

Азмон 1

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

$$D_f = [1, +\infty)$$

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

$$D_g = (0, +\infty)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$x \in D_f \quad \text{or} \quad f(x) \in D_g$$

$$x \geq 1$$

$$\sqrt{x-1} > 0$$

$$x-1 > 0$$

$$x > 1$$

$$(g \circ f)(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$$

$$D_{g \circ f} = (1, +\infty).$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{\frac{1}{x} - 1} = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$$

$$x \in D_g \quad \text{ou} \quad g(x) \in D_f$$

$$x > 0$$

$$\frac{1}{x} \geq 1$$

$$\frac{1}{x} - 1 \geq 0$$

$$\frac{1-x}{x} \geq 0$$

x	0	1
1-x	+	-
x	-	+
$\frac{1-x}{x}$	-	+

$$x \in (0, 1]$$

$$D_{f \circ g} = (0, 1]$$

Ασκήση 2

$$f(x) = \frac{\ln x}{\ln x - 1}$$

$$D_f = (e, +\infty)$$

$$\underline{f(x_1) = f(x_2)} \quad (\Rightarrow) \quad \frac{\ln x_1}{\ln x_1 - 1} = \frac{\ln x_2}{\ln x_2 - 1}$$

$$\ln x_1 (\ln x_2 - 1) = \ln x_2 (\ln x_1 - 1)$$

$$\cancel{\ln x_1} \cancel{\ln x_2} - \ln x_1 = \cancel{\ln x_2} \cancel{\ln x_1} - \ln x_2$$

$$\ln x_1 = \ln x_2$$

$$\underline{x_1 = x_2}$$

Άρα f είναι 1-1 τότε αντιστρέφει

$$f(x) = y$$

$$y = \frac{\ln x}{\ln x - 1}$$

$$y(\ln x - 1) = \ln x$$

$$y \ln x - y = \ln x$$

$$y \ln x - \ln x = y$$

$$\ln x (y - 1) = y$$

$$\ln x = \frac{y}{y - 1}$$

$$y \neq 1$$

$$e^{\ln x} = e^{\frac{y}{y-1}}$$

$$x = e^{\frac{y}{y-1}}$$

$$f^{-1}(y) = e^{\frac{y}{y-1}}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = e^{\frac{x}{x-1}}$$

Opwł

$$x > e$$

$$e^{\frac{y}{y-1}} > e$$

$$\frac{y}{y-1} > 1$$

$$\frac{y}{y-1} - 1 > 0$$

$$\frac{y}{y-1} - \frac{y-1}{y-1} > 0$$

$$\frac{y - y + 1}{y-1} > 0$$

$$\frac{1}{y-1} > 0$$

$$y-1 > 0$$

$$D_{f^{-1}} = (1, +\infty)$$

$$y > 1$$

Алгебра 3

$$\textcircled{a} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 2x^2}{5x - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{5x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{5} = +\infty$$

$$\textcircled{b} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 6x + 9} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x(x-2)}{(x-3)^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} x(x-2) \cdot \frac{1}{(x-3)^2} = 3 \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\textcircled{r} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^4 - 1} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - 3x + 2)}{(x^2 - 1)(x^2 + 1)}$$

1	-2	-1	2	$\textcircled{-1}$
↓	-1	3	-2	
1	-3	2	0	

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\cancel{(x+1)}(x-2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\cancel{(x+1)}(x^2+1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{x^2+1} = \frac{-3}{2}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x}{x^3 + x - 2} \quad \left(\frac{0}{0} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-5)}{(x-1)(x^2+x+2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-5)}{x^2+x+2} \cdot \frac{1}{x-1}$$

x	1
x-1	-0+

$$= \frac{-4}{4} \cdot \infty$$

$$= -1 \cdot \infty$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x(x-5)}{x^2+x+2} \cdot \frac{1}{x-1} = (-1) \cdot (-\infty) = +\infty$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-5)}{x^2+x+2} \cdot \frac{1}{x-1} = (-1) \cdot (+\infty) = -\infty$$

