

Άσκηση 1

Έστω $f(x) = \ln(e^x - 1)$

1. D_f

2. Σημεία στροφής με αλγόριθμο

3. Ανίχνευση $f(x) > 1$

1. Πριν $e^x - 1 > 0 \Rightarrow e^x > 1 \Rightarrow \ln e^x > \ln 1$
 $D_f = (0, +\infty)$ $x > 0$

2. $\frac{x'x}{\Delta \text{or } \text{cxy.}}$
 $f(x) = 0$
 $\ln(e^x - 1) = 0$

$$e^{\ln(e^x - 1)} = e^0$$

$$e^x - 1 = 1$$

$$e^x = 2$$

$$\ln e^x = \ln 2$$

$$\boxed{x = \ln 2}$$

$$A(\ln 2, 0)$$

3. $f(x) > 1$

$$\ln(e^x - 1) > 1$$

$$e^{\ln(e^x - 1)} > e^1$$

$$e^x - 1 > e$$

$$e^x > e + 1$$

$$\ln e^x > \ln(e + 1)$$

$$\underline{\underline{x > \ln(e + 1)}}$$

2. NDO + нечетн

$$f(-x) = \ln\left(\frac{3^{-x} - 9}{1 - 3^{-x+2}}\right) = \ln\left(\frac{\frac{1}{3^x} - 9}{1 - 3^{-x} \cdot 9}\right)$$

$$= \ln \frac{\frac{1}{3^x} - 9}{1 - 9 \frac{1}{3^x}} = \ln \frac{1 - 9 \cdot 3^x}{3^x - 9} =$$

$$= \ln\left(\frac{3^x - 9}{1 - 9 \cdot 3^x}\right)^{-1} = -f(x).$$

3. $\sigma_w\left(\frac{5n}{4} + 0\right) = \sigma_w\left(\frac{4n}{4} + \frac{n}{4} + 0\right) = \sigma_w\left(n + \frac{n}{4} + 0\right)$

$$= -\sigma_w\left(\frac{n}{4} + 0\right)$$

$$\sigma_w\left(\frac{15n}{4} - 0\right) = \sigma_w\left(\frac{16n}{4} - \frac{n}{4} - 0\right) =$$

$$= \sigma_w\left(-\frac{n}{4} - 0\right) = \sigma_w\left(\frac{n}{4} + 0\right)$$

$$\text{NDO } f\left(-\sigma_w\left(\frac{n}{4} + 0\right)\right) + f\left(\sigma_w\left(\frac{n}{4} + 0\right)\right) = 0$$
$$- f\left(\sigma_w\left(\frac{n}{4} + 0\right)\right) + f\left(\sigma_w\left(\frac{n}{4} + 0\right)\right) = 0.$$

Άσκηση 2

$$f(x) = \ln\left(\frac{3-x}{x+3}\right)$$

1. D_f
2. Νόο f περίττη
3. Σύγκριση $f(0)$ και $f(1/3)$
4. Ανάλυση $f(x) > 0$
5. D_g αν $g(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{f(x)}$

1. περίττη $\frac{3-x}{x+3} > 0$

x	-3	3
$3-x$	+	+
$x+3$	-	+
$P(x)$	-	-

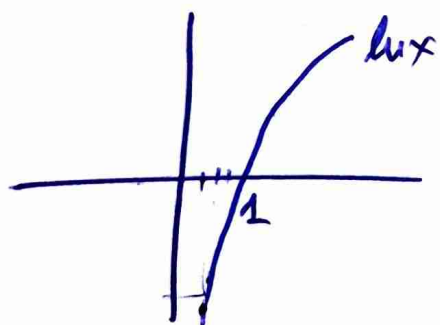
$$D_f = (-3, 3)$$

2. $f(-x) = \ln\left(\frac{3+x}{3-x}\right) =$
 $= \ln\left(\frac{3-x}{3+x}\right)^{-1} =$
 $= - \ln\left(\frac{3-x}{x+3}\right) =$
 $= - f(x)$ περίττη.

