Fermat

Αν η f παραγωγίσιμη στο x_0, το x_0 είναι εσωτερικό του Δ και η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 τότε $f'(x_0) = 0$.

Οι βασικές εφαρμογές είναι 3

1η. Επανάληψη (2) και (3) σελ. 124

2η. Ανισότητα σε ισότητα (4) (5) (6) (7) (8)

3η. Συναρτησιακή σχέση (14) (15) (16).

Ενοτητα 26

10. $f(x) = x^2 + \alpha x + B \ln x$, $x > 0$

Παρουσιάζει ακροτατα στο $x_1 = 1$

και $x_2 = 3$

Αφου η f παρουσιαζει ακροτατο

στο 1 και το 3

Το 1 και το 3 εσωτερικα $(0, +\infty)$

και η f παρ/μη στο 1 και 3

Fermat $f'(1) = 0$. $f'(3) = 0$

$$f'(x) = 2x + \alpha + B\frac{1}{x}$$

$$f'(1) = 2 + \alpha + B = 0$$

$$f'(3) = 6 + \alpha + \frac{B}{3} = 0$$

$$\begin{cases} 2+\alpha+\beta=0 \\ \\ \alpha+\frac{\beta}{3}+6=0 \end{cases} \quad \ominus \quad \Rightarrow 3\alpha+\beta+18=0$$

$$2+\alpha+\cancel{\beta}-3\alpha-\cancel{\beta}-18=0$$

$$-2\alpha-16=0$$

$$\alpha=-8$$

$$\beta=6 \, .$$

x		1		3	
f'	$+$		$-$		$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$\boxed{f(x)=x^2-8x+6\ln x}$$

$$f'(x)=2x-8+\frac{6}{x}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2-8x+6}{x}=2\,\frac{x^2-4x+3}{x}$$

$$\rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow 2\,\frac{x^2-4x+3}{x}=0 \Rightarrow x^2-4x+3=0$$

$x=1$ $x=3$

11. $f(x) = (x-1)\ln(x+1) + x \quad , \underline{\underline{x > -1}}$

(α) $f'(x) = \ln(x+1) + (x-1)\dfrac{1}{x+1} + 1$

$f'(x) = \ln(x+1) + \dfrac{x-1}{x+1} + 1 \qquad \underline{\underline{f'(0) = 0}}$

$f''(x) = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2}$

$f''(x) = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{(x+1)^2} = \dfrac{x+1+2}{(x+1)^2} = \dfrac{x+3}{(x+1)^2}$ +

Αφού $x > -1 \Rightarrow x+3 > 2$

x	-1	0
f''	$+$	$+$
f'	$\nearrow$ $-$	0 $+$ $\nearrow$
f	$\searrow$	$\nearrow$

$x < 0 \Rightarrow f'(x) < f'(0) \Rightarrow f'(x) < 0$

$x > 0 \Rightarrow f'(x) > f'(0) \Rightarrow f'(x) > 0$

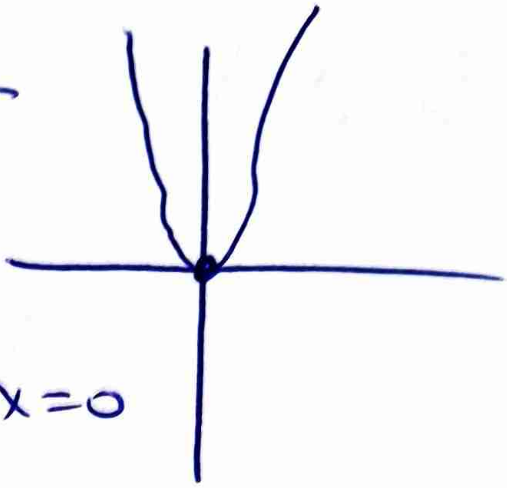
$f(x) \geq f(0)$

$\underline{\underline{f(x) \geq 0}}$

Προφανώς η f έχει 1 ρίζα, την $x=0$ και αυτή θετική

Ρίζα $f(x)$

$f(x)=0$



Προφανής ρίζα $x=0$

$x<0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow f(x) > 0$

$x>0 \Rightarrow f(x) > f(0) \Rightarrow f(x) > 0$.

