

Επαναληπτικά Ασκηση Πολυωνυμών

1. Έστω $P(x) = (\lambda^3 - 4\lambda)x^3 + (\lambda^2 - 2\lambda)x + \lambda - 2$

Ψάχνω το Βαθμό του $P(x)$

$$\lambda^3 - 4\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 - 4) = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \quad \vee \quad \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 = 4$$

$$\lambda = 2 \quad \lambda = -2$$

1. Αν $\lambda = 0$ τότε $P(x) = -2$
 $\hookrightarrow$ Μηδενικό Βαθμό.

2. Αν $\lambda = 2$ τότε $P(x) = 0$
 $\hookrightarrow$ Δεν ορίζεται Βαθμός

3. Αν $\lambda = -2$ τότε $P(x) = 8x - 4$ 1ου Βαθμού

4. Αν $\lambda \neq 0, 2, -2$ 3ου Βαθμού.

$$2. (3x-2)P(x) = \underbrace{3x^3 - 14x^2 + 17x - 6}$$

$\swarrow$
 1ου
 4ου x ου $\tau\omega$ $P(x)$ 3ου

Πρατι $P(x) = ax^2 + bx + \gamma$ για να
 είναι 2ου βαθμους.

$$(3x-2)(ax^2+bx+\gamma) = 3x^3 - 14x^2 + 17x - 6$$

$$3ax^3 + 3bx^2 + 3\gamma x - 2ax^2 - 2bx - 2\gamma =$$

$$= 3x^3 - 14x^2 + 17x - 6$$

$$3ax^3 + (3b - 2a)x^2 + (3\gamma - 2b)x - 2\gamma$$

$$= 3x^3 - 14x^2 + 17x - 6$$

$$\begin{cases} 3a = 3 \\ 3b - 2a = -14 \\ 3\gamma - 2b = 17 \\ -2\gamma = -6 \end{cases}$$

$$a = 1$$

$$b = -4$$

$$\gamma = 3$$

$$2x^4 - x^2 - 3x + 1 = (x^2 - 1)(2x^2 + 1) - 3x + 2$$

$$4. (2x^4 - 3x^2 - 1) : (x+1)$$

2	0	-3	0	-1	-1
↓	-2	2	1	-1	
↓	2	-2	-1	1	-2

remainder

$$(2x^4 - 3x^2 - 1) = (x+1)(2x^3 - 2x^2 - x + 1) - 2$$

5.

Δίνεται $P(x) = x^4 - 3x^3 + ax^2 + (a^2 - 4a - 8)x + a^2 - 21$

Να βρεθεί το a αν η διαίρεση $P(x) : (x^2 + 1)$ είναι τέλεια.

$$\begin{array}{r}
 x^4 - 3x^3 + ax^2 + (a^2 - 4a - 8)x + a^2 - 21 \quad | \quad x^2 + 1 \\
 - [x^4 + x^2] \\
 \hline
 -3x^3 + (a-1)x^2 + (a^2 - 4a - 8)x + a^2 - 21 \\
 - [-3x^3 - 3x] \\
 \hline
 (a-1)x^2 + (a^2 - 4a - 5)x + a^2 - 21 \\
 - [(a-1)x^2 + a-1] \\
 \hline
 (a^2 - 4a - 5)x + a^2 - a - 20
 \end{array}$$

Για να είναι τέλεια η διαίρεση πρέπει

$$\begin{cases} a^2 - 4a - 5 = 0 & (\Leftrightarrow) \boxed{a=5} \text{ ή } \boxed{a=-1} \\ a^2 - a - 20 = 0 & \boxed{a=5} \quad \boxed{a=-4} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Άρα} \\ \underline{\underline{a=5}} \end{array}$$

6.

Δίνεται το πολώνυμο $P(x) = x^3 + ax^2 - 14x + B$.

Το $x-3$ είναι παραγοντα του $P(x)$ και
το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με

το $x+1$ είναι 36.

Να βρεθούν τα a, B και να παραγοντοποιηθεί
το $P(x)$

Αφού το $x-3$ είναι παραγοντα είναι $P(3) = 0$

Αφού το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με

το $x+1$ είναι 36 είναι $P(-1) = 36$.

$$\text{Άρα } \begin{cases} P(3) = 0 & \Leftrightarrow 27 + 9a - 42 + B = 0 & \Leftrightarrow 9a + B = 15 \\ P(-1) = 36 & \Leftrightarrow -1 + a + 14 + B = 36 & \Leftrightarrow a + B = 23 \end{cases}$$

$$\text{Συνεπώς } a = -1 \text{ και } B = 24$$

$$\text{Άρα } P(x) = x^3 - x^2 - 14x + 24$$

Αφού το $x-3$ είναι παραγοντα το 3 είναι ρίζα
του $P(x)$

$$\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -14 & 24 \end{array} \quad (3)$$

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & 3 & 6 & -24 \\ 1 & 2 & -8 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x-3)(x^2 + 2x - 8)$$

$$P(x) = (x-3)(x+4)(x-2)$$

7.