3. $f(0) = \ln 1 = 0$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln \frac{24}{30} < 0$$

γιατί $\frac{24}{30} < 1$.



$$f\left(\frac{1}{3}\right) < f(0)$$

4. $f(x) > 0 \Rightarrow \ln \frac{3-x}{x+3} > 0 \Rightarrow \frac{3-x}{x+3} > 1$

$$\Rightarrow 3-x > x+3$$

$$0 > 2x$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{-3 < x < 0}}$$

5. $g(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{f(x)}$

$$f(x) \geq 0$$

kor

$$f(x) \neq 0$$

$$\Rightarrow f(x) > 0.$$

Apn $f(x) > 0$

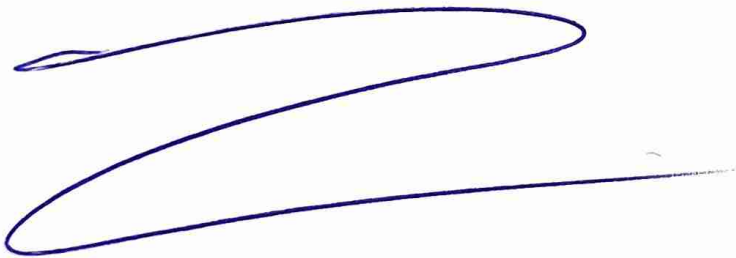
$$x \in (-3, 0)$$

kor

$$x \in D_f$$

$$x \in (-3, 3).$$

$$x \in (-3, 0)$$



Άσκηση 3

$$f(x) = \ln \left| \frac{3^x - 9}{1 - 3^{x+2}} \right|$$

1. Nδο $D_f = (-2, 2)$

2. Nδο f π ρλτττ

3. Nδο $f\left(\sin\left(\frac{5\pi}{4} + \theta\right)\right) + f\left(\sin\left(\frac{15\pi}{4} - \theta\right)\right) = 0$

4. \in ξ ύωση $f(x) + x \ln 3 = 0$

1. Πρην $\frac{3^x - 9}{1 - 3^{x+2}} > 0$ και $1 - 3^{x+2} \neq 0$

$$\frac{3^x - 9}{1 - 3^x \cdot 3^2} > 0$$

$$1 \neq 3^x \cdot 3^2$$

$$\frac{3^x - 9}{1 - 9 \cdot 3^x} > 0$$

$$\frac{1}{9} \neq 3^x$$

$$3^{-2} \neq 3^x$$

$$\underline{\underline{x \neq -2}}$$

$3^x = t$ $\frac{t-9}{1-9t} > 0$

t	$1/9$	9	
$t-9$	-	-	+
$1-9t$	+	+	-
$P(t)$	-	+	-

$$\frac{1}{9} < t < 9$$

$$3^{-2} < 3^x < 3^2$$

$$-2 < x < 2$$

$$4. \quad f(x) + x \ln 3 = 0$$

$$\ln \frac{3^x - 9}{1 - 3^{x+2}} = -x \ln 3$$

$$\ln \frac{3^x - 9}{1 - 3^{x+2}} = \ln 3^{-x}$$

$$\frac{3^x - 9}{1 - 3^x \cdot 9} = \frac{1}{3^x}$$

$$3^x = t$$

$$\frac{t - 9}{1 - 9t} = \frac{1}{t}$$

$$\cancel{t^2 - 9} = \cancel{1 - 9t}$$

$$t = 1$$

$$t = -1$$

$$3^x = 1$$

$$3^x = -1$$

$$x = 0$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$. Να αποδείξετε ότι

α) το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$.

(Μονάδες 6)

β) $P(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (1, 2)$.

(Μονάδες 7)

γ) $1 < \log 20 < 2$.

(Μονάδες 6)

δ) $P(\log 20) < 0$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \log \sqrt{10^x - 2}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $A = (\log 2, +\infty)$.

(Μονάδες 07)

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \log \sqrt{\frac{10^x}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$.

i. Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{\frac{10^x}{3}} = \sqrt{10^x - 2}$ με $x \in (\log 2, +\infty)$.

