$

$E'(t)=\frac{1}{2}\left[x'(t)y(t)+(x(t)-2)y'(t)\right]$

$t=t_0$

$E'(t_0)=\frac{1}{2}\left[x'(t_0)\,y(t_0)+(x(t_0)-2)y'(t_0)\right]$

$E'(t_0)=\frac{1}{2}\left[2\cdot 4+(3-2)\,4\right]$

$E'(t_0)=\frac{1}{2}(8+4)=6$.

Γ4 $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \dfrac{f(-x)}{1-x^3} = 0+1 = 1$.

$$\to \lim_{x\to-\infty} \frac{f(-x)}{1-x^3} \underset{\substack{x=-t \\ x\to-\infty \\ t\to+\infty}}{\overset{-x=t}{=\!=\!=}} \lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{1-(-t)^3} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^3+1} = \frac{t^3-t}{t^3+1} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = 0$$

$$-1 \le \eta\mu f(x) \le 1 \iff |\eta\mu f(x)| \le 1$$

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| |\eta\mu f(x)| \le \left|\frac{1}{f(x)}\right| \iff \left|\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right| \le \left|\frac{1}{f(x)}\right|$$

$$-\left|\frac{1}{f(x)}\right| \le \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \le \left|\frac{1}{f(x)}\right|$$

$$\left.\begin{aligned} &\cdot \lim_{x\to-\infty} -\left|\frac{1}{f(x)}\right| = 0 \\ &\cdot \lim_{x\to-\infty} \left|\frac{1}{f(x)}\right| = 0 \end{aligned}\right\} \text{Άρα κ.π. } \lim_{x\to-\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = 0$$

Θέμα Δ

- $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$
- $f(x) = x - \ln(3x)$

Δ1 i) $f'(x) = 1 - \dfrac{3}{3x} = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$

x	0		1	
f'		−	0	+
f		↘		↗

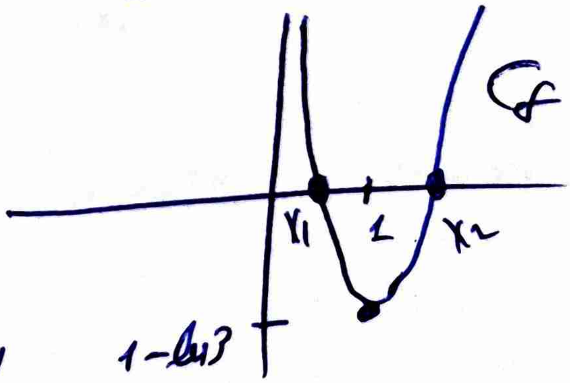
$f(x) \geq f(1)$

$f(x) \geq 1 - \ln 3$.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x - \ln 3x = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \dfrac{\ln 3x}{x}\right) = +\infty$.

$\to \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln 3x}{x} = \lim_{x \to +\infty} 3\dfrac{1}{3x} = 0$



$x \in (0,1)$

- $f \downarrow$
- f συνεχής
- $\Sigma T_f = (1-\ln 3, +\infty)$

Το $0 \in \Sigma T_f$

άρα $\exists\, x_1 < 1$

τ.ω $f(x_1) = 0$

$x \in (1,+\infty)$

- $f \uparrow$
- f συνεχής
- $\Sigma T_f = (1-\ln 3, +\infty)$

Το $0 \in \Sigma T_f$

άρα $\exists\, x_2 > 1$

τ.ω $f(x_2) = 0$.

iii) $f'(x) = \frac{x-1}{x}$

$f''(x) = \frac{x-x+1}{x^2} = \frac{1}{x^2} > 0$ f κυρτή.

Δ2 $E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\, dx = -\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \overset{\oplus}{=}$

νδο $E = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2)$.

$\overset{\oplus}{=} -\int_{x_1}^{x_2} x - \ln 3x \, dx =$

$= -\int_{x_1}^{x_2} x\, dx + \int_{x_1}^{x_2} \ln 3x \, dx =$

$= -\frac{1}{2}(x^2)_{x_1}^{x_2} + (x \ln 3x)_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} 1\, dx$

$= -\frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) + x_2 \ln 3x_2 - x_1 \ln 3x_1 - x_2 + x_1$

$= -\frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) + x_2^2 - x_1^2 - x_2 + x_1 =$

$= \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) - (x_2 - x_1)$

$f(x_1) = x_1 - \ln 3x_1 = 0$

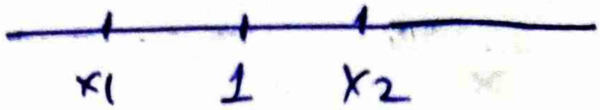
$\boxed{\ln 3x_i = x_i}$

$\ln 3x_2 = x_2$

$= \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - (x_2 - x_1)$

$= (x_2 - x_1)\left(\frac{1}{2}(x_2 + x_1) - 1\right) = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2)$

Δ3 NJO $f(2-x_1)<0$



$$E=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2-2)$$

$\oplus$ $\oplus$

$\longrightarrow x_1+x_2-2>0$

$x_2>2-x_1>1$

$f(x_2)>f(2-x_1)$

$0>f(2-x_1).$

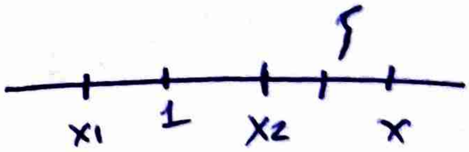
$2-x_1>1$
$2-1>x_1$
$1>x_1$

Δ4 $2f(x)+\ln 3=1+f'(x_2)(x-x_2)$

$$2f(x)=1-\ln 3+f'(x_2)(x-x_2)$$

$$2f(x)=f(1)+f'(x_2)(x-x_2)$$

$$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}=\frac{f(x)}{x-x_2}$$



$x_2<\xi \Rightarrow f'(x_2)<f'(\xi) \Rightarrow f'(x_2)<\dfrac{f(x)}{x-x_2}$

$$\boxed{f'(x_2)(x-x_2)<f(x)}$$

ισχύει

$f(x)>f'(x_2)(x-x_2)$

Αφού $f(1)<0$

$f(x)>f'(x_2)(x-x_2)+f(1)$

$2f(x)>f'(x_2)(x-x_2)+f(1)$