

Σημαντικοί Ασκήσεις

1. Να βρεθεί το λ ώστε η εξίσωση

$$(\lambda+3)x^2 - 2(\lambda+2)x + \lambda = 0, \lambda \neq -3$$

να έχει δύο ρίζες πραγματικές και ομώνυμες.

Λύση

Απαιτώ $\Delta > 0$

$$B^2 - 4\alpha\gamma > 0$$

$$[-2(\lambda+2)]^2 - 4 \cdot (\lambda+3) \lambda > 0$$

$$4(\lambda+2)^2 - 4\lambda(\lambda+3) > 0$$

$$4(\lambda^2 + 4\lambda + 4) - 4\lambda^2 - 12\lambda > 0$$

$$\cancel{4\lambda^2} + 16\lambda + 16 - \cancel{4\lambda^2} - 12\lambda > 0$$

$$4\lambda + 16 > 0$$

$$4\lambda > -16$$

$$\lambda > -4$$

2. Να βρούμε το λ ώστε η εξίσωση

$$x^2 + (\lambda + 1)x + \lambda + 4 = 0$$

να έχει μια ρίζα διπλή.

Λύση

Απαιτούμε $\Delta = 0$

$$B^2 - 4\alpha\gamma = 0$$

$$(\lambda + 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda + 4) = 0$$

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 - 4\lambda - 16 = 0$$

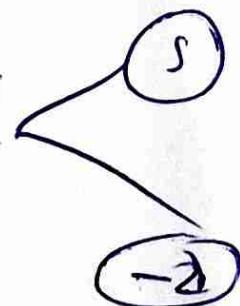
$$\lambda^2 - 2\lambda - 15 = 0$$

$$\Delta^* = B^2 - 4\alpha\gamma$$

$$\Delta^* = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)$$

$$\Delta^* = 4 + 60 = 64$$

$$\lambda = \frac{-B \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2}$$



3. Να βρω το λ ώστε η εξίσωση

$$x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - \lambda + 2 = 0$$

να έχει πραγματικά ρίζα

Λύση

Απαιτώ $\Delta \geq 0$

$$B^2 - 4\alpha\gamma \geq 0$$

$$(-2\lambda)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (\lambda^2 - \lambda + 2) \geq 0$$

$$4\lambda^2 - 4(\lambda^2 - \lambda + 2) \geq 0$$

$$\cancel{4\lambda^2} - \cancel{4\lambda^2} + 4\lambda - 8 \geq 0$$

$$4\lambda - 8 \geq 0$$

$$4\lambda \geq 8$$

$$\underline{\lambda \geq 2}$$

4. Να βρούμε το λ ώστε η

$$\varepsilon \text{ίσωση } (\lambda+8)x^2 + (\lambda+2)x + \frac{\lambda}{4} = 0$$

να είναι αδύνατη.

$$\lambda \neq -8$$

Λύση

Απαιτώ $\Delta < 0$

$$B^2 - 4\alpha\gamma < 0$$

$$(\lambda+2)^2 - 4 \cdot (\lambda+8) \frac{\lambda}{4} < 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 - 4 \cdot \frac{\lambda}{4} (\lambda+8) < 0$$

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 - \lambda(\lambda+8) < 0$$

$$\cancel{\lambda^2} + 4\lambda + 4 - \cancel{\lambda^2} - 8\lambda < 0$$

$$-4\lambda + 4 < 0$$

$$-4\lambda < -4$$

$$\lambda > 1$$

5. Νδο η εξίσωση

$$x^2 + (4\lambda - 2)x + (2\lambda - 1)^2 = 0$$

εχου δινη διγα .

Λογυ

$$\Delta = B^2 - 4\alpha\gamma = (4\lambda - 2)^2 - 4(2\lambda - 1)^2 =$$

$$= 16\lambda^2 - 16\lambda + 4 - 4(4\lambda^2 - 4\lambda + 1) =$$

$$= \cancel{16\lambda^2} - \cancel{16\lambda} + \cancel{4} - \cancel{16\lambda^2} + \cancel{16\lambda} - \cancel{4} =$$

$$= 0$$

Αφου $\Delta = 0$ εχου δινη διγα.

6. Νδσ η εξίσωση

$$x^2 + (\lambda - 1)x + 2\lambda - 6 = 0$$

εχει πραγματικη ρις.

Λυση

$$\Delta = B^2 - 4ac = (\lambda - 1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2\lambda - 6) =$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4(2\lambda - 6) =$$

$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1 - 8\lambda + 24 =$$

$$= \lambda^2 - 10\lambda + 25 =$$

$$= (\lambda - 5)^2 \geq 0$$

Αρα αφορ $\Delta \geq 0$ η εξίσωση

εχει πραγματικη ρις

7. Νόμο η επίδωση $x^2 + 7x - 27 = 0$

Εχουμε 2 ριζες αλυσες.

