ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ, τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c,$$

όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c,$$

με $c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

Α3. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν $0 < \alpha < 1$ τότε $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha^x = 0$.

β) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ και $f'(x) \neq 0$, για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$.

γ) Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x$ είναι παραγωγίσιμη στο

$R_2 = \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$.

δ) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} = 1$.

ε) Αν $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:(-\infty,1]\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^4-2x^2+1$ και η συνάρτηση $g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\sqrt{x}$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h=f\circ g$.

Μονάδες 6

Β2. Αν $h(x)=(x-1)^2$, $x\in[0,1]$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι "1−1" (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} της h (μονάδες 6).

Μονάδες 9

Β3. Έστω $h^{-1}(x)=1-\sqrt{x}$, $x\in[0,1]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{h^{-1}(x)}{1-x} & , x\in[0,1)\\ \dfrac{1}{2} & , x=1\end{cases}$.

(i) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0,1]$. (μονάδες 6)

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0)=\eta\mu\alpha$, όπου $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. (μονάδες 4)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από την αρχή των αξόνων. Δίνεται ακόμα ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ και για την παράγωγο f' της f ισχύει ότι:

$$f'(x)=\begin{cases}-2 & , x<-1\\ 3x^2-1 & , x>-1\end{cases}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\begin{cases}-2x-2 & , x\le-1\\ x^3-x & , x>-1\end{cases}$.

Μονάδες 6

Γ2. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f σε σημείο $A(x_0,f(x_0))$ με $x_0>-1$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -2.

Μονάδες 5

Γ3. Έστω $y=2x-2$ η εξίσωση της ευθείας (ε) του ερωτήματος Γ2. Ένα σημείο $M(x,y)$ με $x>2$ κινείται κατά μήκος της ευθείας (ε). Έστω ακόμα Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΚΓ, όπου Κ είναι η προβολή του σημείου Μ στον άξονα $x'x$ και Γ είναι το σημείο με συντεταγμένες (2,0). Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο Μ διέρχεται από το σημείο Β(3,4) ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε τη χρονική στιγμή t_0.

Μονάδες 6

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\dfrac{f(-x)}{1-x^3}\right]$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=x-\ln(3x)$$

Δ1. **i)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2, με $x_1<1<x_2$. (μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή. (μονάδες 2)

Μονάδες 8

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ1.

Δ2. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι:

$$E=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2-2)\ .$$

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι: $f(2-x_1)<0$.

Μονάδες 4

Δ4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση: $2f(x)+\ln 3=1+f'(x_2)(x-x_2)$ έχει λύση.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Πανελλήνιες 2022

B1 $h(x) = (f\circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x}^2 - 1)^2 = (x-1)^2$

$\left[f(x) = x^4 - 2x^2 + 1 \quad = (x^2-1)^2 \right]$

$D_h = [0,1]$.

$x \in D_g$ και $g(x) \in D_f$

$x \geq 0$ $\quad$ $\sqrt{x} \leq 1$

$x \leq 1$

B2 $h'(x) = 2(x-1) \leq 0$ $\quad$ $h \downarrow$ άρα 1-1.

$h(x) = y \Rightarrow y = (x-1)^2 \Leftrightarrow \sqrt{y}^2 = (x-1)^2$

$y \geq 0$

$|\overset{\oplus}{\sqrt{y}}| = |\overset{\ominus}{x-1}| \Leftrightarrow \sqrt{y} = 1 - x \Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{y}$

$h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$

$0 \leq x \leq 1$

$0 \leq 1 - \sqrt{y} \leq 1$ $\quad$ $D_{h^{-1}} = [0,1]$.

$0 \leq 1 - \sqrt{y}$ και $1 - \sqrt{y} \leq 1$

$\sqrt{y} \leq 1$ $\quad$ $-\sqrt{y} \leq 0$

$y \leq 1$ $\quad$ ✓

B3

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x\in[0,1)\\[2mm] \dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}$$

i) $\lim\limits_{x\to 1^-}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2}$

Η $\varphi(x)$ συνεχής στο $(0,1)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και

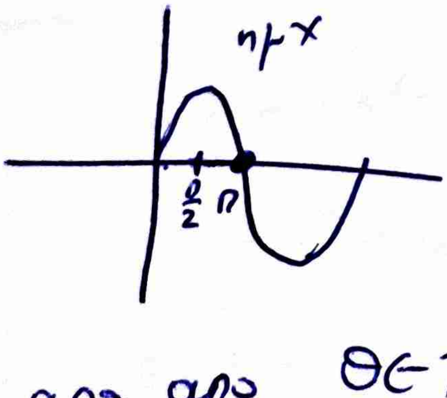
$\varphi(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x)$ και $\varphi(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\varphi(x)$

Άρα η $\varphi(x)$ είναι συνεχής $[0,1]$.