(B) $e^{x}(x+1)^{x-1} = 1 \quad (-1, +\infty)$

$\ln e^{x} \cdot (x+1)^{x-1} = \ln 1$

$\ln e^{x} + \ln (x+1)^{x-1} = 0$

$x + (x-1)\ln(x+1) = 0$

$f(x) = 0$

$x = 0$

17. (B) $x^8 - 8x \geq -7$

$$\underbrace{x^8 - 8x + 7}_{f(x)} \geq 0$$

Αρκει νδο $f(x) \geq 0$

$f'(x) = 8x^7 - 8 = 8(x^7 - 1)$

$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x^7 - 1 = 0$

$x^7 = 1$ $x = 1$

x		1	
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

$f(x) \geq f(1)$

$f(x) \geq 0$ ✓

(δ) $x \leq \frac{1}{\alpha} e^{x-1} + \ln\alpha$

$$\underbrace{x - \frac{1}{\alpha} e^{x-1} - \ln\alpha}_{f(x)} \leq 0$$

$f'(x) = 1 - \frac{1}{\alpha} e^{x-1}$

$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{1}{\alpha} e^{x-1} = 0$

$1 = \frac{1}{\alpha} e^{x-1}$

$\alpha = e^{x-1}$

$\ln\alpha = x-1$

$x = \ln\alpha + 1$

x		$\ln\alpha+1$	
f'	$+$		$-$
f	$\nearrow$		$\searrow$

$f(x) \leq f(\ln\alpha+1)$

$$f(\ln a+1) = \cancel{\ln a} + 1 - \frac{1}{a} e^{\ln a + 1 - 1} - \cancel{\ln a}$$

$$= 1 - \frac{1}{a} e^{\ln a} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\cancel{a}} \cancel{a} = 1 - 1 = 0.$$

$$f(x) \leq 0$$

18. Νδο $\text{συν}x < \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} + 1 \quad \forall x > 0$

$$\underbrace{\text{συν}x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} - 1}_{f(x)} < 0$$

$f'(x) = -\text{ημ}x - \frac{1}{6}3x^2 + \frac{1}{2}2x$

$f'(x) = -\text{ημ}x - \frac{1}{2}x^2 + x \qquad f'(0) = 0$

$f''(x) = -\text{συν}x - \frac{1}{2}2x + 1$

$f''(x) = -\text{συν}x - x + 1 \qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = \text{ημ}x - 1 \leq 0$

$-1 \leq \text{ημ}x \leq 1$

$-2 \leq \text{ημ}x - 1 \leq 0$

x		0	
f'''	$-$		$-$
f''	$\searrow$ $+$	0	$\searrow$ $-$
f'	$\nearrow$ $-$	0	$\searrow$ $-$
f	$\searrow$		$\searrow$

$x<0 \Rightarrow f''(x) > f''(0) \Rightarrow f''(x) > 0$

$x>0 \Rightarrow f''(x) < f''(0) \Rightarrow f''(x) < 0$

$f'(x) \leq f'(0)$

$f'(x) \leq 0$

A/ ✓

$x > 0$

$f \searrow$

$f(x) < f(0)$

$f(x) < 0$ ✓

19. (γ) $(x^2+1)^{x^2+1} = e^{x^2}$

$$\ln (x^2+1)^{x^2+1} = \ln e^{x^2}$$

$$(x^2+1)\ln(x^2+1) = x^2$$

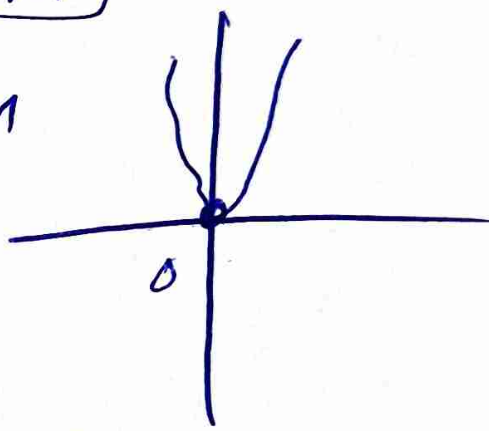
$$(x^2+1)\ln(x^2+1) - x^2 = 0 \rightarrow f(x^2)=0$$

$$x^2=0$$

$$x=0$$

$$\boxed{f(x) = (x+1)\ln(x+1) - x \quad x>-1}$$

$$f'(x) = \ln(x+1) + \cancel{(x+1)}\frac{1}{\cancel{x+1}} - 1$$



$$f'(x) = \ln(x+1) + 0$$

$$\rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow \ln(x+1)=0$$

$$x+1=1$$

$$x=0$$

x	-1	0	
f'		− 0	+
f		↘ 0	↗

$f(x) \geq f(0)$

$f(x) \geq 0$

Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα $x=0$.