Λυση

$$\Delta = B^2 - 4\alpha\gamma = 7^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-27) =$$
$$= 7^2 + 108 > 0$$

αρα αρα $\Delta > 0$ Εχουμε

2 ριζες αλυσες.

8. Νδο η εξίσωση

$$x^2 - \lambda x + \frac{1}{4}(\lambda^2 + 1) = 0$$

δω έχη πραγματικά ρίζα.

Λυση

$$\Delta = B^2 - 4\alpha\gamma = (-\lambda)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4}(\lambda^2 + 1)$$

$$= \lambda^2 - (\lambda^2 + 1) =$$

$$= \cancel{\lambda^2} - \cancel{\lambda^2} - 1 =$$

$$= -1 < 0$$

Αφού $\Delta < 0$ η εξίσωση

δω έχη ρίζα.

Τυποί Viete

1. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - x - 5 = 0$

α) Να δειχθεί η εξίσωση έχει 2 ρίζες πραγματικές και αντίθετες.

$$\Delta = B^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 1 + 20 = 21 > 0 \text{ άρα έχει 2 ρίζες.}$$

β) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες να υπολογιστούν οι παραστάσεις.

$$i) \underline{x_1 + x_2} = -\frac{B}{\alpha} = -\frac{-1}{1} = 1 \quad \boxed{x_1 + x_2 = 1}$$

$$ii) \underline{x_1 \cdot x_2} = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-5}{1} = -5 \quad \boxed{x_1 x_2 = -5}$$

$$iii) \underline{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}} = \frac{x_2}{x_1 x_2} + \frac{x_1}{x_1 x_2} = \frac{x_2 + x_1}{x_1 x_2} = \frac{1}{-5}.$$

$$i) \quad x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 1^2 - 2(-5) = 11$$

$x_1^2 + x_2^2 = 11$

$$v) \quad \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2}{x_1x_2} + \frac{x_2^2}{x_1x_2} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1x_2} = \frac{11}{-5}$$

$$vi) \quad (x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$$

$$= 11 - 2(-5)$$

$$= 11 + 10 = 21$$

Παρατήρηση

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab.$$

2. Να κατασκευάσει εξίσωση

2ου βαθμού με ρίζες

το $\frac{1}{3}$ και το -2

$$S = x_1 + x_2 = \frac{1}{3} + (-2) = \frac{1}{3} - 2 = \\ = \frac{1}{3} - \frac{6}{3} = -\frac{5}{3}$$

$$P = x_1 x_2 = \frac{1}{3} \cdot (-2) = -\frac{2}{3}$$

Άρα η εξίσωση που ψάχνω είναι

$$\begin{array}{l} x^2 - Sx + P = 0 \\ \underline{\Sigma \text{ xοrιo}} \quad x^2 - \left(-\frac{5}{3}\right)x + \left(-\frac{2}{3}\right) = 0 \rightarrow \end{array}$$

κάθε εξίσωση 2ου βαθμού $ax^2 + bx + \gamma = 0$

μπορεί να γραφεί και αλλιώς.

$$\text{Παλ;} \quad x^2 - Sx + P = 0$$

$$\text{όπου } S = x_1 + x_2 \quad P = x_1 x_2.$$

Ans: $x^2 + \frac{5}{3}x - \frac{2}{3} = 0$

$$3x^2 + 5x - 2 = 0$$

3. Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - 2x - 5 = 0$$

όπου x_1, x_2 οι ρίζες της.

Να κατασκευαστεί εξίσωση

του Βαθμού n οποια
να έχει ρίζες τους αριθμούς.

$$x_1^2 x_2 \quad \text{και} \quad x_1 x_2^2$$

Γνωρίζουμε ότι $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-2}{1} = 2$

$$x_1 + x_2 = 2$$

Επίσης $x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{a} = \frac{-5}{1} = -5$

$$x_1 x_2 = -5$$

H ερώτηση που παχνα δο

$$\epsilon\lambda\omega\iota \quad x^2 - Sx + P = 0$$

$$\begin{aligned} S &= x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) \\ &= -5 \cdot 2 = \underline{\underline{-10}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P &= x_1^2 x_2 \cdot x_1 x_2^2 = x_1^3 x_2^3 = \\ &= (x_1 x_2)^3 = \\ &= (-5)^3 \\ &= \underline{\underline{-125}} \end{aligned}$$

$$x^2 - (-10)x + (-125) = 0$$

$$x^2 + 10x - 125 = 0$$

4. $\subset \sigma \tau \omega$ $\cup$ $\epsilon \{ \sigma \omega \omega \omega \}$

$$x^2 + \lambda x - (\lambda^2 + 1) = 0$$

(a) $N \Delta \sigma$ $\epsilon \chi \cup$ 2 $\rho i \lambda$. x_1, x_2

(b) $B \rho d$ $\tau \alpha$ λ (. $\alpha \nu$ $\upsilon \pi \alpha \rho \chi \omicron \nu$) $\omega \sigma \tau \epsilon$

$$i) (x_1 + x_2)^2 + x_1 x_2 + 5 = 0$$

Αυσχ $ii) x_1^2 + x_2^2 = 4$.

