

ΘΕΜΑ 2

Η ευθεία  $y = \alpha x + \beta$  με  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο σημείο  $A(0, -2)$  και διέρχεται από το σημείο  $B(-2, -4)$ .

α) Να βρείτε τους αριθμούς  $\alpha, \beta$ .

(Μονάδες 12)

β) Για  $\alpha = 1$  και  $\beta = -2$ , να βρείτε για ποιες τιμές του  $x$  η ευθεία βρίσκεται κάτω από τον  $x'x$  άξονα.

(Μονάδες 13)

α)  $y = \alpha x + \beta$

→  $A(0, -2)$

→  $B(-2, -4)$

$$-2 = \alpha \cdot 0 + \beta$$

$$\underline{\underline{-2 = \beta}}$$

$$\boxed{y = x - 2}$$

$$y < 0$$

β)  $x - 2 < 0$

$$\underline{\underline{x < 2}}$$

$$y = \alpha x - 2$$

$$-4 = -2\alpha - 2$$

$$2\alpha = 4 - 2$$

$$2\alpha = 2$$

$$\boxed{\alpha = 1}$$

ΘΕΜΑ 2

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο  $x^2 - 5x + 6$ .

(Μονάδες 12)

β) Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x-2}{x^2-5x+6}$ .

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού  $A$  της συνάρτησης.

(Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x \in A$  ισχύει  $f(x) = \frac{1}{x-3}$ .

(Μονάδες 8)

$$\textcircled{a} \quad x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2)$$

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$

$$x = \frac{5 \pm 1}{2} \begin{cases} \textcircled{3} \\ \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{b} \quad \text{i) Πρηνυ } x^2 - 5x + 6 \neq 0 \\ x \neq 2 \quad x \neq 3$$

$$A_f = \mathbb{R} - \{2, 3\}$$

$$\text{ii). } f(x) = \frac{\cancel{x-2}}{(x-3)\cancel{(x-2)}} = \frac{1}{x-3}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^3 - 16x}{x - 4}$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$  και να αποδείξετε ότι, για τα  $x$  που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της, ισχύει ότι  $f(x) = x^2 + 4x$ .  
(Μονάδες 15)

β) Να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες ισχύει  $f(x) = 32$ .  
(Μονάδες 10)

α) Πραγμα  $x - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$

$$A_f = \mathbb{R} - \{4\}$$

$$f(x) = \frac{x(x^2 - 16)}{x - 4} = \frac{x(x-4)(x+4)}{x-4} \Rightarrow$$

$$f(x) = x(x+4)$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 + 4x$$

β)  $f(x) = 32$

$$x^2 + 4x = 32$$

$$x^2 + 4x - 32 = 0$$

$$x = -8$$

$$x = 4$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$ .

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:  $A = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) - f(2)$ .

(Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση  $f(x) = \frac{5}{2}$ .

(Μονάδες 15)

$$\textcircled{\alpha} \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + 2 = \frac{1}{2} + \frac{4}{2} = \frac{5}{2}$$

$$f(1) = 1 + 1 = 2$$

$$f(2) = 2 + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

$$A = \frac{5}{2} + 2 - \frac{5}{2}$$

$$\underline{\underline{A = 2}}$$

$$\textcircled{\beta} \quad f(x) = \frac{5}{2}$$

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$$

$$2x^2 + 2 = 5x$$

$$2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\Delta = 25 - 16 = 9$$

$$x = \frac{5 \pm 3}{4} \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , με  $f(x) = \begin{cases} 8-x, & \text{αν } x < 0 \\ 2x+5, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι  $f(-5) = f(4)$ .

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις τιμές του  $x \in \mathbb{R}$ , ώστε  $f(x) = 9$ .

(Μονάδες 12)

$$\textcircled{\alpha} \quad f(-5) = 8 - (-5) = 8 + 5 = 13$$

$$f(4) = 2 \cdot 4 + 5 = 13$$

$$\Rightarrow f(-5) = f(4)$$

$$\textcircled{\beta} \quad \frac{x < 0}{\quad}$$

$$f(x) = 9$$

$$8 - x = 9$$

$$\underline{\underline{-1 = x}}$$

$$\frac{x \geq 0}{\quad}$$

$$f(x) = 9$$

$$2x + 5 = 9$$

$$2x = 4$$

$$\underline{\underline{x = 2}}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = ax + b$ , με  $a, b \in \mathbb{R}$ , για την οποία ισχύει:

$$f(0) = 5 \text{ και } f(1) = 3.$$

α) Να αποδείξετε ότι  $a = -2$  και  $b = 5$ .

