ΘΕΜΑ 2

Η διαίρεση ενός πολυωνύμου $P(x)$ με το $x-3$ έχει πηλίκο x^2+2 και υπόλοιπο 4.

α) Να γράψετε την ταυτότητα της παραπάνω διαίρεσης.

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $P(x)=x^3-3x^2+2x-2$.

(Μονάδες 8)

γ) Είναι το $x=3$ ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

α $P(x)=(x-3)(x^2+2)+4$

β $P(x)= \ldots = x^3-3x^2+2x-2$

γ $P(3)\neq 0$ ✓

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 + 7x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν το πολυώνυμο έχει και άλλη ακέραια ρίζα.

(Μονάδες 15)

α) $P(1) = 0$

β) $\dfrac{-2}{\pm 1 \quad \pm 2}$

$P(-1) \neq 0$

$P(2) = 0$ Το 2, 1

$P(-2) \neq$

ακεραια ριζα.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2(x-1)^{20}-3(x-1)^{10}+5x^2-3x-2$.

α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$.

(Μονάδες 10)

β)

i. Να υπολογίσετε την τιμή $P(0)$.

(Μονάδες 5)

ii. Είναι το x παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

α) $P(1)=0$

β) i) $P(0)=-3$

ii) Για να είναι παράγοντας το x πρέπει $P(0)=0$ όμως $P(0)=-3$.

άρα δεν είναι.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2x - 3, x \in R$.

α) Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $(x + 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $P(x) + 6 = 0$.

(Μονάδες 12)

α)

1	0	2	-3	-1
↓	-1	1	-3	
1	-1	3	-6	

$P(x) = (x+1)(x^2 - x + 3) - 6$

β) $(x+1)(x^2 - x + 3) - 6 + 6 = 0$

$(x+1)(x^2 - x + 3) = 0$

$\Delta < 0$,

$x = -1$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3+x^2-x-1$.

α) Να παραγοντοποιήσετε το $P(x)$.

(Μονάδες 10)

β) Αν $P(x)=(x+1)^2(x-1)$ να λύσετε την ανίσωση $P(x)\geq 0$.

(Μονάδες 15)

α)

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ \downarrow & 1 & 2 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \end{array}$$

$P(x)=(x-1)(x^2+2x+1)$

$$\boxed{P(x)=(x-1)(x+1)^2}$$

β) $(x-1)(x+1)^2\geq 0$

$x-1\geq 0$

$\underline{\underline{x\geq 1}}$

$x\in\{-1\}\cup[1,+\infty)$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 3x^3 - x^2 - x + 2$.

α) Να κάνετε τη διαίρεση $P(x) : (x-1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 10)

β) Αν $P(x) = (x-1)(3x^2+2x+1)+3$ να λύσετε την ανίσωση $P(x) < 3$.

(Μονάδες 15)

(α)

3	-1	-1	2	1
↓	3	2	1	
3	2	1	3	

$$\boxed{P(x) = (x-1)(3x^2+2x+1) + 3}$$

(β) $P(x) < 3$

$(x-1)(3x^2+2x+1) \cancel{+3} < \cancel{3}$

$(x-1)(3x^2+2x+1) < 0$

x		1	
x-1	−		+
$3x^2+2x+1$	+		+
Q(x)	−		+

$x \in (-\infty, 1)$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι το 1 και το −1 δεν είναι ρίζες του πολυωνύμου.

(Μονάδες 10)

β) Να κάνετε τη διαίρεση του $P(x):(x^2 + x - 1)$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης.

(Μονάδες 15)

α) $P(1) = 1 \neq 0$

$P(-1) = -2 + 1 + 3 + 1 = 3 \neq 0$.

β)

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 + x^2 - 3x + 1 & x^2 + x - 1 \\ \hline -(2x^3 + 2x^2 - 2x) & 2x - 1 \\ \hline -x^2 - x + 1 & \\ -(-x^2 - x + 1) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$P(x) = (x^2 + x - 1)(2x - 1)$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2$.

α) Να αποδείξετε ότι το $x - 1$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου.

(Μονάδες 12)

β) Αν $P(x) = (x-1)\cdot(x^2 - x + 2)$, να βρείτε για ποιες τιμές του x είναι $P(x) > 0$.