10

opw der vbxpx1

$$\textcircled{\varepsilon}. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x - 2} - 2x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 3x - 2} - 2x)(\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 2x)}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cancel{\sqrt{x^2 - 3x - 2}} - (2x)^2}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x - 2 - 4x^2}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 - 3x - 2}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} + 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(-3 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}\right)}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}\right)} + 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(-3 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} \right)}{x \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 2x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(-3 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} \right)}{\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 2}$$

$$= \frac{+\infty (-3)}{3} = (-1)(+\infty) = -\infty$$

B' трон

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x - 2} - 2x =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} \right)} - 2x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{1 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}} - 2x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{1 - \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2}} - 2 \right)$$

$$= +\infty (-1) = -\infty,$$

$$(7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + nx}{x^4 + 1} \quad \begin{matrix} \text{np } \infty \\ \text{np } \infty \end{matrix}$$

$$-1 \leq nx \leq 1$$

$$\boxed{x^4 - 1 \leq x^4 + nx \leq x^4 + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 + 1 = +\infty$$

Ans

$$\text{K. P. } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 + nx = +\infty,$$

$$\textcircled{n} \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \delta w \frac{1}{x} \stackrel{\delta w \delta}{\stackrel{x \delta \delta w}{=}}$$

$$-1 \leq \delta w \frac{1}{x} \leq 1$$

$$\left| \delta w \frac{1}{x} \right| \leq 1$$

$$|x^3| \left| \delta w \frac{1}{x} \right| \leq 1 \cdot |x^3|$$

$$\left| x^3 \delta w \frac{1}{x} \right| \leq |x^3|$$

$$-|x^3| \leq x^3 \delta w \frac{1}{x} \leq |x^3|$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} -|x^3| = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x^3| = 0$$

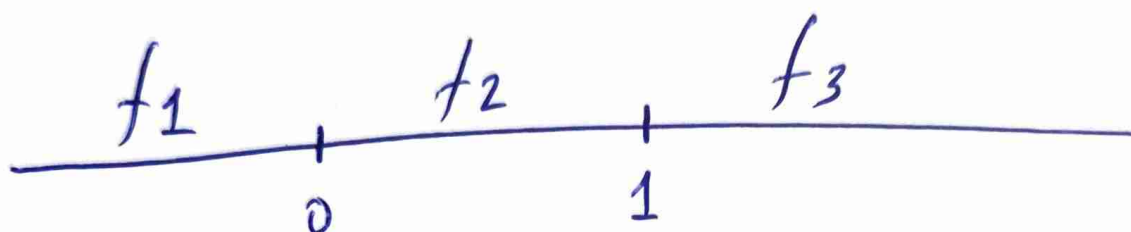
} Ans k. D

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \delta w \frac{1}{x} = 0$$

Ασκηση

Συνεχώς

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x & , \quad x \leq 0 \\ 2x - 4 & , \quad 0 < x < 1 \\ x - 3 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$



Είναι η f συνεχής στο 0;

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 - x = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Το όριο} \\ \text{δω} \\ \text{υπάρχει} \end{array} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x - 4 = -4 \quad \text{απο η } f$$

δω είναι
συνεχώς
στο 0.

Einsetzen 1;

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x - 4 = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x - 3 = -2 \end{array} \right\}$$

Also $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$

$$f(1) = 1 - 3 = -2$$

$$f(1) = -2$$

Also $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$

H $f(x)$ 1.

Είμαι η $f(x)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$;

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$
και $(0, +\infty)$ ως παρακάτω συνεχώς
συναρτήσεις.

Δεν είναι ομαλή συνεχής στο 0
αρα ούτε στο $\mathbb{R}$.

Είμαι η $f(x)$ συνεχής στο $(0, +\infty)$;

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$
ως παρακάτω συνεχώς
συναρτήσεις.

Είναι η $f(x)$ συνεχής στο $[0,1]$;

Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $(0,1)$ ως
π. δ. δ

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -2 \end{array} \right\} \neq \text{ΟΧΙ συνεχής στο } [0,1]$$

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = -2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -2 \end{array} \right\} \checkmark$$

Προσδοχ

Αν ο συνολ. ηταν

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & x < 0 \\ 2x - 4, & 0 \leq x < 1 \\ x - 3, & x \geq 1 \end{cases}$$

Тоже n $f(x)$ δu ∂u n ∂u

δu δu δu δu

∂u δu δu

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

∂u ∂u ∂u ∂u

δu $[0, 1]$

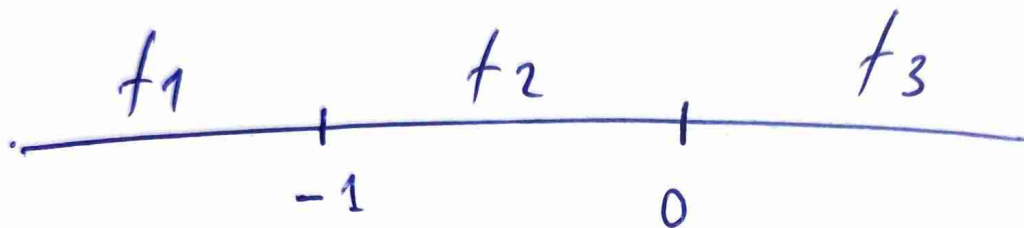
10.