$\left.\begin{aligned}\varphi(0)&=1\\ \varphi(1)&=\tfrac{1}{2}\end{aligned}\right\}\ \varphi(0)\neq\varphi(1)$ άρα ισχύει!.

ii). νδο $\exists x_0\in(0,1)$ τ.ω $\varphi(x_0)=\eta\mu\alpha$

$\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.



Όταν $\alpha\in\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$ το $\eta\mu\alpha\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.

άρα από ΘΕΤ $\exists x_0\in(0,1)$ τ.ω $\varphi(x_0)=\eta\mu\alpha$.

Θεμα Γ

Γ1 $f'(x)= \begin{cases} -2, & x<-1 \\ 3x^2-1, & x>-1 \end{cases}$

$f(x)= \begin{cases} -2x+c_1, & x<-1 \\ x^3-x+c_2, & x\geq -1 \end{cases}$ συνεχής

$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 2+c_1$

$\lim_{x\to -1^+} f(x) = c_2$

$\Big\}\ c_2 = 2+c_1$

$f(0)=0 \Rightarrow \underline{c_2=0}$ $\quad \underline{c_1=-2}$.

$$\boxed{f(x)= \begin{cases} -2x-2, & x\leq -1 \\ x^3-x, & x>-1 \end{cases}}$$

Γ2 $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) \longrightarrow (0,-2)$

$-2-(x^3-x)=(3x^2-1)(-x)$

$-2-x^3+\cancel{x}=-3x^3+\cancel{x}$

$2x^3=2$

$x^3=1$

$x=1$

$y-f(1)=f'(1)(x-1)$

$y-0=2(x-1)$ $\quad$ $\boxed{\varepsilon\varphi: y=2x-2}$

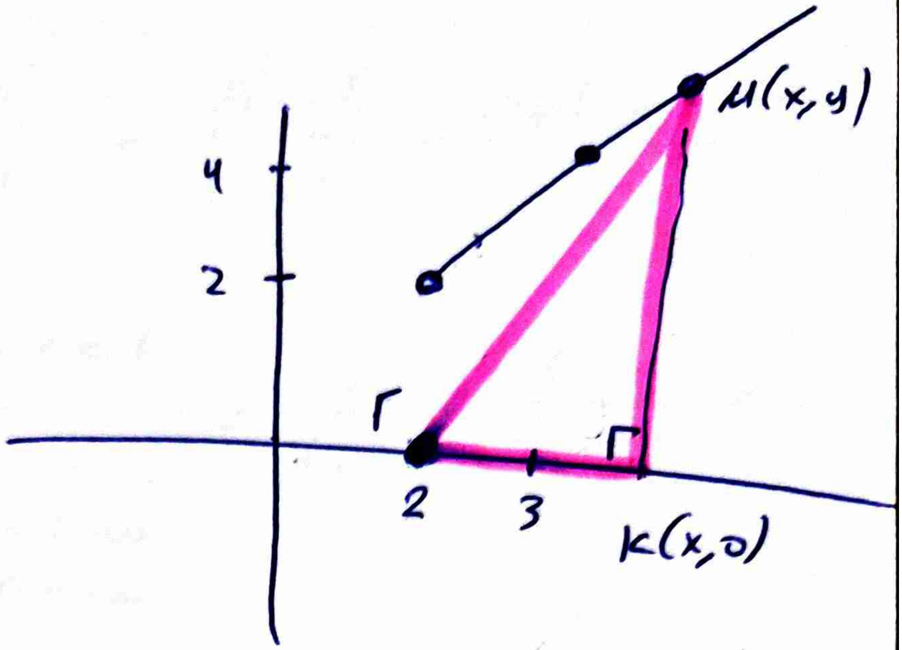
Γ3

$y = 2x - 2$

$x(t_0) = 3$

$y(t_0) = 4$

$x'(t_0) = 2$.