- α) Δίνεται το $P(x) = x^3 + 4x^2 + ax + b$ το οποίο
 έχει παραγοντά το $x^2 + 2x - 3$
 Να βρεθούν τα a, b

Είναι $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1)$

Αρα $P(-3) = 0 \Rightarrow -3a + b = -9$
 και $P(1) = 0 \Rightarrow a + b = -5$ $\left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = -6 \end{array} \right.$

- β) Δίνεται το $P(x) = x^3 + ax^2 + b$ το οποίο
 έχει παραγοντά το $x^2 - 4x + 4$.
 Να βρεθούν τα a, b .

Είναι $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$

Εδώ δεν σώζεται
 ο προηγούμενος
 τρόπος.

$$\begin{array}{r} 1 \quad a \quad 0 \quad b \quad (2) \\ \downarrow \quad 2 \quad 2a+4 \quad 4a+8 \\ 1 \quad a+2 \quad 2a+4 \quad \boxed{4a+b+8} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad a+2 \quad 2a+4 \quad (2) \\ \downarrow \quad 2 \quad 2a+8 \\ 1 \quad a+4 \quad \boxed{4a+12} \end{array}$$

Προηγ.

$$\begin{cases} 4a+b+8=0 \\ 4a+12=0 \end{cases}$$

$$\boxed{a=-3}$$

$$\boxed{b=4}$$

8.

Το υπόλοιπο της $P(x) : (x-2)$ είναι 1

και με το $P(x) : (x+3)$ είναι -14

Να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης

των $P(x)$ με το x^2+x-6 .

Δίνεται ότι $P(2)=1$ και $P(-3)=-14$

Συμπεραίνουμε με την ταυτότητα εκτελεστικής διαίρεσης

$$P(x) = \underbrace{(x^2+x-6)}_{\text{2ου βαθμού άρα } u(x) \text{ 1ου βαθμού}} \cdot \eta(x) + u(x).$$

Συνεπώς $P(x) = (x^2+x-6) \eta(x) + ax+B.$

$$P(2) = 2a+B = 1$$

$$P(-3) = -3a+B = -14 \quad (\Rightarrow) \quad \begin{cases} 2a+B=1 \\ -3a+B=-14 \end{cases} \quad (\Rightarrow) \quad \begin{matrix} a=3 \\ B=-5 \end{matrix}$$

9

Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x) : (x^2 - 3x - 10)$

είναι $-2x + 7$. Να βρούς το υπόλοιπο

της διαίρεσης $P(x) : (x + 2)$

κατ' αρχάς $P(x) = (x^2 - 3x - 10) \pi(x) + 7 - 2x$

Το υπόλοιπο της $P(x) : (x + 2)$ είναι $u = P(-2)$

Είναι $P(-2) = (4 + 6 - 10) \pi(-2) + 7 - 2(-2)$

$P(-2) = 11$ άρα $u = 11$.

10.

Εστω $P(x)$, 3ου βαθμού, πολλαπλάσιο το οποίο
διαιρείται με το x^2+3 , έχει ρίζα το -1
και και $P(-2)=14$. Να βρω το $P(x)$.

Επειδή ισχύει ότι $P(x) = (x^2+3) \cdot \eta(x)$
↓
3ου βαθμού άρα $\eta(x)$ 1ου βαθμού

$$\text{Είναι } P(x) = (x^2+3)(ax+B).$$

$$P(-1)=0 \quad (\Rightarrow) 4(-a+B)=0 \quad (\Rightarrow) -a+B=0$$

$$P(-2)=14 \quad (\Rightarrow) 7(-2a+B)=14 \quad (\Rightarrow) -2a+B=2$$

$$\begin{cases} -a+B=0 \\ -2a+B=2 \end{cases} \quad (\Rightarrow) a=B=-2.$$

$$\text{Άρα } P(x) = (x^2+3)(-2x-2)$$

$$P(x) = -2x^3 - 2x^2 - 6x - 6$$

11.