 $\sum w(x)$!

ΕΥΟΤΗΤΗ

11

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+1} + \alpha x - 2, & x \leq -1 \\ 2x^2 - \beta, & -1 < x < 0 \\ \beta \ln x - 7 \sin x + 2 \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} e^{x+1} + \alpha x - 2 = 1 - \alpha - 2 = \underline{\underline{-1 - \alpha}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 2x^2 - \beta = \underline{\underline{2 - \beta}}$$

$$-1 - \alpha = 2 - \beta$$

$$\underline{\underline{\beta - \alpha = 3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x^2 - B = -B$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} B \ln x - 7 \sin x + 2 \ln(x+1)$$

$$\rightarrow 0 - 7 + 0$$

$$= -7$$

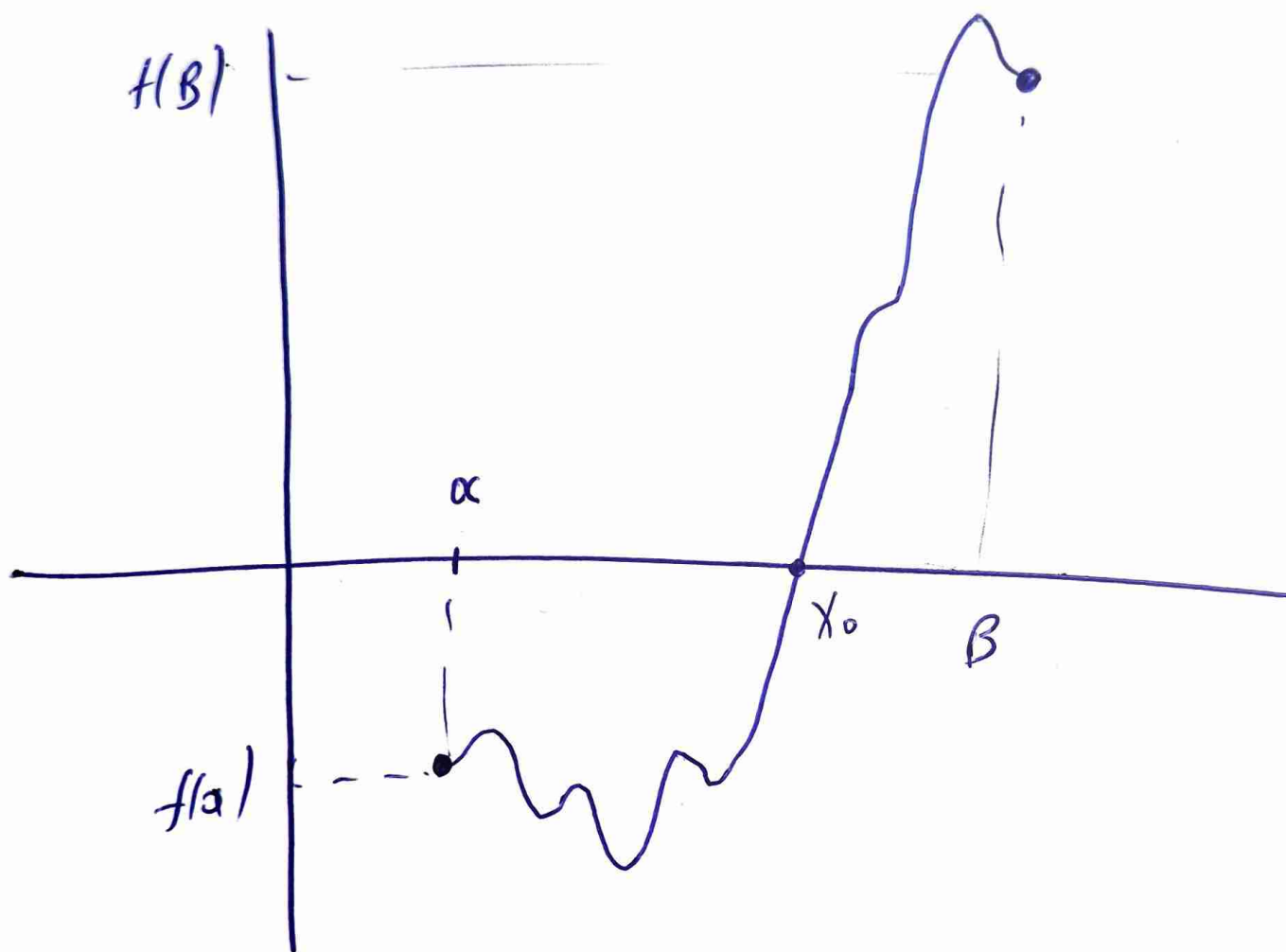
$$-B = -7$$

$$B = 7$$

$$7 - a = 3$$

$$a = 4$$

Το Θεώρημα του Bolzano



Έστω f συνάρτηση

• συνεχής στο $[a, b]$

• $f(a) \cdot f(b) < 0$

Τότε υπάρχει **τουλάχιστον**
ένα $x_0 \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = 0$$

Δηλαδή η $f(x)$ τέμνει τον

x - x τουλάχιστον μία φορά

3. Δίνεται $f(x) = e^x + x - 2$

Ενότητες

12

Να δο η εξίσωση $e^x = 2 - x$