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα σημεία, στα οποία η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ .

(Μονάδες 7)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 8)

$$\textcircled{\alpha} \quad \begin{aligned} f(0) &= a \cdot 0 + b \\ 5 &= b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(1) &= a \cdot 1 + b \\ 3 &= a + 5 \\ a &= -2 \end{aligned}$$

$$f(x) = -2x + 5$$

$$\textcircled{\beta} \quad \begin{aligned} \frac{x'x}{f(x) = 0} \\ -2x + 5 = 0 \end{aligned}$$

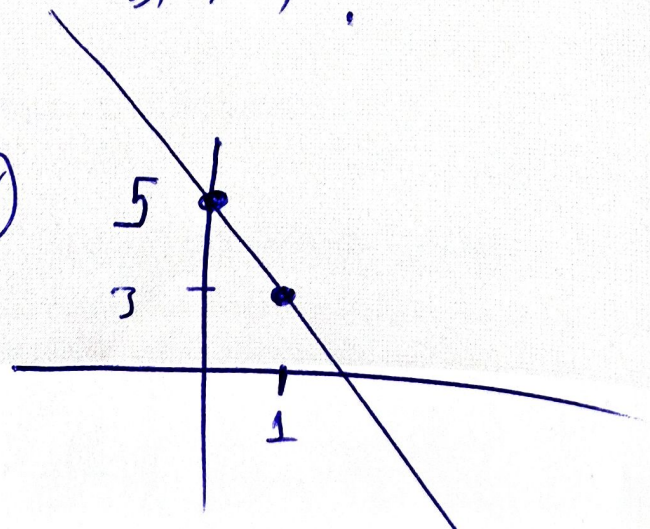
$$2x = 5$$

$$x = \frac{5}{2}$$

$$A\left(\frac{5}{2}, 0\right)$$

$$\begin{aligned} \frac{y'y}{f(0) = 5} \\ B(0, 5) \end{aligned}$$

γ)



ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $f$ .

(Μονάδες 5)

β)

i. Να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες ισχύει  $f(x) = 0$ .

(Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τις τιμές  $f(0)$  και  $f(3)$ .

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής παράστασης της  $f$  με τους άξονες.

(Μονάδες 8)

α) Πρέπει  $x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

$A_f = \mathbb{R} - \{2\}$ .

β) i)  $f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 1}{x - 2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0$   
 $x^2 = 1$

$x = 1$        $x = -1$

ii)  $f(0) = \frac{0^2 - 1}{0 - 2} = \frac{1}{2}$

$f(3) = \frac{3^2 - 1}{3 - 2} = \frac{8}{1} = 8$

γ)  $\frac{x'x}{f(x) = 0}$   
 $x = 1$        $x = -1$

$A(1, 0)$        $B(-1, 0)$

$\frac{y'y}{f(0) = \frac{1}{2}}$

$\Gamma(0, \frac{1}{2})$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = x^2 + 2x - 15$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα  $f(-5) + f(0) + f(3)$ .

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τα κοινά σημεία της γραφικής της παράστασης της  $f$  με τους άξονες.

(Μονάδες 15)

$$\textcircled{\alpha} f(-5) + f(0) + f(3) = -15$$

$$\rightarrow f(-5) = 25 - 10 - 15 = 0$$

$$f(0) = -15$$

$$f(3) = 0$$

$$\textcircled{\beta} \frac{x'x}{f(x) = 0}$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$x = -5$$

$$x = 3$$

$$\frac{y'y}{f(0) = -15}$$

$$A(0, -15)$$

$$B(-5, 0) \quad f(3, 0)$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f$ , με τύπο  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ .

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του πραγματικού αριθμού  $\alpha$ , ώστε το σημείο  $M\left(\alpha, \frac{1}{8}\right)$  να ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 12)

α) Πρέπει  $x^2 - 1 \neq 0$

$$x^2 \neq 1$$

$$x \neq 1$$

$$x \neq -1$$

$$A_f = \mathbb{R} - \{1, -1\}$$

β)  $\frac{1}{8} = \frac{1}{\alpha^2 - 1}$

$$\alpha^2 - 1 = 8$$

$$\alpha^2 = 9$$

$$\alpha = 3$$

$$\alpha = -3$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \frac{x+2}{x^2-x-6}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $f$ .

(Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι:  $f(2) + f(4) = 0$ .

(Μονάδες 10)

α) πρώτα  $x^2 - x - 6 \neq 0$   
 $\Delta = 1 + 24 = 25$   
 $x = \frac{1 \pm 5}{2}$  ⎧  $\textcircled{3}$   
 $\textcircled{-2}$   
 $A_f = \mathbb{R} - \{3, -2\}$

β)  $f(x) = \frac{\cancel{x+2}}{(x-3)\cancel{(x+2)}} = \frac{1}{x-3}$

$$f(2) = \frac{1}{2-3} = -1$$

$$f(4) = \frac{1}{4-3} = 1$$

$$f(2) + f(4) = -1 + 1 = 0.$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση:  $f(x) = \begin{cases} 2x+4, & x < 0 \\ x-1, & x \geq 0 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι  $f(-1) = f(3)$ .

(Μονάδες 13)

β) Να προσδιορίσετε τις τιμές του  $x \in \mathbb{R}$ , ώστε:  $f(x) = 0$ .

(Μονάδες 12)

$$\textcircled{\alpha} \quad f(-1) = 2(-1) + 4 = -2 + 4 = 2$$

$$f(3) = 3 - 1 = 2$$

$$\textcircled{\beta} \quad \underline{x < 0}$$

$$f(x) = 0$$

$$2x + 4 = 0$$

$$\underline{\underline{x = -2}}$$

$$\underline{x \geq 0}$$

$$f(x) = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$\underline{\underline{x = 1}}$$

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση  $f(x) = \alpha x + \beta$ , όπου  $\alpha, \beta$  πραγματικοί αριθμοί.

α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$  διέρχεται από τα σημεία  $A(1,6)$ ,  $B(-1,4)$ , να βρείτε τις τιμές των  $\alpha, \beta$ .

(Μονάδες 13)

β) Αν  $\alpha=1$  και  $\beta=5$ , να προσδιορίσετε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  με τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ .

(Μονάδες 12)

α)  $f(x) = \alpha x + \beta$

→  $A(1,6)$   
→  $B(-1,4)$

$$f(1) = 6 \Rightarrow \alpha + \beta = 6$$

$$f(-1) = 4 \Rightarrow -\alpha + \beta = 4$$

} (+)

$$2\beta = 10$$

$$\underline{\underline{\beta = 5}}$$

$$\underline{\underline{\alpha = 1}}$$

$$\underline{\underline{f(x) = x + 5}}$$

β)  $\underline{\underline{x'x}}$

$$f(x) = 0$$

$$x + 5 = 0$$

$$x = -5$$

$$K(-5, 0)$$

$$\underline{\underline{y'y}}$$

$$f(0) = 5$$

$$A(0, 5)$$

ΘΕΜΑ 2

Η απόσταση  $y$  (σε χιλιόμετρα) ενός αυτοκινήτου από μία πόλη Α, μετά από  $x$  λεπτά, δίνεται από τη σχέση:

$$y = 35 + 0,8x$$

α) Ποια θα είναι η απόσταση του αυτοκινήτου από την πόλη Α μετά από 25 λεπτά;

(Μονάδες 12)

β) Πόσα λεπτά θα έχει κινηθεί το αυτοκίνητο, όταν θα απέχει 75 χιλιόμετρα από την πόλη Α;

(Μονάδες 13)

