Βασικη Ασκηση μαθηματος

Εστω $f(x) = e^{-x} - \ln(x+1) - 1$

1. Συνολο Τιμων.

$D_f = (-1, +\infty)$

Μονοτονια

- $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{-x_1} > e^{-x_2}$ $\quad (+)$
- $x_1 < x_2 \Rightarrow \ln(x_1+1) < \ln(x_2+1) \Rightarrow -\ln(x_1+1) > -\ln(x_2+1)$

$$f(x_1) > f(x_2)$$

$$f \downarrow$$

2. Νδο η εξισωση

$$f\left(e^{-x}-\ln(x+1)\right)=0$$

εχει μοναδικη ριζα.

$$f\left(e^{-x}-\ln(x+1)\right)=f(0)$$

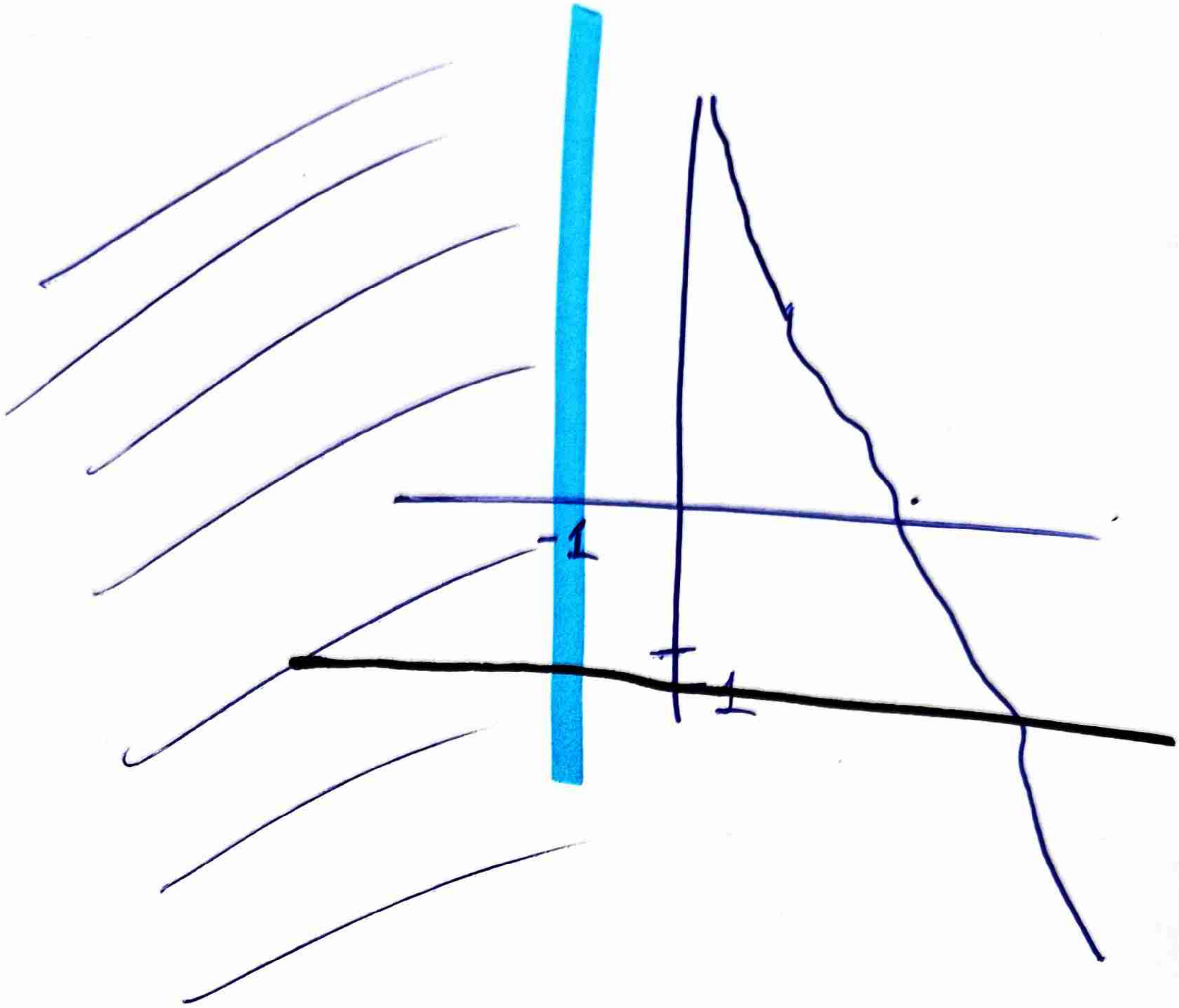
$$f \text{ 1-1}$$

$$e^{-x}-\ln(x+1)=0$$

$$\underbrace{e^{-x}-\ln(x+1)-1}_{f(x)}=-1$$

$$f(x)=-1.$$

Αρκει πλεον νδο η εξισωση $f(x)=-1$ εχει μοναδικη ριζα. δηλαδη αρκει νδο η C_f τεμνει την ευθ. $y=-1$ ΜΙΑ ΦΟΡΑ ΑΚΡΙΒΩΣ.



$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} e^{-x} - \ln(x+1) - 1 = +\infty$$

$ΣΤ_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} e^{-x} - \ln(x+1) - 1 = -\infty$$

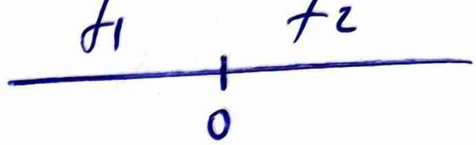
- f συνεχής
- $f \downarrow$
- $ΣΤ_f = \mathbb{R}$