Na Zougou ol eTwowouf

$$\textcircled{\alpha} \quad x^3 - 12 = 4x - 3x^2$$

$$x^3 - 12 - 4x + 3x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4x - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x+3) - 4(x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)(x^2-4) = 0$$

$$x+3=0$$

$$\boxed{x=-3}$$

u

$$x^2-4=0$$

$$x^2=4$$

$$\boxed{x=2}$$

$$\text{u} \quad \boxed{x=-2}$$

$$\textcircled{\beta} \quad (2x+1)^3 = 27$$

$$(2x+1)^3 = 3^3$$

$$\Leftrightarrow 2x+1=3$$

$$\Leftrightarrow 2x=2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x=1}$$

$$\textcircled{\gamma} \quad (x^2-11)^5 + 32 = 0$$

$$(x^2-11)^5 = -32$$

$$\Leftrightarrow (x^2-11)^5 = (-2)^5$$

$$x^2-11=-2$$

$$\Leftrightarrow x^2=9$$

$$\Leftrightarrow x^2=3^2$$

$$\boxed{x=3}$$

$$\text{u} \quad \boxed{x=-3}$$

$$\textcircled{\delta} (x^2-2)^4 - 16 = 0$$

$$(x^2-2)^4 = 2^4$$

$$x^2-2=2 \quad \vee \quad x^2-2=-2$$

$$x^2=4$$

$$x^2=0$$

$$x^2=2^2$$

$$\boxed{x=0}$$

$$\boxed{x=2} \quad \boxed{x=-2}$$

$$\textcircled{\epsilon} (5x-3)^6 + 4 = 0$$

$$(5x-3)^6 = -4$$

αδυναται

$$\textcircled{\zeta} x^3 - 7x + 6 = 0$$

Οι διαιρέτες του σταθερού όρου είναι οι

$$6 \text{ ή } \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$$

Παρατηρώ ότι το 1 είναι λύση της εξίσωσης
οπότε δοκιμάζω Horner με το 1.

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & 0 & -7 & 6 \\ \downarrow & 1 & 1 & -6 & \\ \hline 1 & 1 & -6 & 0 \end{array} \quad \textcircled{1}$$

Η εξίσωση γίνεται

$$(x-1)(x^2+x-6)=0$$

$$x-1=0$$

$$\vee \quad x^2+x-6=0$$

$$\boxed{x=1}$$

$$\boxed{x=-3} \quad \boxed{x=2}$$

$$\textcircled{n} \quad 6x^4 - 5x^3 - 15x^2 + 4 = 0$$

Διασπαστείτε τον 4: $\pm 1, \pm 2, \pm 4$

$$\begin{array}{rrrrr} 6 & -5 & -15 & 0 & 4 & \textcircled{-1} \\ \downarrow & & & & & \\ & -6 & 11 & 4 & -4 & \\ 6 & -11 & -4 & 4 & 0 & \end{array}$$

$$(x+1)(6x^3 - 11x^2 - 4x + 4) = 0$$

$$x+1=0$$

$$\boxed{x = -1}$$

$$6x^3 - 11x^2 - 4x + 4 = 0$$

$$\begin{array}{rrrrr} 6 & -11 & -4 & 4 & \textcircled{2} \\ \downarrow & & & & \\ & 12 & 2 & -4 & \\ 6 & 1 & -2 & 0 & \end{array}$$

$$(x-2)(6x^2 + x - 2) = 0$$

$$x-2=0$$

$$\boxed{x = 2}$$

$$6x^2 + x - 2 = 0$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}}$$

$$\boxed{x = -\frac{2}{3}}$$

$$\textcircled{p} \quad x^6 - 7x^2 - 6 = 0$$

$$(x^2)^3 - 7x^2 - 6 = 0$$

$$x^2 = t$$

$$t^3 - 7t - 6 = 0$$

$$1 \quad 0 \quad -7 \quad -6 \quad \textcircled{-1}$$

$$\downarrow \quad -1 \quad 1 \quad 6$$

$$1 \quad -1 \quad -6 \quad 0$$

$$(t+1)(t^2 - t - 6) = 0$$

$$t+1=0 \quad \vee \quad t^2 - t - 6 = 0$$

$$t = -1$$

$$t = 3$$

$$t = -2$$

$$x^2 = -1$$

$$x^2 = 3$$

$$x^2 = -2$$

Абсурт

$$\boxed{x = \pm\sqrt{3}}$$

Абсурт

$$\textcircled{v} \quad 1 - \frac{2x-1}{x+2} = \frac{3x^2}{x^2-4} + \frac{3}{2-x}$$