$$E = \frac{B \cdot U}{2}$$

$$E = \frac{(x-2)y}{2}$$

$y(t) = 2x(t) - 2$

$y'(t) = 2x'(t)$

$y'(t_0) = 2x'(t_0)$

$y'(t_0) = 4$

$$E(t) = \frac{1}{2}(x(t)-2)\,y(t)$$

$$E'(t) = \frac{1}{2}\left[x'(t)\,y(t) + (x(t)-2)\,y'(t)\right]$$

$t = t_0$

$$E'(t_0) = \frac{1}{2}\left[x'(t_0)\,y(t_0) + (x(t_0)-2)\,y'(t_0)\right]$$

$$E'(t_0) = \frac{1}{2}\left[2 \cdot 4 + (3-2)\,4\right]$$

$$E'(t_0) = \frac{1}{2}(8+4) = 6.$$

Γ4 $\lim_{x\to-\infty} \frac{ημ f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} = 0+1 = 1$.

$$\to \lim_{x\to-\infty} \frac{f(-x)}{1-x^3} \overset{-x=t}{\underset{\substack{x=-t\\ x\to-\infty\\ t\to+\infty}}{=\!=\!=}} \lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{1-(-t)^3} =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{t^3+1} = \frac{t^3-t}{t^3+1} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{ημ f(x)}{f(x)} = 0$$

$$-1 \leq ημ f(x) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad |ημ f(x)| \leq 1$$

$$\left|\frac{1}{f(x)}\right| |ημ f(x)| \leq \left|\frac{1}{f(x)}\right| \quad \Leftrightarrow \left|\frac{ημ f(x)}{f(x)}\right| \leq \left|\frac{1}{f(x)}\right|$$

$$-\left|\frac{1}{f(x)}\right| \leq \frac{ημ f(x)}{f(x)} \leq \left|\frac{1}{f(x)}\right|$$

$$\left.\begin{aligned} &\cdot \lim_{x\to-\infty} -\left|\frac{1}{f(x)}\right| = 0 \\ &\cdot \lim_{x\to-\infty} \left|\frac{1}{f(x)}\right| = 0 \end{aligned}\right\} \text{Απο Κ.Π } \lim_{x\to-\infty} \frac{ημ f(x)}{f(x)} = 0$$

Θέμα Δ

- $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$
- $f(x) = x - \ln(3x)$

Δ1 i) $f'(x) = 1 - \dfrac{3}{3x} = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$

x	0		1	
f'		$-$	0	$+$
f		$\searrow$		$\nearrow$

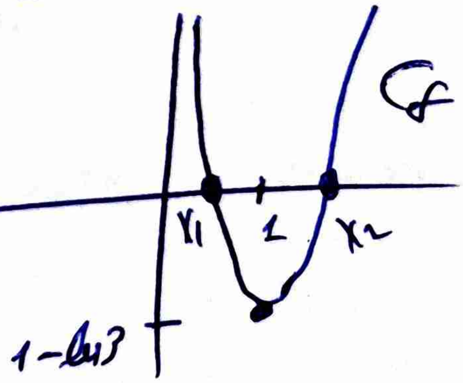
$f(x) \geq f(1)$

$f(x) \geq 1 - \ln 3$.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x - \ln 3x = \lim_{x \to +\infty} x\left(1 - \dfrac{\ln 3x}{x}\right) = +\infty$.

$\rightarrow \lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln 3x}{x} = \lim_{x \to +\infty} 3\dfrac{1}{3x} = 0$



$\underline{x \in (0,1)}$

- $f \searrow$
- f συνεχής
- $\Sigma T_f = (1-\ln 3, +\infty)$

Το $0 \in \Sigma T_f$

άρα $\exists\, x_1 < 1$

τ.ω $f(x_1) = 0$

$\underline{x \in (1,+\infty)}$

- $f \nearrow$
- f συνεχής
- $\Sigma T_f = (1-\ln 3, +\infty)$

Το $0 \in \Sigma T_f$

άρα $\exists\, x_2 > 1$

τ.ω $f(x_2) = 0$.

iii) $f'(x) = \frac{x-1}{x}$

$f''(x) = \frac{x-x+1}{x^2} = \frac{1}{x^2} > 0$ f κυρτή.