Το $-1 \in ΣΤ_f$ άρα $\exists!\, x_0 \in D_f$ τ.ω. $f(x_0) = -1$.

20.

Δίνεται $f(x) = \begin{cases} x + e^x, & x \le 0 \\ e^{-x} - \ln(x+1), & x > 0 \end{cases}$

(α) Ν.δ.ο f συνεχής.



Η $f(x)$ είναι συνεχής στο $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ ως π.δ.δ.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (x + e^x) = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} e^{-x} - \ln(x+1) = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Άρα } \lim_{x \to 0} f(x) = 1 \\ f(0) = 0 + e^0 = 1 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

Συνεχής στο 0 άρα στο $\mathbb{R}$.

(B) Συνολο Τιμων $f(x)$

$x \le 0$

- $x_1 < x_2$
- $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2}$ $\Big\}$ (+)

$f(x_1) < f(x_2)$

$f \nearrow$

$x > 0$

- $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{-x_1} > e^{-x_2}$
- $x_1 < x_2 \Rightarrow -\ln(x_1+1) > -\ln(x_2+1)$

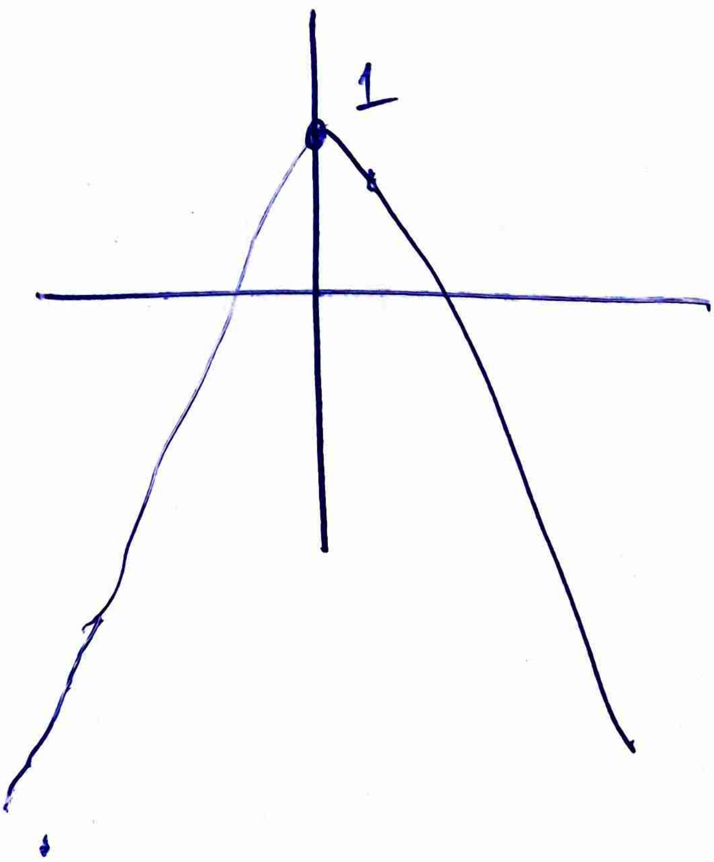
$f \searrow$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x+e^{x} = -\infty$$