(Μονάδες 13)

α) $P(1) = 0$

β)

x		1	
$x-1$	$-$	0	$+$
x^2-x+2	$+$		$+$
$P(x)$	$-$		$+$

$x \in (1, +\infty)$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-8x^2+7x-1$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει ρίζα τον αριθμό 1.

(Μονάδες 9)

β) Έστω $Q(x)$ πολυώνυμο το οποίο δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.

i. **Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $R_1(x)=P(x)+Q(x)$ δεν έχει ρίζα τον αριθμό 1.**

(Μονάδες 8)

ii. **Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $R_2(x)=P(x)\cdot Q(x)$ έχει ρίζα τον αριθμό 1.**

(Μονάδες 8)

α) $P(1)=0$

β) Γνωρίζω ότι $Q(1)\neq 0$

i) $R_1(1)=P(1)+Q(1)=0+Q(1)\neq 0$

$R_1(1)\neq 0$ ✓

ii) $R_2(1)=P(1)\cdot Q(1)=0\cdot Q(1)=0$

$R_2(1)=0$ ✓

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε οτι η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ακέραιες ρίζες.

(Μονάδες 12)

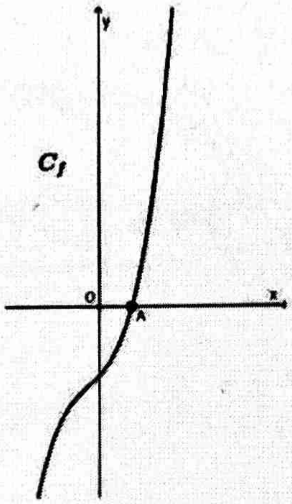
β) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

i. **Να δικαιολογήσετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ρίζα.**

(Μονάδες 04)

ii. **Να αποδείξετε ότι η ρίζα αυτή βρίσκεται στο διάστημα $(0,1)$.**

(Μονάδες 09)



α) $\dfrac{-1}{\pm 1}$ παρατηρω οτι $f(1) \neq 0$

$f(-1) \neq 0$

αρα δεν εχει ριζα ακεραια.

Β) i) Παρατηρω οτι η $f(x)$ τεμνει τον $x'x$ μοναδικη φορα.

ii) $\left.\begin{aligned} f(0) &= -1 \\ f(1) &= 3 \end{aligned}\right\} f(0)f(1) < 0.$

ΘΕΜΑ 2

Δίδεται το πολυώνυμο $P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$.

α) Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Ποιο είναι το πηλίκο $\pi(x)$ και το υπόλοιπο $\upsilon(x)$ που προκύπτει από την διαίρεση $P(x):(x-2)$;

(Μονάδες 13)

α) 3ου

β) $\dfrac{P(x)}{x-2} = \dfrac{(x-1)\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{x-2}} = (x-1)(x-3)$

$\pi(x) = (x-1)(x-3)$

$\upsilon(x) = 0.$

ΘΕΜΑ 2

Δίδεται το πολυώνυμο $P(x) = (x - 2) \cdot (x^6 + 1)$.

α) Ποιος είναι ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε όλες τις ρίζες του πολυωνύμου $P(x)$.

(Μονάδες 13)

α) 7ου Βαθμου γιατι $P(x) = x^7 + x - 2x^6 - 2$

Β) $P(x) = 0$

$\Rightarrow x - 2 = 0$ ή $x^6 + 1 = 0$

$x = 2$ Αδυνατη

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=x^3-2x^2-2x+4$.

α) Δίνεται ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει μοναδική ακέραια ρίζα. Να προσδιορίσετε τη μοναδική ακέραια ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε όλες τις ρίζες του $P(x)$ και να το γράψετε ως γινόμενο πρωτοβαθμίων παραγόντων.

(Μονάδες 13)

α $\dfrac{4}{\pm1\ \pm2\ \pm4}$

1	−2	−2	4	2
↓	2	0	−4	
1	0	−2	0	

$P(x)=(x-2)(x^2-2)$

β $P(x)=0$

$x-2=0$ ή $x^2-2=0$

$x=2$ $\quad x=\sqrt{2}$ $\quad x=-\sqrt{2}$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^3 + 2x^2 + x + 3$.

α) Να δείξετε ότι το -2 δεν είναι ρίζα του πολυωνύμου.

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης $P(x):(x+2)$

(Μονάδες 10)

γ) Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x+2)$.