Δ2 $E = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\, dx = -\int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \overset{*}{=}$

νδο $E = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2)$.

$\overset{*}{=} -\int_{x_1}^{x_2} x - \ln 3x \, dx =$

$= -\int_{x_1}^{x_2} x \, dx + \int_{x_1}^{x_2} \ln 3x \, dx =$

$= -\frac{1}{2}(x^2)_{x_1}^{x_2} + (x \ln 3x)_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} 1 \, dx$

$= -\frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) + x_2 \ln 3x_2 - x_1 \ln 3x_1 - x_2 + x_1$

$= -\frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) + x_2^2 - x_1^2 - x_2 + x_1 =$

$= \frac{1}{2}(x_2^2 - x_1^2) - (x_2 - x_1)$

$f(x_i) = x_i - \ln 3x_i = 0$

$\boxed{\ln 3x_i = x_i}$

$\ln 3x_2 = x_2$

$= \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) - (x_2 - x_1)$

$= (x_2 - x_1)\left(\frac{1}{2}(x_2 + x_1) - 1\right) = \frac{1}{2}(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 - 2)$

Δ3 Νδο $f(2-x_1)<0$

$x_1 \quad 1 \quad x_2$

$E=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2-2)$

$\oplus \qquad \oplus \qquad \longrightarrow x_1+x_2-2>0$

$x_2>2-x_1>1$

$2-x_1>1$
$2-1>x_1$
$1>x_1$

$f(x_2)>f(2-x_1)$

$0>f(2-x_1)$.

Δ4 $2f(x)+\ln 3=1+f'(x_2)(x-x_2)$

$2f(x)=1-\ln 3+f'(x_2)(x-x_2)$

$2f(x)=f(1)+f'(x_2)(x-x_2)$

$f'(\xi)=\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}=\frac{f(x)}{x-x_2}$

$x_1 \quad 1 \quad x_2 \quad \xi \quad x$

$x_2<\xi \Rightarrow f'(x_2)<f'(\xi) \Rightarrow f'(x_2)<\frac{f(x)}{x-x_2}$

$\boxed{f'(x_2)(x-x_2)<f(x)}$ ισχύει

$f(x)>f'(x_2)(x-x_2)$

Αφού $f(1)<0$

$f(x)>f'(x_2)(x-x_2)+f(1)$

$2f(x)>f'(x_2)(x-x_2)+f(1)$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Μονάδες 6

Α2. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α. Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle (μονάδες 3) και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία (μονάδες 2).

Μονάδες 5

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=1$.

β) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Για κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και γνησίως αύξουσα στο Δ, ισχύει ότι $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ.

δ) Αν η $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ είναι μια «ένα προς ένα» ("1-1") συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

ε) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $f\circ g$ και $g\circ f$, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\dfrac{4-e^{2x}}{e^x}$ και η συνάρτηση $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=\ln x$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f=g\circ h$.

Μονάδες 5

Έστω $f(x)=\dfrac{4-x^2}{x}$, $x>0$.

Β2. **i)** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μονάδες 4).

ii) Να αποδείξετε ότι $\dfrac{4-\pi^2}{4-e^2}>\dfrac{\pi}{e}$ (μονάδες 4).

Μονάδες 8

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β4. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\text{συν}(1+x^2)}{f(x)}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3\,, & x<1 \\ \dfrac{1}{x}+\alpha\,, & x\geq 1 \end{cases},$$

όπου $\alpha\in\mathbb{R}$, για την οποία γνωρίζουμε επιπλέον ότι

$$\int_2^3 x\,f(x)\,dx=1.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=0$.

Μονάδες 4

Γ2. **i)** Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$ (μονάδες 4).

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και τη γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'x$ (μονάδες 4).

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «ένα προς ένα» ("1-1") (μονάδες 3) και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της (μονάδες 3).

Μονάδες 6

Γ4. Έστω $(\varepsilon): y=-x+2$ η εξίσωση της εφαπτομένης του ερωτήματος Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f με $x \geq 1$, την ευθεία (ε), τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=e$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,2) \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=\ln(2-x)-\frac{1}{x}+\kappa, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \to 1}\frac{f(x)-2x}{x-1}=\ell \in \mathbb{R}..$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa=3$.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1<1<x_2$ (μονάδες 4) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $x_1<\frac{1}{3}$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ2.