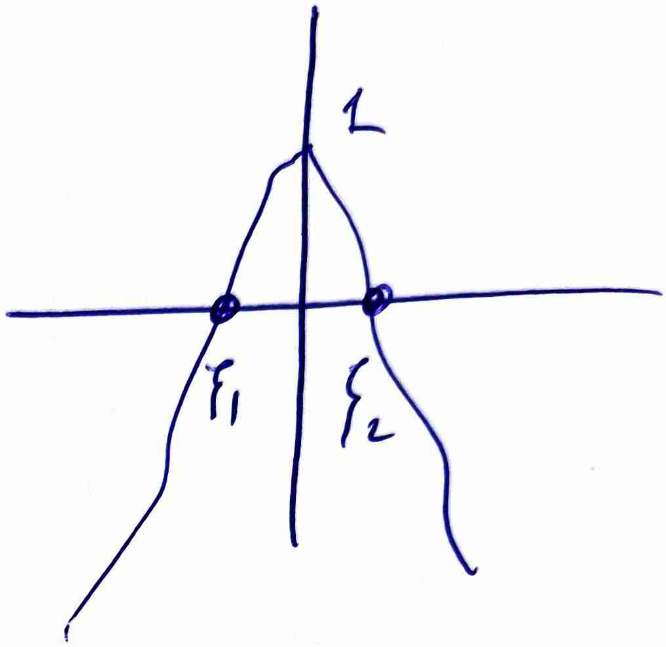
$$f(0) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x} - \ln(x+1)$$



$$\Sigma T_f = (-\infty, 1]$$

(1) Ν.δ.ο η f έχει ακριβώς 2 ετερόσημες ρίζες.



$x \leq 0$

- f συνεχής
- $f \nearrow$
- $\Sigma T_f = (-\infty, 1]$

Το $0 \in \Sigma T_f$

άρα $\exists! \, \xi_1 < 0$

τ.ω $f(\xi_1) = 0$

$x > 0$

- $f \searrow$
- f συνεχής
- $\Sigma T_f = (-\infty, 1]$

Το $0 \in \Sigma T_f$

άρα $\exists! \, \xi_2 > 0$

τ.ω $f(\xi_2) = 0$.

$\alpha \neq 0 \quad \beta \neq 0.$

(δ) ΝΔΟ η εξίσωση $\dfrac{f(\alpha)-1}{x-1} + \dfrac{f(\beta)-1}{x-2} = 0$

έχει τουλ. μια ρίζα στο $(1,2)$.