α) Για  $x = 25$  έχω  $y = 35 + 0,8 \cdot 25$   
 $y = 55$

β)  $75 = 35 + 0,8x$

$$40 = 0,8x$$

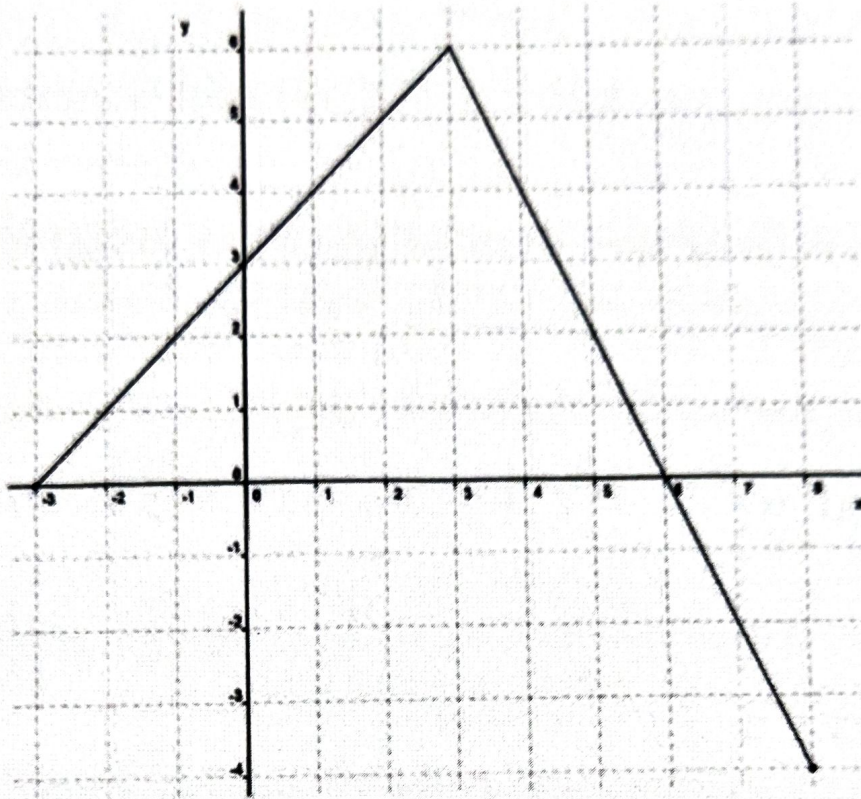
$$x = 40 : 0,8$$

$$x = 50$$



ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$ .



α) Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης.

(Μονάδες 6)

β) Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα τιμών:

$x$	-3	-1	0	3	7	8
$y$	0	2	3	6	-2	-4

(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης με τους άξονες συντεταγμένων.

(Μονάδες 6)

δ) Να προσδιορίσετε το διάστημα του πεδίου ορισμού στο οποίο η συνάρτηση παίρνει θετικές τιμές.

(Μονάδες 7)

α)  $D_f = [-3, 8]$

β)  $x \in (-3, 6)$

γ)  $A(-3, 0)$   $B(6, 0)$   $\Gamma(0, 3)$

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται ευθεία  $\epsilon: y=ax+5$ . Αν η ευθεία  $\delta: y=-3x-6$  είναι παράλληλη στην  $(\epsilon)$ , τότε:

α)

i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας  $\epsilon$ . (Μονάδες 6)

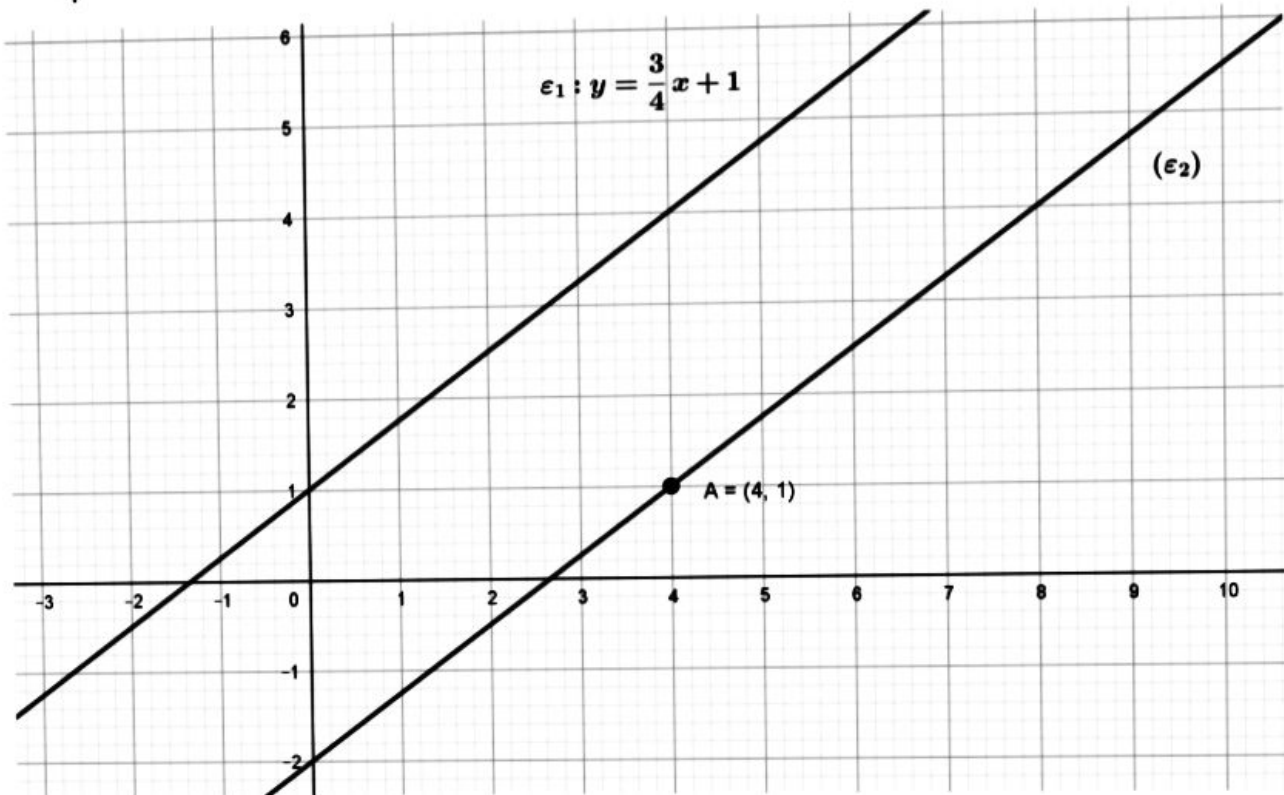
ii. Να βρείτε το είδος της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία  $\epsilon$  με τον άξονα  $x'x$ ; (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε σε ποια σημεία η ευθεία  $\epsilon$  τέμνει τους άξονες  $x'x$  και  $y'y$ . (Μονάδες 12)

## ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων έχουμε χαράξει δυο ευθείες, την  $(\epsilon_1)$  με εξίσωση

$y = \frac{3}{4}x + 1$  και την  $(\epsilon_2)$  που διέρχεται από το σημείο A (4, 1) και είναι παράλληλη στην  $(\epsilon_1)$ .



α) Να βρείτε την κλίση της ευθείας  $(\epsilon_2)$ .

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $(\epsilon_2)$ .

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τα σημεία τομής της ευθείας  $(\epsilon_2)$  με τους άξονες.

(Μονάδες 9)

## ΘΕΜΑ 2

Η ευθεία  $(\varepsilon_1)$  έχει εξίσωση  $y = -\frac{1}{2}x - 2$  και μια ευθεία  $(\varepsilon_2)$  διέρχεται από το σημείο A  $(-4, 1)$

και είναι παράλληλη στην  $(\varepsilon_1)$ .

α) Να γράψετε την κλίση της ευθείας  $(\varepsilon_1)$  και το σημείο τομής της ευθείας αυτής με τον άξονα  $y' y$ . ( Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία  $(\varepsilon_2)$  με τον άξονα  $x' x$ .

(Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας  $(\varepsilon_2)$ . Ποια είναι τα σημεία τομής της ευθείας αυτής με τους άξονες; (Μονάδες 9)

## ΘΕΜΑ 2

Ένα σώμα εκτελεί κατακόρυφη βολή. Η σχέση της απόστασής του από το έδαφος (μέτρα) με το χρόνο (sec), φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα. Από τις πληροφορίες του διαγράμματος να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις. Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

α) Από ποιο ύψος εκτελείται η κατακόρυφη βολή;

(Μονάδες 6)

β) Ποιο είναι το μέγιστο ύψος που φτάνει το σώμα και ποια χρονική στιγμή συμβαίνει αυτό;