$$1 - \frac{2x-1}{x+2} = \frac{3x^2}{(x-2)(x+2)} - \frac{3}{x-2}$$

$$\text{ЕМЗ } (x-2)(x+2)$$

Перопоршол

$$x \neq 2$$

$$x \neq -2$$

$$(x-2)(x+2) - (2x-1)(x-2) = 3x^2 - 3(x+2)$$

$$x^2 - 4 - (2x^2 - 4x - x + 2) = 3x^2 - 3x - 6$$

$$x^2 - 4 - 2x^2 + 4x + x - 2 = 3x^2 - 3x - 6$$

$$-x^2 + 5x - 6 = 3x^2 - 3x - 6 \quad (\Rightarrow) \quad 4x^2 - 8x = 0$$

$$4x(x-2) = 0$$

$$\boxed{x=0}$$

$$\boxed{x=2}$$

Азмон 33

На ҷудав ол анишони

а) $x^2 - 2x - 3 \geq 0$

x	-1	3
$x^2 - 2x - 3$	+	-

$$x \in (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$$

б) $4x^2 + 4x + 1 > 0$

x	$-\frac{1}{2}$
$4x^2+4x+1$	$+ \phi +$

$$x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

г) $x^2 - 3x + 4 \leq 0$

x	
$x^2 - 3x + 4$	+

Азмон!

д) $(x-2)(x^2 - 3x - 4)(x^2 + 6x + 9)(x^2 - x + 2) < 0$

(2) (4) (-1) (-3)

x	-3	-1	2	4
$x-2$	-	-	-	+
x^2-3x-4	+	+	-	+
x^2+6x+9	+	+	+	+
x^2-x+2	+	+	+	+
$P(x)$	-	-	+	+

$$x \in (-\infty, -3) \cup (-3, -1) \cup (2, 4)$$

$$\textcircled{\epsilon} \quad x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30 < 0$$

$$\begin{array}{rcccccc} 1 & -3 & -15 & 19 & 30 & \textcircled{-1} \\ \downarrow & -1 & 4 & 11 & -30 & \\ 1 & -4 & -11 & 30 & 0 & \end{array}$$

$$\rightarrow (x+1)(x^3 - 4x^2 - 11x + 30) < 0$$

$$\begin{array}{rcccccc} 1 & -4 & -11 & 30 & \textcircled{2} \\ \downarrow & 2 & -4 & -30 & \\ 1 & -2 & -15 & 0 & \end{array}$$

$$\rightarrow (x+1)(x-2)(x^2 - 2x - 15) < 0$$

$\textcircled{-1} \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{5} \quad \textcircled{-3}$

x	-3	-1	2	5
x+1	-	-	+	+
x-2	-	-	-	+
x ² -2x-15	+	-	-	+
P(x)	+	-	+	-

$$x \in (-3, -1) \cup (2, 5)$$

Άσκηση 1

1. Να βρεθεί ο βαθμός του πολυωνύμου
 $P(x) = (\lambda^2 - 1)x^2 + (\lambda^2 + \lambda)x - \lambda - 1 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$
2. Να γίνουν οι διαιρέσεις ταθυστα
α) $(3x^3 - 2x^2 - 1) : (x^2 + x)$ β) $(x^4 - x + 2) : (x - 1)$
3. Να γίνουν οι διαιρέσεις με Horner.
α) $(x^4 - x + 2) : (x - 1)$ β) $(x^3 + 2x^2 + 4x - 1) : (2x - 1)$
4. Το $P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 - 22x + 6\alpha$
έχει παραγοντα το $x^2 + 2x - 3$
α) Νόο $\alpha = 4$ και $\beta = -7$
β) Να λυθεί η ανίσωση $P(x) \geq 0$
5. Το $P(x) = x^4 + 3x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 6$ έχει
παραγοντα το $x^2 + 2x + 1$
α) Νόο $\alpha = -3$ και $\beta = -11$
β) Να λυθεί η εξίσωση $P(x) = 0$
γ) Να λυθεί η ανίσωση $P(x) \geq 0.$

6. Το $P(x) = 12x^3 - 8x^2 - 10x + a$ έχει
παραγοντα το $3x+1$.

(α) Νόο $a = -2$

(β) Να λυθεί η ανίσωση $P(x) \leq 3x+1$

7. Δίνεται $P(x) = ax^3 + (b-1)x^2 - 3x - 2b+6$

Αν το $x-1$ είναι παραγοντας του $P(x)$
και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$
με το $x+1$ είναι 150 με 2.

(α) Νόο $a=2$ και $b=4$

(β) Να λυθεί η εξίσωση $P(x)=0$

8. Η διαίρεση $P(x) : (x^2+2)$ αφήνει υπόλοιπο
 $3x-2$. Αν $P(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + ax + b$

(α) Να βρεθεί τα a, b

(β) Να λυθεί την εξίσωση

$$P(x) = 3x - 2.$$