20. $f(x) = e^{x-1} - x\ln x - 1$

ⓐ $f'(x) = e^{x-1} - \left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right)$

$f'(x) = e^{x-1} - \ln x - 1$

- $e^{x} \geq x + 1$

$e^{x-1} \geq x - 1 + 1$

$e^{x-1} \geq x$

- $\ln x \leq x - 1$

$-\ln x \geq -x + 1$

(+)

$e^{x-1} - \ln x \geq -x + 1 + x$

$e^{x-1} - \ln x - 1 \geq 0$

$f'(x) \geq 0$

$f \nearrow .$

(B) $g(x) = e^{x-1} - 1$ κοινή εφαπτομένη

$h(x) = x\ln x$ κοινό σημείο

$$\begin{cases} g(x) = h(x) \iff e^{x-1} - 1 = x\ln x \\ g'(x) = h'(x) \quad \boxed{e^{x-1} = \ln x + 1} \end{cases}$$

$$\ln x \cancel{+1} \cancel{-1} = x\ln x$$

$$\ln x - x\ln x = 0$$

$$\ln x\,(1 - x) = 0$$

$$x = 1$$

25. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$

(α) Μονοτονια - ακροτατα.

$f'(x) = \frac{1}{3}3x^2 - 2\cdot 2x + 3$

$$\boxed{f'(x) = x^2 - 4x + 3}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0$

$x = 1$ $\quad$ $x = 3$

x		1		3	
f'	$+$		$-$		$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$A(1, f(1))$ Τ.Μ

$B(3, f(3))$ Τ.Ε.

(β) Ν δο $3f(x) \le 1$

$\forall x \le 3$

$\forall x \le 3$ $\quad f(x) \le f(1)$

$f(x) \le \frac{1}{3}$

$3f(x) \le 1$

(6) $\alpha, \beta \in [1, +\infty)$

$$f(\alpha) + f(\beta) = -2$$

$\forall x \geq 1$ $\quad f(x) \geq f(3)$

$f(x) \geq -1$ $\quad$ Το "=" $x=3$

$+$

$f(\alpha) \geq -1$ $\quad$ Το "=" $\alpha = 3$

$f(\beta) \geq -1$ $\quad$ Το "=" $\beta = 3$

$$f(\alpha) + f(\beta) \geq -2$$

Το "="

$\alpha = \beta = 3$.

(δ) $3f(4-x)=1$ $\quad (1,+\infty)$

$f(4-x)=\frac{1}{3}$ $\quad 4-x=1$

$3=x$

• Οταν $x>1 \Rightarrow -x<-1$

$4-x<3$

$\forall x<3 \quad f(x)\leq f(1)$

$f(x)\leq\frac{1}{3}$

Το "=" $x=1$

(ε) $f(x^2+2)+f(x^4+2)=-2$

• $x^2+2>1$
• $x^4+2>1$

$\forall x>1 \quad f(x)\geq f(3)$

$f(x)\geq -1$

Το "=" $x=3$.

$$\left.\begin{array}{l} f(x^2+2) \geq -1 \\ f(x^4+2) \geq -1 \end{array}\right\} \oplus$$

$$f(x^2+2) + f(x^4+2) \geq -2$$

$x^2+2=3 \Rightarrow x^2=1$ $\quad x=\pm 1$

$x^4+2=3$ $\quad x^4=1$ $\quad x=\pm 1$

$X=1$ $\quad X=\pm 1$

27

10. (B) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

Νδο εχει 2 θετικες και μια αρνητικη ριζα.