εχ η τουλάχιστων μια ρίζη
στο $(0, 1)$

Η $f(x)$ είναι συνεχής $[0, 1]$ ως η. σ. σ

$$f(0) = e^0 + 0 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$$

$$f(1) = e^1 + 1 - 2 = e - 1 > 0$$

$$\text{Άρα } f(0) \cdot f(1) < 0$$

Από Bolzano $\exists x_0 \in (0, 1)$

$$\text{Τ.ω } f(x_0) = 0$$

$$e^{x_0} + x_0 - 2 = 0$$

$$e^{x_0} = 2 - x_0$$

4. (b) $e^{x-2} = 2-x$ (1,2)

$$e^{x-2} - 2 + x = 0$$

$$\boxed{f(x) = e^{x-2} - 2 + x}$$

H $f(x)$ είναι συνεχής στο $[1,2]$

ως Π. Σ. Σ

$$f(1) = e^{1-2} - 2 + 1 = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 < 0$$

$$f(2) = e^{2-2} - 2 + 2 = 1 > 0$$

$f(1)f(2) < 0$ από Bolzano

$$\exists \xi \in (1,2) \text{ τ.ω } f(\xi) = 0$$

$$e^{\xi-2} - 2 + \xi = 0$$

$$e^{\xi-2} = 2 - \xi \quad \checkmark$$

6. ③ NĐ0 $\exists \alpha \in (0, n)$ t.w

$$\mu \alpha = \alpha - 1$$

$$\boxed{\mu x = x - 1}$$

$$\mu x - x + 1 = 0$$

$$\boxed{f(x) = \mu x - x + 1}$$

H $f(x)$ swexl sw $[0, n]$

w/ n.đ.đ

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 > 0 \\ f(n) = 1 - n < 0 \end{array} \right\} f(0)/f(n) < 0$$