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $M(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (0,1)$, στο οποίο η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ισούται με

$$\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}.$$

Μονάδες 6

Δ4. Αν επιπλέον F και G είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της συνάρτησης f στο διάστημα $(0,2)$ με $F(x_1)=G(x_2)=0$, να αποδείξετε ότι:

i) $F(x_2)+G(x_1)=0$

(μονάδες 4)

ii) η εξίσωση

$$x_1F(x)+x_2G(x)=x_1+x_2-2x$$

έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (x_1, x_2).

(μονάδες 5)

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους / τις εξεταζόμενες)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Πανελλήνιες 2023

A1: 3.10

A2: 1.31

A3: 1.34 + 1.35.

A4: α) Λ β) Λ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

B1: $f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = \dfrac{4 - e^{2\ln x}}{e^{\ln x}} =$

$= \dfrac{4 - e^{\ln x^2}}{x} = \dfrac{4 - x^2}{x} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = \dfrac{4-x^2}{x} \quad D_f = (0, +\infty)}$

$x \in D_h$ και $h(x) \in D_g$

$x > 0$ $\quad \ln x \in \mathbb{R}$

B2: i) $f'(x) = \dfrac{-2x \cdot x - (4 - x^2)}{x^2} = \dfrac{-2x^2 - 4 + x^2}{x^2} =$

$= \dfrac{-x^2 - 4}{x^2} < 0 \Leftrightarrow f \downarrow$ στο $(0, +\infty)$.

ii). $e<\pi \Rightarrow f(e) > f(\pi) \Leftrightarrow \dfrac{4-e^2}{e} > \dfrac{4-\pi^2}{\pi}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\pi}{e} < \dfrac{4-\pi^2}{4-e^2}$ Αλλάζω φορά γιατί $4-e^2<0$

B3: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{4-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} (4-x^2)\dfrac{1}{x} = +\infty$

$\boxed{\varepsilon_1 : x = 0 \text{ κατακόρυφη}}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} -x = -\infty$

Δεν έχει οριζόντια.

$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\frac{4-x^2}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4-x^2}{x^2} =$

$= \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-x^2}{x^2} = -1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} (f(x)+x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4-x^2}{x} + x = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4\cancel{-x^2}\cancel{+x^2}}{x}$

$= 0$

$\varepsilon_2 : y = -x$

$+\infty$

Β4: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu(1+x^2)}{f(x)}$

$-1 \le \eta\mu(x^2+1) \le 1$

$-\dfrac{1}{f(x)} \geq \dfrac{\eta\mu(x^2+1)}{f(x)} \geq \dfrac{1}{f(x)}$ αν $f(x)<0$ στο $+\infty$

$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{f(x)} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\eta\mu(x^2+1)}{f(x)} = 0,$

Γ1: $\int_2^3 x\, f(x)\, dx = 1 \iff \int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+\alpha\right) dx = 1$

$\iff \int_2^3 1+\alpha x \; dx = 1 \iff \int_2^3 1\, dx + \int_2^3 \alpha x\, dx = 1$

$\iff (x)_2^3 + \alpha \frac{1}{2}(x^2)_2^3 = 1 \iff \cancel{1} + \frac{\alpha}{2} 5 = \cancel{1}$

$\underline{\underline{\alpha = 0}}$

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} x^2-3x+3, & x<1 \\ \dfrac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}}$$

Γ2: i) $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-3x+3-1}{x-1} =$

$= \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2-3x+2}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x-3}{1} = -1$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} -\frac{1}{x^2} = -1$

$f'(1) = -1$. άρα ορίζεται η εφαπτομένη στο 1.

ii). $y - f(1) = f'(1)(x-1)$

$y - 1 = -1(x-1)$ $\quad$ $εφω = -1 \Leftrightarrow \underline{\underline{ω = 135}}$

$\boxed{y = -x+2}$

Γ3:

$\underline{x<1}$

$f_1(x) = x^2-3x+3$

$f_1'(x) = 2x-3$

$\to 2x-3=0$

$\cancel{x = \frac{3}{2}}$

$\underline{x \geq 1}$

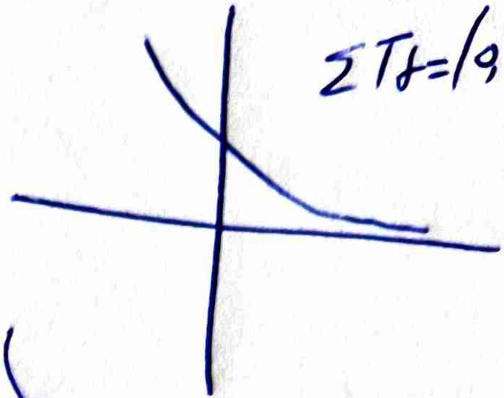
$f_2(x) = \frac{1}{x}$

$f_2'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

x		1	
f_1'	−		//////
f_2'	//////		−
f'	−		−
f	↘		↘

Η $f\downarrow$ άρα 1−1

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^2-3x+1 = \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$$



$Σ T_f = (0, +\infty).$

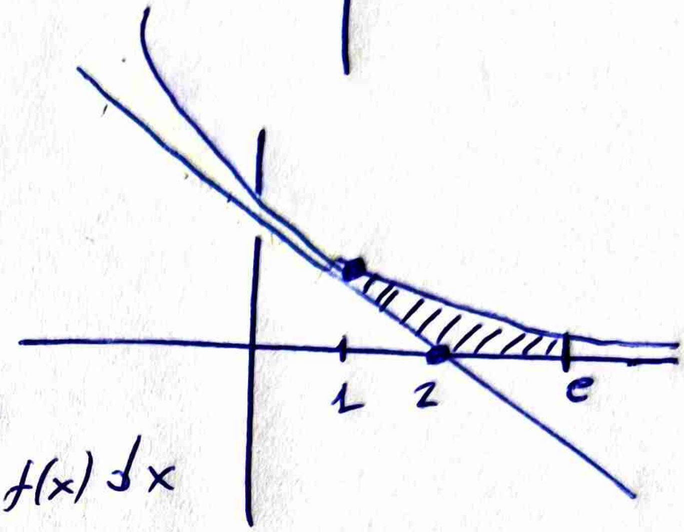
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \to 0$$

Τ4: $y = -x+2$

$y = 0$

$0 = -x+2$

$x = 2$



$$E = \int_1^2 f(x) - (-x+2)\,dx + \int_2^e f(x)\,dx$$

$$E = \int_1^2 \frac{1}{x} + x - 2\,dx + \int_2^e \frac{1}{x}\,dx$$

$$E = (\ln x)_1^2 + \frac{1}{2}(x^2)_1^2 - 2(x)_1^2 + (\ln x)_2^e$$

$$E = (\ln 2) + \frac{1}{2}(4-1) - 2 + 1 - \ln 2$$

$$E = \cancel{\ln 2} + 2 - \frac{1}{2} - \cancel{1} - \cancel{\ln 2}$$

$$E = \frac{1}{2}.$$

Δ1: $\lim_{x\to 1} \dfrac{f(x)-2x}{x-1} = l$

Θεωρώ $g(x) = \dfrac{f(x)-2x}{x-1}$ και $\lim_{x\to 1} g(x) = l$.

$$\boxed{f(x) = g(x)(x-1) + 2x}$$

$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x)(x-1) + 2x$

$\lim_{x\to 1} \left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + k\right) = l \cdot 0 + 2$

$-1 + k = 2$

$k = 3$.

Δ2: $f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3 \qquad x \in (0,2)$.

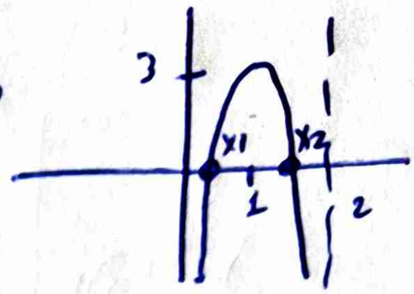
$f'(x) = \dfrac{-1}{2-x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{-x^2+2-x}{(2-x)x^2}$

$f'(x) = -\dfrac{x^2+x-2}{x^2(2-x)}$

x	0		1		2
f'		+	0	−	
f		↗		↘	

$\longrightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x^2+x-2 = 0 \qquad x = -2 \qquad x = 1$