(Μονάδες 09)

ii. Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων, των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - \alpha x^2 + 2x + \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Αν $P(1) = 2$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x - 2)$ ισούται με 15,

α) Να δείξετε ότι $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$.

(Μονάδες 8)

β)

i. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $\pi(x) = x^2 + 1$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

(Μονάδες 5)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 5)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\sin^3 x + \sin x = 1 - \frac{1}{2}\eta\mu^2 x$, $x \in (0, 2\pi)$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 - x^2 - 2x + 1$. Να αποδείξετε ότι

α) το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$.

(Μονάδες 6)

β) $P(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, 1)$.

(Μονάδες 7)

γ) $\frac{1}{2} < \sigma\upsilon\nu\theta < 1$ για κάθε γωνία $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$.

(Μονάδες 6)

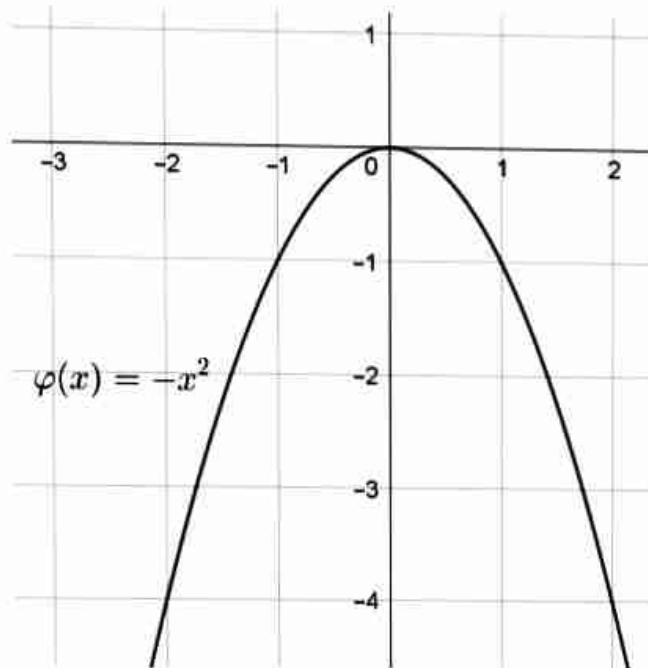
δ) $P(\sigma\upsilon\nu\theta) < 0$ για κάθε γωνία $\theta \in (0, \frac{\pi}{3})$.

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = -x^2, x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = -x^2 + 2x + 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -(x - 1)^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ , που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .



(Μονάδες 10)

β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f να βρείτε:

i. Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.

(Μονάδες 5)

ii. Το ολικό ακρότατο της f καθώς και τη θέση του.

(Μονάδες 5)

iii. Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa, \kappa < 2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται γωνία x με $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ και οι παραστάσεις:

$$A = \eta\mu^2(\pi - x) + \eta\mu^2(\pi + x) + \sigma\upsilon\nu^2(-x),$$

$$B = \frac{\eta\mu x}{1 + \sigma\upsilon\nu x} + \frac{1 + \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}.$$

α) Να αποδείξετε ότι $A = \eta\mu^2 x + 1$.

(Μονάδες 08)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση B .

(Μονάδες 08)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x για την οποία οι παραστάσεις A και B να είναι ίσες.

(Μονάδες 09)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - ax^2 + 7x - \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Αν το πολυώνυμο έχει παράγοντα το $x - 3$ και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x)$: $(x + 1)$

είναι $v = -16$, τότε:

α) Να υπολογισθούν οι τιμές των α, β .

(Μονάδες 06)

Αν είναι $\alpha = 5$, $\beta = 3$,

β) να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 07)

γ) να λυθεί η ανίσωση $P(x) < 0$.

(Μονάδες 06)

δ) Αν $P(\ln \kappa) < 0$, τότε να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού κ .