$$\underbrace{(x-2)(f(\alpha)-1) + (x-1)(f(\beta)-1)}_{g(x)} = 0$$

Η $g(x)$ συνεχής στο $[1,2]$ ως π.σ.σ

$g(1) = -(f(\alpha)-1) = 1-f(\alpha) > 0$

$g(2) = f(\beta)-1 < 0$

Bolzano $\exists\, \xi \in (1,2)$ τ.ω $g(\xi)=0$

Άρα $g(1)\cdot g(2)$

$\Sigma T_f = (-\infty, 1]$ άρα $f(x) \leq 1 \Rightarrow f(\alpha) \leq 1$

$f(\beta) \leq 1$

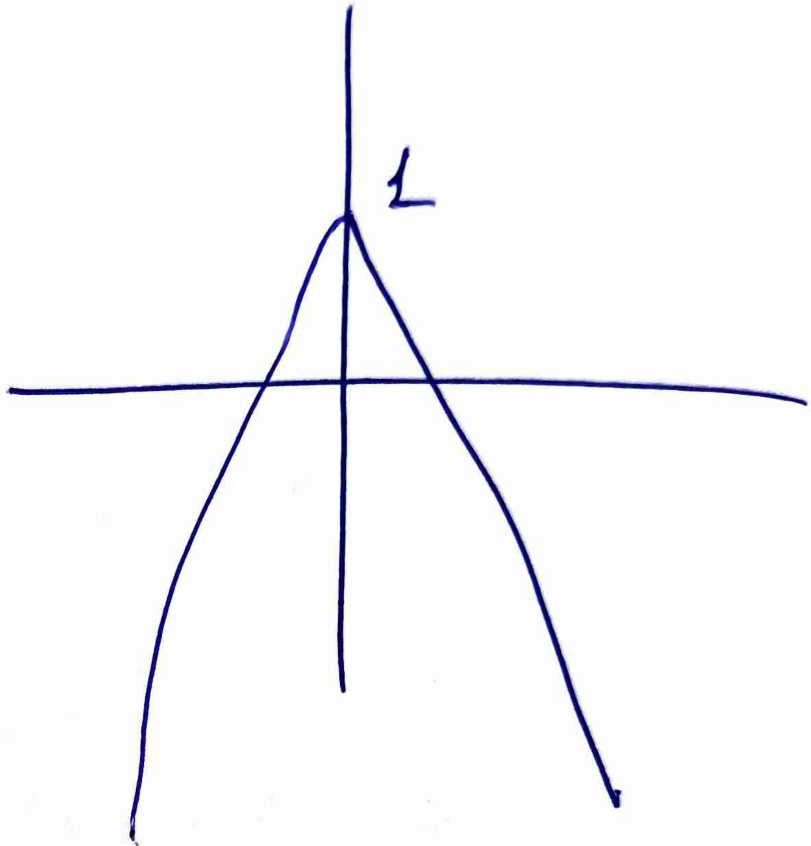
$\alpha \neq 0$

$\beta \neq 0$

$\Rightarrow f(\alpha) < 1$

$f(\beta) < 1$

ε) Πλήθος λύσεων $f(x)=\alpha$.



Αν $\alpha>1$ τότε 0 λύσεις

Αν $\alpha=1$ τότε 1 λύση

Αν $\alpha<1$ τότε 2 λύσεις.

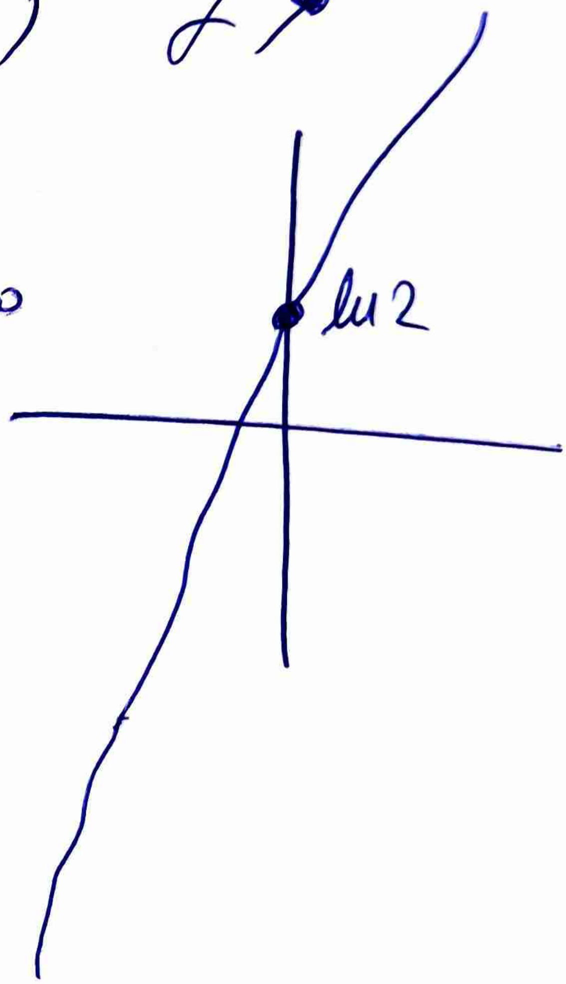
25. Έστω $f(x) = x + \ln(1+e^x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(α) · Σύνολο Τιμών

· $x_1 < x_2 \Rightarrow \underbrace{\ln(1+e^{x_1}) < \ln(1+e^{x_2})}_{}$

$\oplus$

$f(x_1) < f(x_2)$ $\quad f \nearrow$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x + \ln(1+e^x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$ΣΤ_f = \mathbb{R}$.