$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left[\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right] = -\infty$



$f(1) = 3$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(\ln(2-x) - \frac{1}{x} + 3\right) = -\infty$

$0 < x \leq 1$

- f συνεχής
- $f \nearrow$

$\Sigma T_f = (-\infty, 3]$

Το $0 \in \Sigma T_f$

άρα $\exists!\, x_1$ τ.ω

$f(x_1) = 0$

$1 < x < 2$

- f συνεχής
- $f \searrow$
- $\Sigma T_f = (-\infty, 3)$

Το $0 \in \Sigma T_f$

άρα $\exists!\, x_2$ τ.ω

$f(x_2) = 0$.

Έστω $x_1 \geq \frac{1}{3} \Rightarrow f(x_1) \geq f\left(\frac{1}{3}\right)$

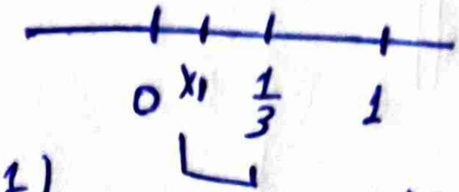
$0 \geq \ln\left(2-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{\frac{1}{3}} + 3$

$0 \geq \ln\frac{5}{3} \cancel{-3+3}$

$0 \geq \ln\frac{5}{3}$ Άτοπο!

Άρα $x_1 < \frac{1}{3}$.

Δ3: Αρκει $\exists \xi \in (0,1)$ τω $f'(\xi) = \dfrac{3f(\frac{1}{3})}{1-3x_1}$



$$f'(\xi) = \frac{f(\frac{1}{3}) - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{f(\frac{1}{3})}{\frac{1-3x_1}{3}} = \frac{3f(\frac{1}{3})}{1-3x_1}$$

Δ4: i) Αφου F παραγουσα τη f τοτε ισχυει.

$$F'(x) = f(x)$$

Αφου G παραγουσα τη f τοτε ισχυει

$$G'(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow F'(x) = G'(x) \Rightarrow F(x) = G(x) + c$$

$\rightarrow$ $F(x_1) = G(x_1) + c$

$0 = G(x_1) + c \Rightarrow \boxed{c = -G(x_1)}$

$\rightarrow$ $F(x_2) = G(x_2) + c$

$F(x_2) = 0 - G(x_1)$

$$\boxed{F(x_2) + G(x_1) = 0}$$

11). $x_1 F(x) + x_2 G(x) = x_1 + x_2 - 2x$

$$\boxed{\varphi(x) = x_1 F(x) + x_2 G(x) - x_1 - x_2 + 2x}$$

$$\varphi(x_1) = x_1 F(x_1) + x_2 G(x_1) - x_1 - x_2 + 2x_1$$

$$\varphi(x_1) = \overset{0}{\cancel{x_1 F(x_1)}} + x_2 G(x_1) + x_1 - x_2$$

$$\boxed{\varphi(x_1) = x_2 G(x_1) + x_1 - x_2}$$

$$\varphi(x_2) = x_1 F(x_2) + \overset{0}{\cancel{x_2 G(x_2)}} - x_1 - x_2 + 2x_2$$

$$\boxed{\varphi(x_2) = x_1 F(x_2) + x_2 - x_1}$$

Γνωρίζω ότι $F(x_2) + G(x_1) = 0$.

$$\varphi(x_1) = -x_2 \underset{+}{F(x_2)} - \underset{+}{(x_2 - x_1)} < 0$$

$$\varphi(x_2) = \underset{+}{x_1} \underset{+}{F(x_2)} + \underbrace{x_2 - x_1}_{+} > 0$$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) < F(x_2) \rightarrow 0 < F(x_2)$
- $\forall x \in (x_1, x_2)$ η $f(x) > 0 \Rightarrow F \nearrow$

$\varphi(x_1)\varphi(x_2) < 0$ άρα Bolzano $\exists \rho \in (x_1, x_2)$

τ.ω $\varphi(\rho) = 0$.

$\varphi'(x) = x_1 f(x_1) + x_2 f(x_2) + 2 > 0 \quad \forall x \in (x_1, x_2)$

$\varphi \nearrow$ άρα το ρ μοναδική ρίζα.