(Μονάδες 07)

α) $P(-2) = 1 \neq 0$

β)

1	2	1	3	-2
↓	-2	0	-2	
1	0	1	1	

$\pi(x) = x^2 + 1$

$\upsilon(x) = 1$.

γ) $P(x) = (x+2)(x^2+1) + 1$.

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-3x^2-11x+6$.

α)

i. Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-3$.

(Μονάδες 7)

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης $P(x):(x-3)$

(Μονάδες 7)

β) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-3)(2x-1)$.

(Μονάδες 11)

α) i)

2	-3	-11	6	3
↓	6	9	-6	
2	3	-2	0	

ii) $P(x) = (x-3)(2x^2+3x-2)$

β) $P(3) = 0$

$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 11\frac{1}{2} + 6 = 0$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-x^2-8x+4$.

α)

i. Να βρείτε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x):(x-2)$.

(Μονάδες 10)

ii. Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-2)$.

(Μονάδες 9)

β) Αν $P(x)=(2x-1)(x^2-4)$, να λύσετε την εξίσωση $P(x)=0$.

(Μονάδες 6)

α) i)

2	−1	−8	4	2
↓	4	6	−4	
2	3	−2	0	

$\pi(x)=2x^2+3x-2$

$υ(x)=0$.

ii) $P(x)=(x-2)(2x^2+3x-2)$

β) $P(x)=0 \Rightarrow (2x-1)(x^2-4)=0$

$2x-1=0$ ή $x^2-4=0$

$x=\frac{1}{2}$ $\quad x=2$ $\quad x=-2$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=2x^3-x^2-2x+1$. Να αποδείξετε ότι

α) το $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-1$ και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $P(x):(x-1)$.

(Μονάδες 6)

β) $P(x)<0$ για κάθε $x\in(-\infty,-1)\cup(\frac{1}{2},1)$.

(Μονάδες 7)

γ) $\frac{1}{2}<\sigma\upsilon\nu\theta<1$ για κάθε γωνία $\theta\in(0,\frac{\pi}{3})$.

(Μονάδες 6)

δ) $P(\sigma\upsilon\nu\theta)<0$ για κάθε γωνία $\theta\in(0,\frac{\pi}{3})$.

(Μονάδες 6)

(α) $P(1)=0$

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & -2 & 1 & 1 \\ & 2 & 1 & -1 & \\ \hline 2 & 1 & -1 & 0 & \end{array}$$

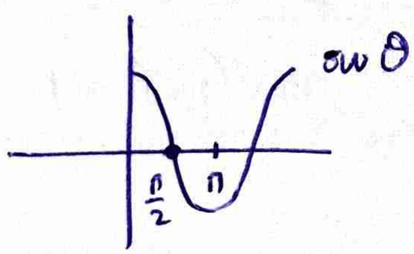
$P(x)=(x-1)(2x^2+x-1)$

(β)

x		-1		$\frac{1}{2}$		1	
$x-1$	$-$		$-$		$-$	0	$+$
$2x^2+x-1$	$+$	0	$-$	0	$+$		$+$
$P(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$

$x\in(-\infty,-1)\cup(\frac{1}{2},1)$

(γ)



$0<x<\frac{\pi}{3}$

$\sigma\upsilon\nu 0>\sigma\upsilon\nu x>\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}$

$1>\sigma\upsilon\nu x>\frac{1}{2}$.

(δ) Όταν το $\theta\in(0,\frac{\pi}{3})$ το $\sigma\upsilon\nu\theta\in(\frac{1}{2},1)$

άρα $P(\sigma\upsilon\nu\theta)<0$ γιατί το $P(x)<0$ $\forall x\in(\frac{1}{2},1)$.

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται γωνία x με $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ και οι παραστάσεις:

$A = \etaμ^2(\pi - x) + \etaμ^2(\pi + x) + συν^2(-x)$,

$B = \frac{\etaμx}{1+συνx} + \frac{1+συνx}{\etaμx}$.

α) Να αποδείξετε ότι $A = \etaμ^2x + 1$.

(Μονάδες 08)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση B.

(Μονάδες 08)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x για την οποία οι παραστάσεις Α και Β να είναι ίσες.