Bolzano $\exists \alpha \in (0, n)$ t.w

$$f(\alpha) = 0$$

$$\mu \alpha = \alpha - 1$$

7. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής

$$f(\mathbb{R}) = (1, 2]$$

Νόμο η επίσυντη $f(x) = 2 - x$ $\exists x \forall$

Τούτ. πλν $(0, 1)$

Επεξεργασία

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

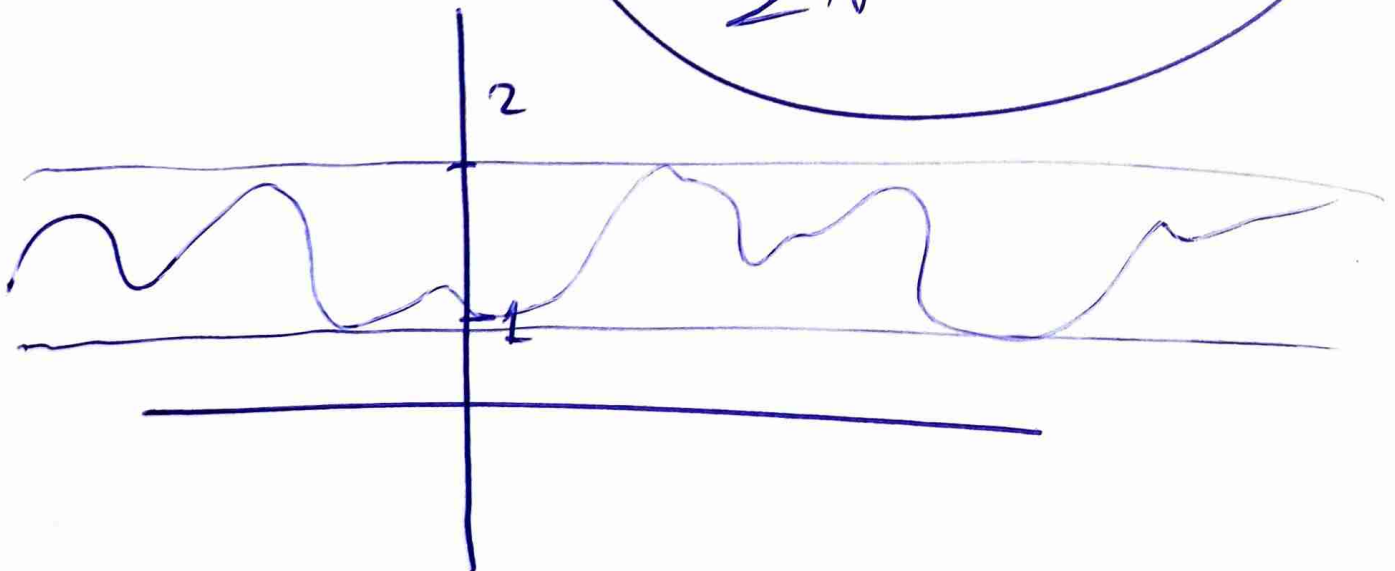
$$D_f = \mathbb{R}$$

Δεν υπάρχουν υποσύνολα!

$$f(\mathbb{R}) = (1, 2]$$

$$D_f = \mathbb{R}$$

$$\Sigma T_f = (1, 2]$$



$$f(x) = 2 - x \quad (0, 1)$$

$$\underbrace{f(x) - 2 + x}_{h(x)} = 0$$

H $h(x)$ swacht $[0, 1]$ w/ n. v. s.

$$\left. \begin{array}{l} h(0) = f(0) - 2 < 0 \\ h(1) = f(1) - 1 > 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} h(0)/h(1) < 0 \\ \text{Bolzano } \exists \xi \in (0, 1) \\ \text{t.v. } h(\xi) = 0 \end{array}$$

$$T_0 \quad \Sigma T_t = (1, 2)$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{1 < f(x) < 2 \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

$$1 < f(0) < 2$$

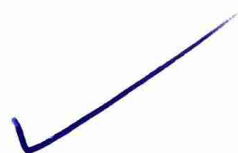
$$1 < f(1) < 2$$

$$-1 < f(0) - 2 < 0$$

$$0 < f(1) - 1 < 1$$

$$h(\xi) - 2 + \xi = 0$$

$$h(\xi) = 2 - \xi$$



11. (B) Νόσ η εξίσωση

$$e^x + 3x = 2$$

εχει μοναδικη ριζα (0,1)

$$\underbrace{e^x + 3x - 2 = 0}_{f(x)}$$

H $f(x)$ συνεχής $[0,1]$ ul π.σ.σ

$$f(0) = e^0 + 3 \cdot 0 - 2 = -1 < 0$$

$$f(1) = e^1 + 3 \cdot 1 - 2 = e + 1 > 0$$

$f(0) f(1) < 0$ Bolzano $\exists x_0 \in (0,1)$

T.W $f(x_0) = 0$.

$$\underline{\underline{e^{x_0} + 3x_0 = 2}}$$

Μονotonia $f(x)$
• $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$ (+)
• $x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 - 2 < 3x_2 - 2$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

f ↗

αρι το x_0
μοναδικη

Επορώ Μαθημα

Παρασκευή

10:30

Ενοτήτα 11

④ α γ

⑤ α β

⑦ α β γ

⑧

⑨

Σύμφων

Δίνεται

$$f(x) = \ln(x-1), \quad x > 1$$

$$g(x) = \frac{x-1}{x}, \quad x \geq 1$$

→ Βρίτ $f \circ g$, $g \circ f$.

→ Νόο η $g(x)$ αντιστρέφεται
και να Βρίτ $g^{-1}(x)$.

→ Νόο η f αντιστρέφεται
και να Βρίτ $f^{-1}(x)$