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$

$f'(x) = 6(x^2 - x - 2)$

$\rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$x = 2$ $\quad x = -1$

x	$-\infty$	-1		2	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 2x^3-3x^2-12x+1 =$$

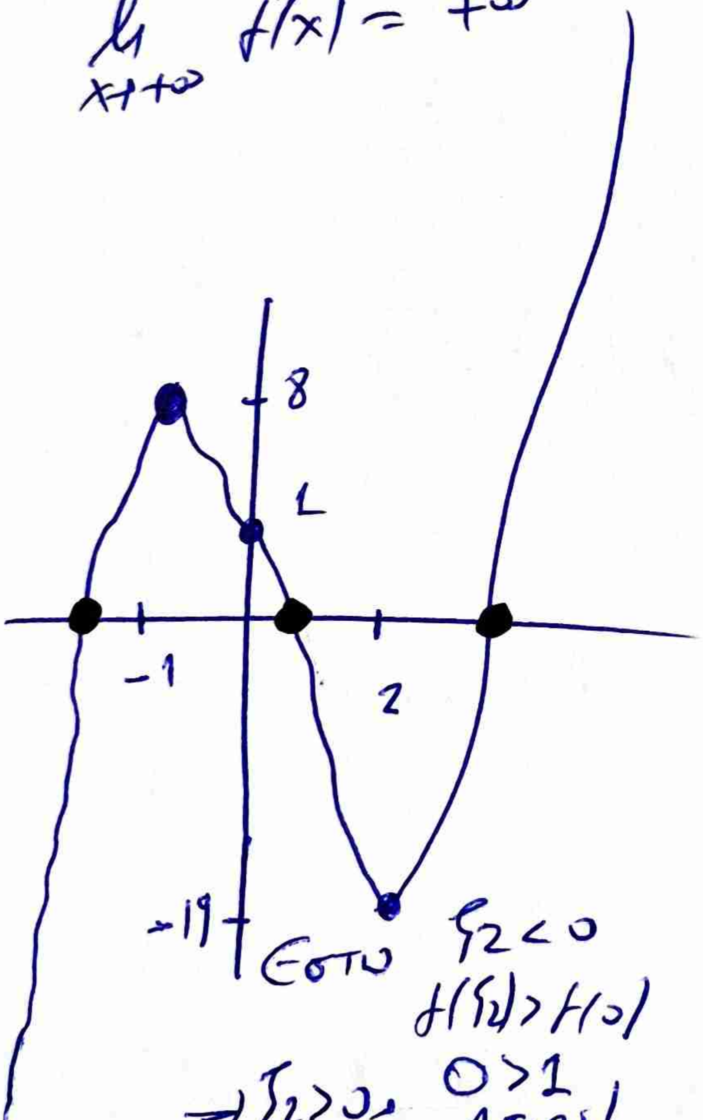
$$= \lim_{x\to-\infty} 2x^3 = -\infty$$

$f(-1)=8$

$f(2)=-19$

$f(0)=1$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



Έστω $\xi_2<0$

$f(\xi_2)>f(0)$

$\to \xi_2>0,\ 0>1$ Άτοπο!

$x<-1$

- f συνεχής
- $f \nearrow$
- $\Sigma T_f = (-\infty, 8]$.

Το $0 \in \Sigma T_f$ άρα $\exists!\ \xi_1<0$ τ.ω $f(\xi_1)=0$.

$-1 \le x \le 2$

- f συνεχής
- $f \searrow$
- $\Sigma T_f = [-19, 8]$

Το $0 \in \Sigma T_f$ άρα $\exists!\ \xi_2$ τ.ω $f(\xi_2)=0$.

$x>2$

- f συνεχής
- $f \nearrow$
- $\Sigma T_f = [-19, +\infty)$

Το $0 \in \Sigma T_f$ άρα $\exists!\ \xi_3>0$ τ.ω $f(\xi_3)=0$

12. (B) $f(x) = e^{x-1}$

$g(x) = x\ln x + 2$

$f(x) = g(x)$

$e^{x-1} = x\ln x + 2$.

$\underbrace{e^{x-1} - x\ln x - 2}_{h(x)} = 0$ $\qquad$ $x > 0$

$h'(x) = e^{x-1} - \ln x - 1 \geq 0$

$h \nearrow$.

- $e^{x} \geq x+1$

$e^{x-1} \geq x-1+1$

$e^{x-1} \geq x$

- $\ln x \leq x-1$

$-\ln x \geq -x+1$

$+$

$e^{x-1} - \ln x \geq 1$

$e^{x-1} - \ln x - 1 \geq 0$.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(e^{x-1} - \overset{0}{\cancel{x\ln x}} - 2\right) = e^{-1} - 2 = \frac{1}{e} - 2$$

$$\to \lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{x} = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(e^{x-1} - x\ln x - 2\right) = \lim_{x\to +\infty} e^{x-1}\left(1 - \cancel{\frac{x\ln x}{e^{x-1}}} - \cancel{\frac{2}{e^{x-1}}}\right) = +\infty$$

$$\to \lim_{x\to +\infty} \frac{x\ln x}{e^{x-1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x + 1}{e^{x-1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x e^{x-1}} = 0$$

h συνεχ.