(B) $e^{f(f(x))} < 6$.

$$\ln e^{f(f(x))} < \ln 6$$

$$f(f(x)) < \ln 6$$

$$f(f(x)) < f(\ln 2)$$

$$f \nearrow$$

$$f(x) < \ln 2$$

$$f(x) < f(0)$$

$$f \nearrow$$

$$\underline{\underline{x < 0}}$$

$$f(\ln 2) = \ln 2 + \ln(1 + e^{\ln 2}) = \ln 2 + \ln 3 =$$
$$= \ln 6$$

(γ) ΝΔΟ η εξίσωση $f(\ln(e^{2x}+e^{x})-2019)=\ln\frac{1+e}{e^2}$

έχει μον. λύση

$$f(\ln(e^{2x}+e^{x})-2019)=\ln(1+e)-\ln e^2$$

$$f(\ln(e^{2x}+e^{x})-2019)=\ln(1+e)-2$$

$$f(\ln(e^{2x}+e^{x})-2019)=f(1)$$

f 1-1

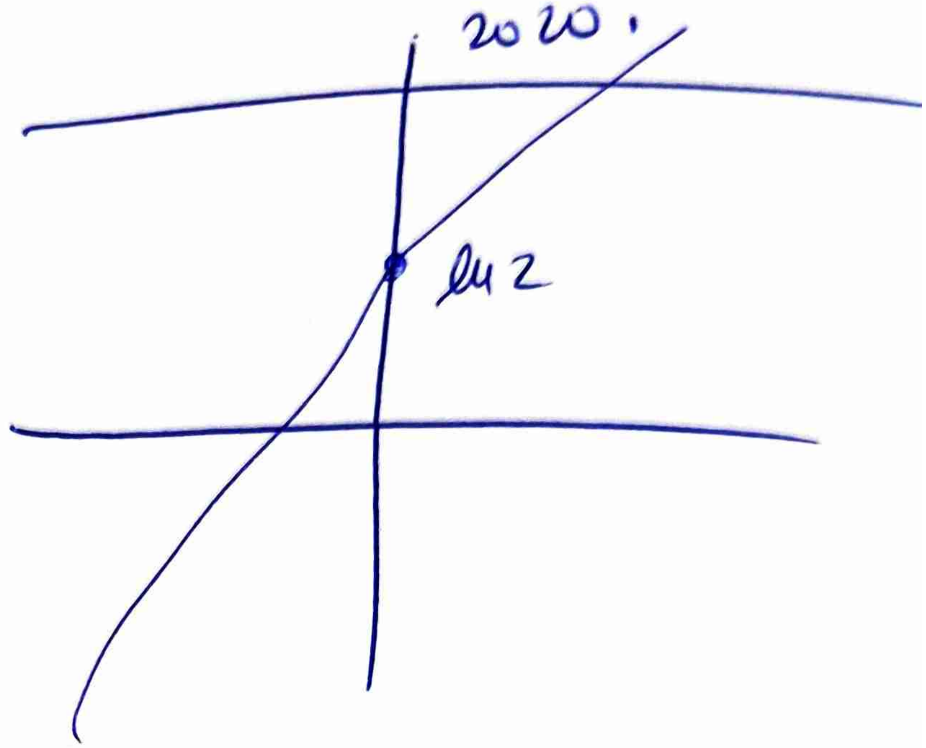
$$\ln(e^{2x}+e^{x})-2019=1$$

$$\ln(e^{2x}+e^{x})=2020.$$

$$\ln(e^{x}(e^{x}+1))=2020.$$

$$\ln e^{x}+\ln(e^{x}+1)=2020.$$

$$x+\ln(e^{x}+1)=2020 \Rightarrow H(x)=2020$$



• f συνεχής.

• $f \nearrow$

• $\Sigma T_f = \mathbb{R}$.

Το $2020 \in \Sigma T_f$

άρα $\exists!\ \xi$ τ.ω $f(\xi) = 2020$.

Επομενο Μαθημα

Ενοτητα 14

15 Θα βρειτε μονο το συνολο τιμων τους και θα αποδειξετε οτι η

16 εξισωση $f(x)=2026$ εχει μοναδικη ριζα.

17

18