(a) $\Delta = B^2 - 4\alpha\gamma = \lambda^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-\lambda^2 - 1) =$

$$= \lambda^2 + 4(\lambda^2 + 1) = \lambda^2 + 4\lambda^2 + 4 =$$

$$= 5\lambda^2 + 4 > 0 \quad \alpha \rho \alpha \quad \epsilon \chi \cup$$

2 $\rho i \lambda$ x_1, x_2 .

$$x_1 + x_2 = -\frac{B}{\alpha} = -\frac{\lambda}{1} = -\lambda$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{-(\lambda^2 + 1)}{1} = -\lambda^2 - 1$$

$$\textcircled{B} \text{ i) } (x_1 + x_2)^2 + x_1 x_2 + 5 = 0$$

$$(-\lambda)^2 + (-\lambda^2 - 1) + 5 = 0$$

$$\cancel{\lambda^2} - \cancel{\lambda^2} - 1 + 5 = 0$$

$$4 = 0.$$

Αδυναμία.

Δα υπάρχουν λ .

$$\text{ii). } x_1^2 + x_2^2 = 4$$

$$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4$$

$$(-\lambda)^2 - 2 \cdot (-\lambda^2 - 1) = 4$$

$$\lambda^2 + 2\lambda^2 + 2 = 4$$

$$3\lambda^2 = 2 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{2}{3}$$

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Τυπολόγιο

1. Δύο ριζά ανιθάραι

$$\Delta > 0 \quad \text{και} \quad S = 0$$

2. Δύο ριζά ανιστοραφ

$$\Delta \geq 0 \quad \text{και} \quad P = 1$$

3. Δύο ριζά οροθικη

$$\Delta \geq 0 \quad \text{και} \quad P > 0$$

4. Δύο ριζά ετροθικη

$$P < 0$$

5. Θετικη

$$\Delta \geq 0, S > 0, P > 0$$

αρνητικη

$$\Delta \geq 0, S < 0, P > 0$$

Άσκηση

Δίνεται η εξίσωση

$$x^2 - 2(\lambda - 1)x + \lambda^2 - 3 = 0$$

Να βρούμε το

ωστός η εξίσωση

να έχει ρίζα

αρνητική.

Απαιτούμε $\Delta \geq 0$ και $S < 0$ και $P > 0$

$$\Delta \geq 0$$

$$B^2 - 4AC \geq 0$$

$$4(\lambda - 1)^2 - 4(\lambda^2 - 3) \geq 0$$

$$4(\lambda^2 - 2\lambda + 1) - 4\lambda^2 + 12 \geq 0$$

$$4\lambda^2 - 8\lambda + 4 - 4\lambda^2 + 12 \geq 0$$

$$-8\lambda + 16 \geq 0$$

$$-8\lambda \geq -16$$

$$\lambda \leq 2$$

κοινά 3

$$S < 0$$

$$-\frac{B}{A} < 0$$

$$-\frac{-2(\lambda - 1)}{1} < 0$$

$$2(\lambda - 1) < 0$$

$$2\lambda - 2 < 0$$

$$2\lambda < 2$$

$$\lambda < 1$$

$$P > 0$$

$$\frac{C}{A} > 0$$

$$\lambda^2 - 3 > 0$$

$$\lambda^2 > 3$$

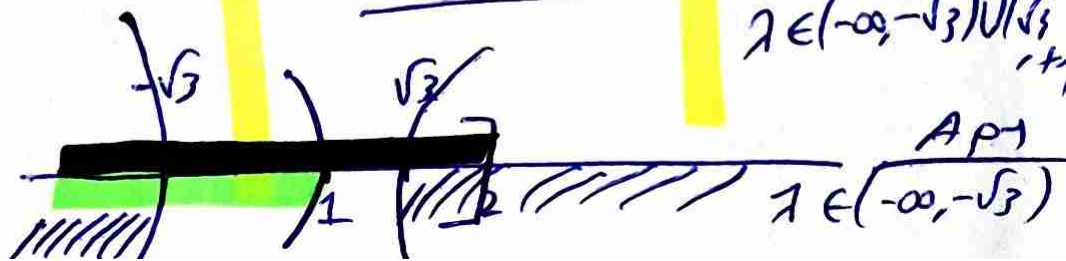
$$\lambda^2 > \sqrt{3}^2$$

$$|\lambda| > |\sqrt{3}|$$

$$|\lambda| > \sqrt{3}$$

$$\lambda > \sqrt{3} \vee \lambda < -\sqrt{3}$$

$$\lambda \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$$



Επορας Μαθημα

14

①

②

⑥ οι Β

⑩

⑪

⑫

⑭