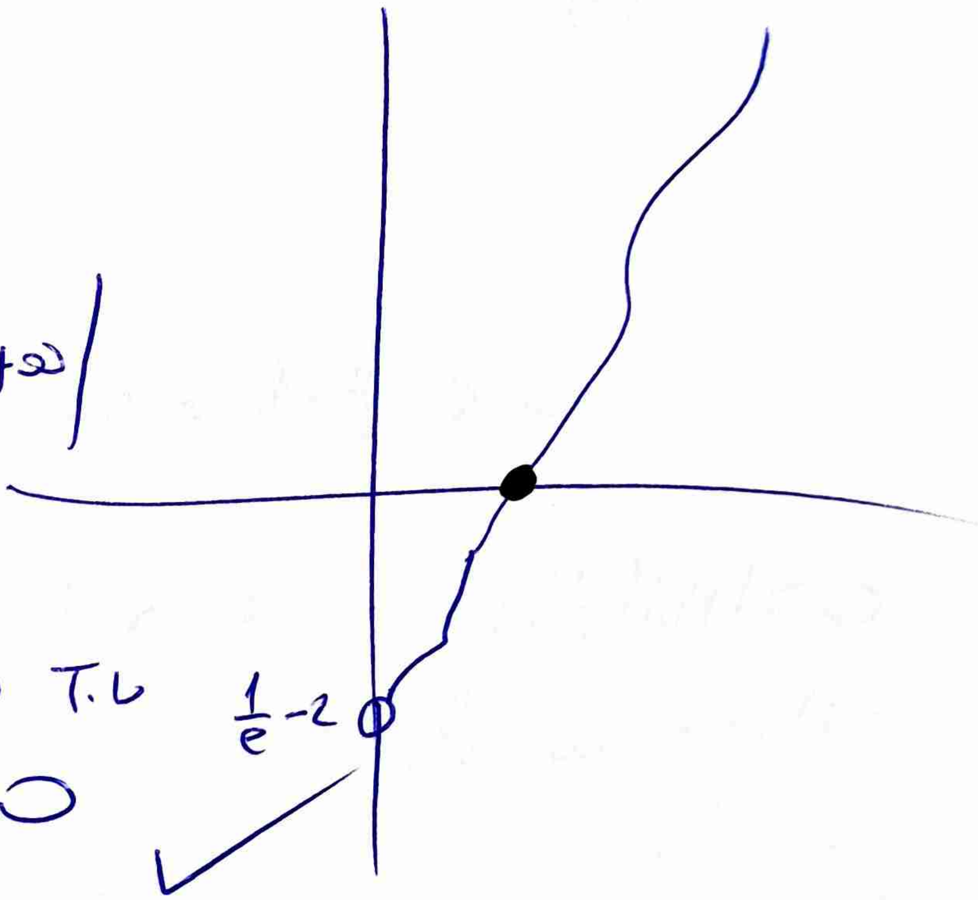
$h \nearrow$

$\Sigma T_h = \left(\frac{1}{e} - 2, +\infty\right)$

το $0 \in \Sigma T_h$

άρα $\exists!\, \xi > 0$ τ.ω.

$h(\xi) = 0$



14. $f(x) = \ln x$ $\qquad x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$g(x) = συν\, x$

$f(x) = g(x)$

$\ln x = συν\, x$

$$\underbrace{\ln x - συν\, x}_{h(x)} = 0$$

$$h'(x) = \frac{1}{x} - (-ημ x) = \underbrace{\frac{1}{x} + ημ x}_{+} > 0$$

$h \nearrow$

$$h\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \ln \frac{\pi}{2} - 0 = \ln \frac{\pi}{2} > 0$$

$$h(1) = \underbrace{-συν 1}_{+} < 0.$$

$h\left(\frac{\pi}{2}\right) h(1) < 0$

Bolzano $\exists\, \xi \in \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

τ.ω $h(\xi) = 0$

λόγω μονοτονίας μοναδική