(Μονάδες 06)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 + \sqrt{3}\epsilon\phi\omega \cdot \eta\mu x, x \in \mathbb{R}$. Αν για τη γωνία ω ισχύει η σχέση $-2\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu\omega = -1, \omega \in [0, \frac{\pi}{2}]$, τότε:

α)

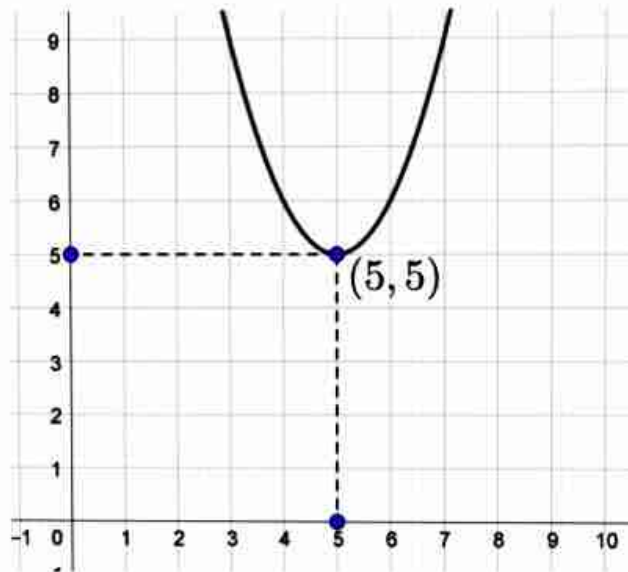
i. Να αποδείξετε ότι $\epsilon\phi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

(Μονάδες 10)

ii. Για $\epsilon\phi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

(Μονάδες 04)

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x^2 - 10x + 30, x \in \mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση στο παρακάτω σχήμα.



i. Να βρείτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης g .

(Μονάδες 04)

ii. Να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν κοινά σημεία. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 07)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 6x^2 - 7$.

α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $x-1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.

(Μονάδες 5)

β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο $P(x)$ σε πολυώνυμα πρώτου ή δευτέρου βαθμού.

(Μονάδες 8)

γ)

i. Να λύσετε την εξίσωση $P(x) = 0$.

(Μονάδες 5)

ii. Αν οι αριθμοί -1 και 1 είναι οι ρίζες της εξίσωσης $P(x)=0$, να λύσετε την εξίσωση

$$(2\eta\mu x - 1)^4 + 6(2\eta\mu x - 1)^2 - 7 = 0, \text{ για } x \in \mathbb{R}.$$

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Στο σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \text{ και } g(x) = 4x - 4 \text{ με } x \in \mathbb{R}.$$

α) Από τη γραφική παράσταση της f , να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της.