(Μονάδες 09)

α) $A = \etaμ^2(\pi - x) + \etaμ^2(\pi + x) + συν^2(-x)$

$A = \etaμ^2x + \underbrace{\etaμ^2x + συν^2x}$

$\boxed{A = \etaμ^2x + 1}$

β) $B = \frac{\etaμx}{1+συνx} + \frac{1+συνx}{\etaμx} = \frac{\etaμ^2x + (1+συνx)^2}{\etaμx(1+συνx)}$

$B = \frac{\etaμ^2x + 1 + 2συνx + συν^2x}{\etaμx(1+συνx)} = \frac{2+2συνx}{\etaμx(1+συνx)}$

$B = \frac{2\cancel{(1+συνx)}}{\etaμx\cancel{(1+συνx)}} \Rightarrow B = \frac{2}{\etaμx}$

γ) $A = B \Leftrightarrow \etaμ^2x + 1 = \frac{2}{\etaμx} \Rightarrow \etaμ^3x + \etaμx = 2$

$\etaμ^3x + \etaμx - 2 = 0$.

$$\eta\mu^3 x + \eta\mu x - 2 = 0$$

$$\eta\mu x = t$$

$$t^3 + t - 2 = 0$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ \downarrow & 1 & 1 & 2 & \\ 1 & 1 & 2 & 0 & \end{array}$$

$$(t-1)(t^2+t+2) = 0$$

$$\Delta < 0$$

$$t = 1$$

$$\eta\mu x = 1$$

$$x \in \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \rightarrow 4ο$$

Αδύνατη

$$\eta\mu x < 0$$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^4 + 6x^2 - 7$.

α) Να δείξετε ότι το πολυώνυμο x-1 είναι παράγοντας του πολυωνύμου P(x).

(Μονάδες 5)

β) Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο P(x) σε πολυώνυμα πρώτου ή δευτέρου βαθμού.

(Μονάδες 8)

γ)

i. Να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0. (Μονάδες 5)

ii. Αν οι αριθμοί -1 και 1 είναι οι ρίζες της εξίσωσης P(x)=0, να λύσετε την εξίσωση

$(2ημx - 1)^4 + 6(2ημx - 1)^2 - 7 = 0$, για $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

α) $P(1) = 1 + 6 - 7 = 0$

β)

1	0	6	0	-7	1
↓	1	1	7	7	
1	1	7	7	0	

$P(x) = (x-1)(x^3 + x^2 + 7x + 7)$

$P(x) = (x-1)(x^2(x+1) + 7(x+1))$

$\boxed{P(x) = (x-1)(x+1)(x^2+7)}$

γ) i) $(x-1)(x+1)(x^2+7) = 0$

$x = 1$ $x = -1$

ii) Θέτω $2ημx - 1 = t \rightarrow t^4 + 6t^2 - 7 = 0$

$t = 1$

$2ημx - 1 = 1$

$2ημx = 2$

$ημx = 1$

$ημx = ημ\frac{\pi}{2}$

$x = 2κπ + \frac{\pi}{2}$

$t = -1$

$2ημx - 1 = -1$

$2ημx = 0$

$ημx = 0$

$x = 2κπ$

$x = 2κπ + \pi$

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x)=3x^3+4x^2-5x-2$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του πολυωνύμου.

(Μονάδες 5)

β) Να λύσετε την ανίσωση $P(x)>0$.

(Μονάδες 9)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $3\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^3+4\left(\frac{5}{x^2+1}\right)^2-5\left(\frac{5}{x^2+1}\right)-2>0$.

(Μονάδες 11)

α)

3	4	−5	−2	1
↓	3	7	2	
3	7	2	0	

$(x-1)(3x^2+7x+2)=0$

$x=1$ $\quad \Delta=49-24=25$

$x=\frac{-7\pm 5}{6}$ $\quad -\frac{1}{3}$, -2

β)

x	-2	$-1/3$	1	
$x-1$	−	−	−	0 +
$3x^2+7x+2$	+ 0	− 0	+	+
$P(x)$	−	+	−	+

$x\in(-2,-\frac{1}{3})\cup(1,+\infty)$.

γ) Θέτω $\frac{5}{x^2+1}=t \Rightarrow 3t^3+4t^2-5t-2>0$

$P(t)>0$

$t\in(-2,-\frac{1}{3})\cup(1,+\infty)$

$-2<t<-\frac{1}{3}$ ή $t>1$

$-2<\frac{5}{x^2+1}<-\frac{1}{3}$ Άτοπο! $\qquad \frac{5}{x^2+1}>1 \Rightarrow 5>x^2+1$

$x^2-4<0$

$x\in(-2,2)$