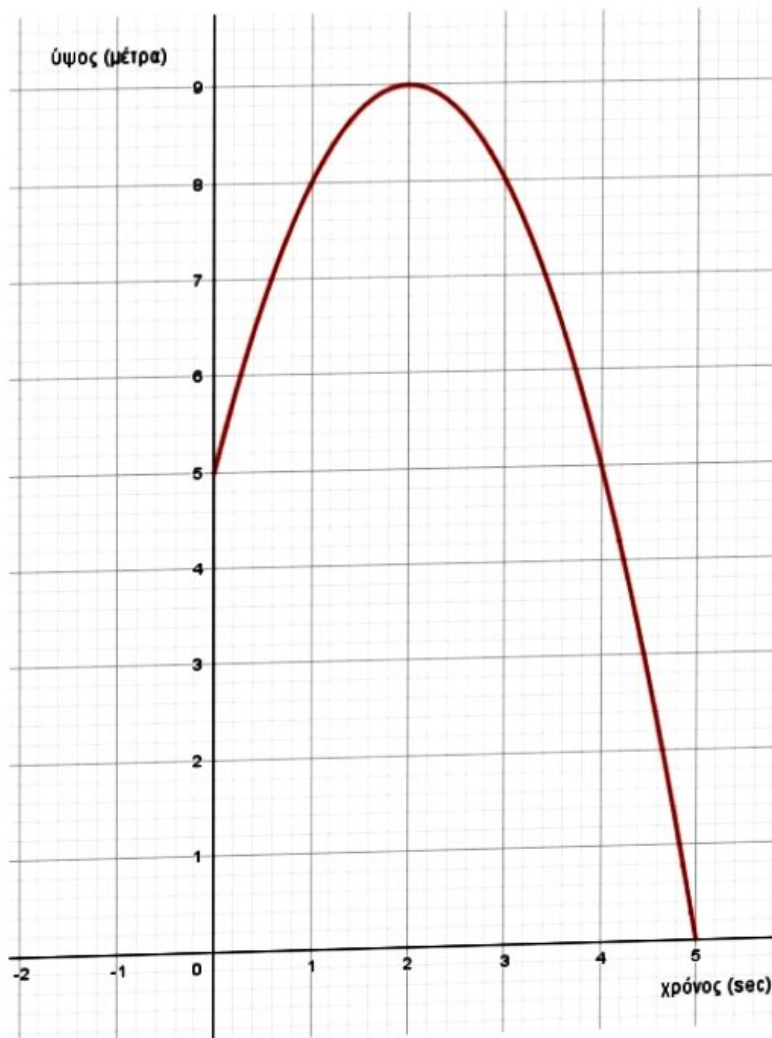
(Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις χρονικές στιγμές που το σώμα βρίσκεται σε ύψος 8 μέτρα από το έδαφος.

(Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε τη χρονική στιγμή που το σώμα συναντά το έδαφος.

(Μονάδες 6)



## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία  $y = ax + \beta$ ,  $a, \beta \in \mathbb{R}$ .

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $a$  και  $\beta$ , αν η γραφική παράσταση της  $f$  σχηματίζει με τον άξονα  $x'x$  γωνία  $45^\circ$  και διέρχεται από το σημείο  $A(0, 3)$ . Δίνεται ότι  $\varepsilon\varphi 45^\circ = 1$ .

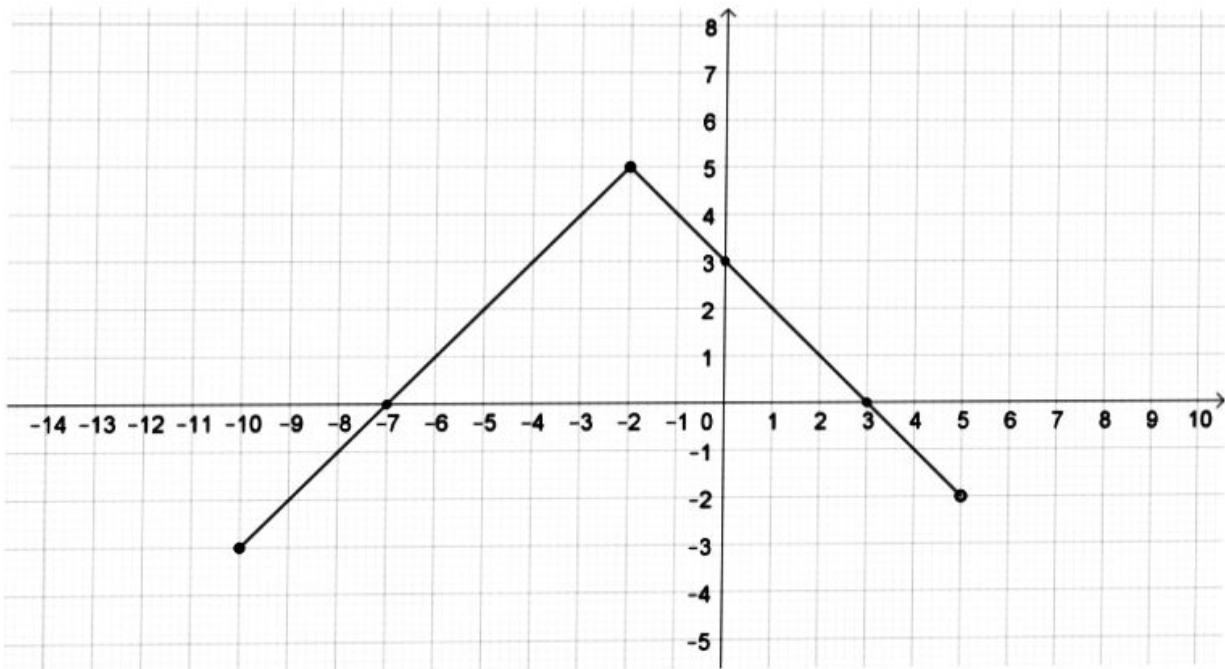
(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $\lambda$  και  $\kappa$ , αν η ευθεία  $y = \lambda x + \kappa$  είναι παράλληλη στην ευθεία  $y = x + 3$  και τέμνει τον άξονα  $x'x$  στο σημείο με τετμημένη 2.