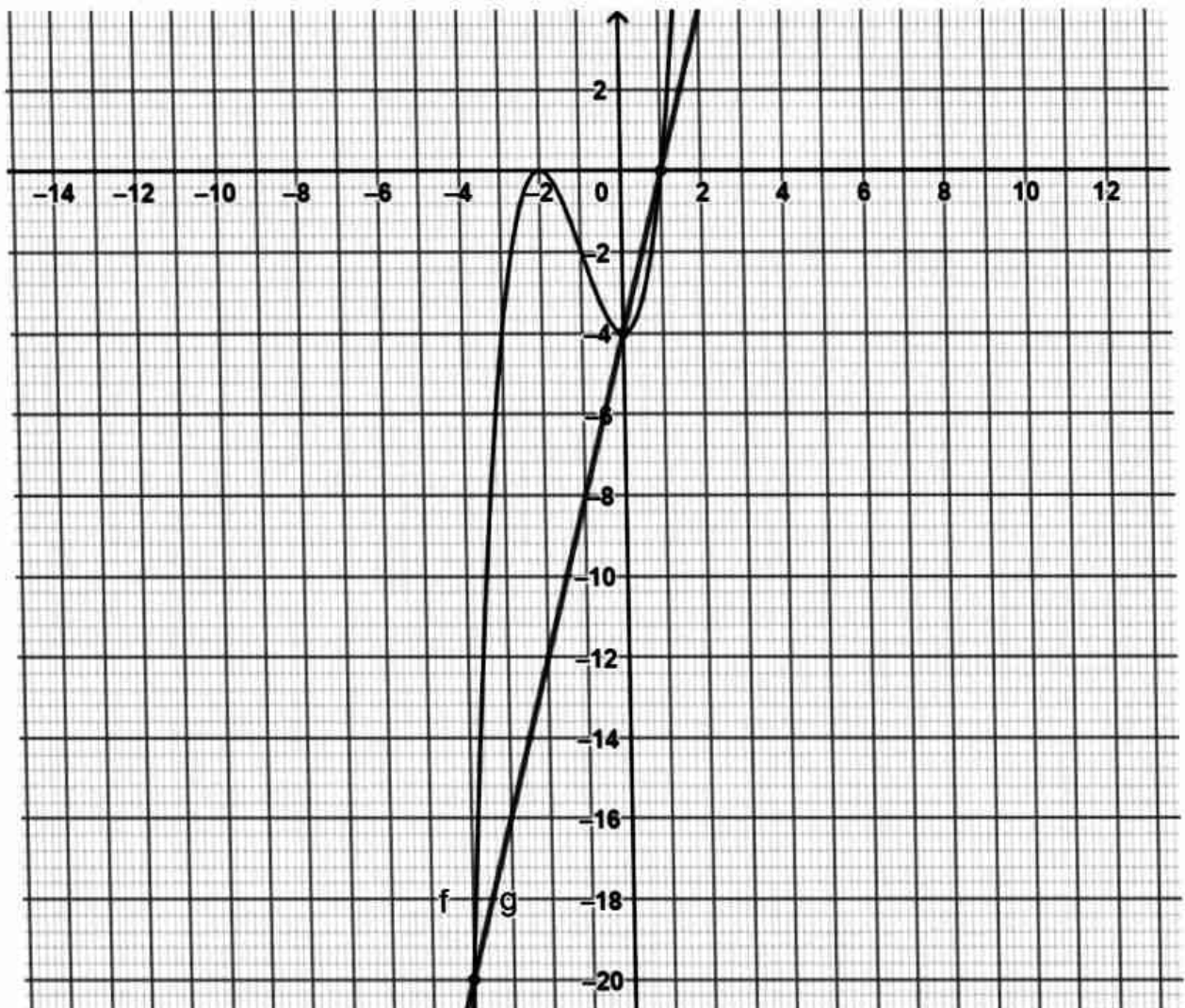
(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε γραφικά και αλγεβρικά την εξίσωση $f(x) = g(x)$.

(Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε αλγεβρικά τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης g είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 7)



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \left(\frac{2-\lambda}{4}\right)^x$.

α) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες η f είναι εκθετική συνάρτηση.

(Μονάδες 5)

β) Για ποιες τιμές του λ που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα;

(Μονάδες 7)

γ) Για $\lambda = 0$

i. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

(Μονάδες 6)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f(x + 1) = 6$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A και το σημείο τομής της γραφικής της παράστασης με τον άξονα $x'x$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x - 1$.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι αν $\alpha > 0$, τότε η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με την ευθεία $y = x + \alpha$.

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)\ln x$, $x > 0$ και η ευθεία $\varepsilon: y = 2x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(2) + f(4) = \frac{1}{3}f(8)$.

(Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_f της f είναι από τον άξονα x' και πάνω.

(Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε:

i. Τα κοινά σημεία της C_f με την ευθεία.

(Μονάδες 4)

ii. Για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από την ευθεία.

(Μονάδες 5)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha+1}{2} \sigma\upsilon\nu(\beta x)$, με $\alpha, \beta > 0$, η οποία έχει ελάχιστο -2 και περίοδο $\frac{\pi}{2}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = 4$.

(Μονάδες 5)

β) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \epsilon\varphi(\pi - x) \cdot \eta\mu(2\pi + x)}{\sigma\upsilon\nu(3\pi - x) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$. Να δείξετε ότι $A = -1$.

(Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2A$, στο διάστημα $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x - 2$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου.

(Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x) > 0$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $3\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^3 + 4\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^2 - 5\left(\frac{5}{x^2+1}\right) - 2 > 0$.

(Μονάδες 11)