(Μονάδες 12)

## ΘΕΜΑ 2

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης  $f$ .



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της  $A$  και το σύνολο τιμών της  $f(A)$ .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές  $f(-2)$ ,  $f(0)$ ,  $f(3)$ .

(Μονάδες 6)

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες  $f(x) = 0$ .

(Μονάδες 4)

δ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να βρείτε τις τιμές του  $x$  για τις οποίες  $f(x) < 0$ .

(Μονάδες 7)

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία  $y = \alpha x + \beta$ , η οποία έχει κλίση  $-2$  και διέρχεται από το σημείο  $(1, 1)$ .

α) Να βρείτε τις τιμές των  $\alpha$  και  $\beta$ .

(Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το σημείο τομής της παραπάνω ευθείας με τον άξονα  $y' y$ .

(Μονάδες 8)

γ) Να χαράξετε σε σύστημα συντεταγμένων την παραπάνω ευθεία.

(Μονάδες 9)

## ΘΕΜΑ 2

Έστω η ευθεία  $\varepsilon_1: y = ax + \beta$ , η οποία τέμνει τον άξονα  $y'y$  στο  $A(0, -6)$  και τον άξονα  $x'x$  στο σημείο  $B(-3, 0)$ .

α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς  $a$  και  $\beta$ .

(Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την ευθεία  $\varepsilon_2$  που είναι παράλληλη με την  $\varepsilon_1$  και διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(Μονάδες 6)

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των δύο ευθειών στο ίδιο ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.

(Μονάδες 6)

## ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η ευθεία ( $\epsilon$ ):  $y = -\frac{1}{2}x + 4$ .

α)

i. Να βρείτε την κλίση της ευθείας ( $\epsilon$ ).

(Μονάδες 4)

ii. Είναι οξεία ή αμβλεία η γωνία  $\omega$  που σχηματίζει η ευθεία ( $\epsilon$ ) με τον  $x'$  άξονα;

(Μονάδες 4)

β) Να εξετάσετε ποια από τα σημεία  $A(6, 1)$ ,  $B(-2, 3)$  και  $\Gamma(8, 0)$  είναι σημεία της ευθείας ( $\epsilon$ ).

(Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την τιμή του  $k \in \mathbb{R}$  ώστε το σημείο  $(k, 5)$  να είναι σημείο της ευθείας ( $\epsilon$ ).

(Μονάδες 8)

ΘΕΜΑ 2

Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } x \text{ άρρητος} \\ 2x, & \text{αν } x \text{ ρητός} \end{cases}$

α) Να υπολογίσετε τις τιμές  $f(\sqrt{2})$  και  $f\left(\frac{1}{2}\right)$

(Μονάδες 10)

β) Αν  $x$  ρητός, να λύσετε την εξίσωση  $[f(x)]^2 = 4x - 1$ .

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Δίνονται οι ευθείες  $\varepsilon_1 : y = (3\alpha + 4)x - 4$  και  $\varepsilon_2 : y = (3 - 4\alpha)x + 4$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

α) Αν  $\alpha = 1$ , να βρείτε:

i. Τις εξισώσεις των ευθειών.

(Μονάδες 6)

ii. Το είδος της γωνίας που σχηματίζει καθεμιά από τις ευθείες με τον άξονα  $x'x$ .

(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του  $\alpha$  οι ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  είναι παράλληλες.

(Μονάδες 13)